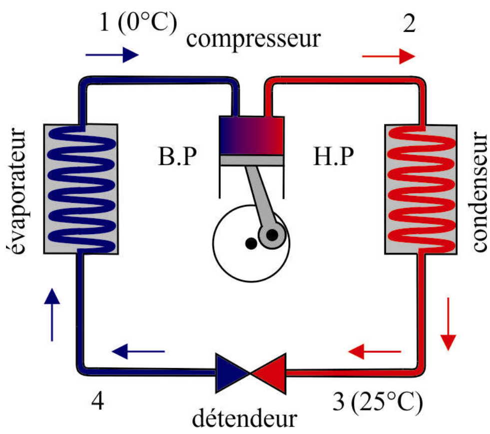
BILANS ÉNERGÉTIQUES ET ENTROPIQUES POUR UN ÉCOULEMENT / FLUIDES PARFAITS

1. Installation frigorifique



L'agent de la transformation est l'ammoniac (réfrigérant R717 dont on donne le diagramme de Mollier en dernière page).
Il subit :

- Une compression isentropique $1 \rightarrow 2$ dans le compresseur.
- Une liquéfaction totale isobare $2 \rightarrow 3$ dans le condenseur. La température de la transition de phase est de 30°C. La température de sortie du liquide est de 25°C (on parle de sous-refroidissement puisque cette température est inférieure à celle de la transition de phase). Le fluide caloporteur fournit alors un transfert thermique massique à la source chaude q_1.
- Une détente de Joule/Thomson $3 \rightarrow 4$ dans le détendeur.
- une vaporisation totale isobare $4 \rightarrow 1$ dans l'évaporateur. La température de la transition de phase est de $-10°\text{C}$. La température de sortie du liquide est de 0°C (on parle de surchauffe puisque cette température est supérieure à celle de la transition de phase). Il reçoit alors un transfert thermique massique de la source froide q_2

L'installation développe une puissance frigorifique brute de 100 kW.

1) Représenter le cycle dans le diagramme de Mollier. Dresser un tableau des pressions, températures, enthalpies massiques et titres massiques en vapeur x aux différents points du cycle.
2) Quelle est l'expression du premier principe pour un écoulement de fluide ? Indiquer l'intérêt de la surchauffe et du sous-refroidissement.
3) Déterminer :
— le débit massique du fluide.
— la puissance mécanique théorique P_u du compresseur.
— la puissance mécanique réelle. On prendra un rendement mécanique $\eta_m = 0{,}90$ et un rendement thermodynamique (le cycle décrit est un modèle : il y a notamment des pertes de charge) $\eta_t = 1 - 0{,}05\dfrac{p_{\text{cond.}}}{p_{\text{évap.}}}$ où $p_{\text{cond.}}$ et $p_{\text{évap.}}$ sont respectivement les pressions dans le condenseur et dans l'évaporateur.
— l'efficacité théorique (appelée C.O.P : coefficient de performance) et réelle de l'installation.
— l'efficacité η_C du cycle de Carnot décrit par le fluide dont la température varie entre $-10°\text{C}$ et 30°C, ainsi que le rendement de l'installation, défini par $r = \dfrac{\text{C.O.P}_{\text{réel}}}{\eta_C}$.
— la puissance à évacuer au condenseur.

réponse : 3) $q_m = 0{,}087\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$, $P_u = 19\ \text{kW}$, $r = 57\ \%$.

2. Élévation de la température de la rivière, source froide dans une centrale nucléaire

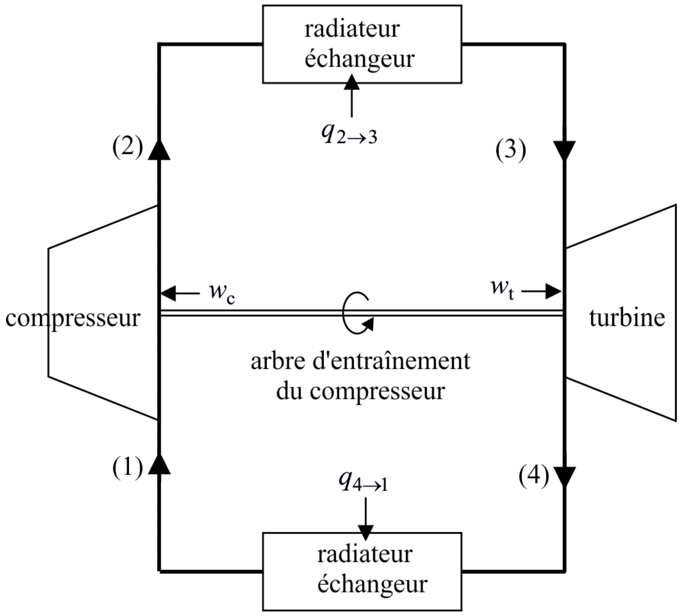
La centrale délivre une puissance moyenne P de 1 GW. Son rendement thermodynamique s'écrit $\eta = x\eta_{\text{rev}}$, où η_{rev} est le rendement thermodynamique pour un cycle réversible, et $x = 0{,}6$.
Lors d'un cycle, l'agent de la transformation (de l'eau) circule entre le cœur de la centrale à une température $T_1 = 700\ \text{K}$ et une rivière dont le débit volumique est $q_V = 400\ \text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ et la température d'entrée $T_2 = 290\ \text{K}$. La température de sortie de la rivière est $T_2 + \Delta T_2$. On cherche à calculer numériquement ΔT_2 lorsque la centrale fonctionne en régime stationnaire.
On suppose ΔT_2 petit, ce qui permet de considérer que la rivière est une source froide de température T_2 pour la machine thermique.
1) Retrouver l'expression de η_{rev} en fonction de T_1 et T_2.
2) En déduire l'expression de l'énergie Q_2 reçue sous forme de chaleur par la machine de la part de la rivière pendant la durée Δt d'un cycle, en fonction de P, Δt, x, T_1 et T_2.

3) Déterminer ΔT_2 en appliquant le premier principe à la rivière entre l'entrée et la sortie de la centrale. On note c_p la capacité thermique massique de l'eau et ρ sa masse volumique.
Faire l'application numérique avec $c_p = 4{,}18\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$. Il arrive qu'en été on doive diminuer la puissance fournie par une centrale. Expliquer pourquoi.

réponse : 1) cycle de Carnot moteur $\eta_{rev} = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$ 2) $Q_2 = P\Delta t\left[1 - \dfrac{1}{x(1 - T_2/T_1)}\right]$ 3) $\Delta T_2 = -\dfrac{P}{\rho q_V c_p}\cdot\left[1 - \dfrac{1}{x(1 - T_2/T_1)}\right] = 1{,}1\,\mathrm{K}$.

3. Cycle de Brayton

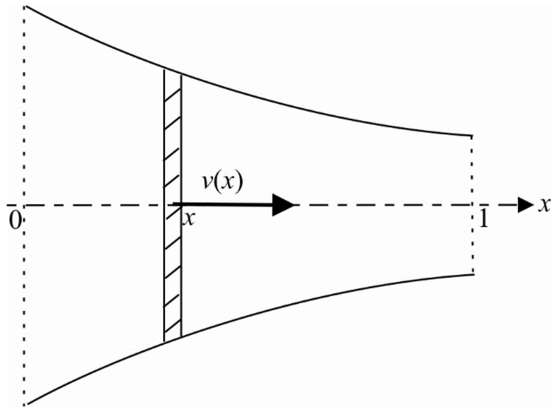
Le gaz utilisé est assimilé à un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1{,}4$; il subit les transformations (toutes réversibles) suivantes :
— compression adiabatique dans le compresseur (étape $1 \to 2$). Le gaz se trouve alors dans les conditions (p_2, T_2). On note w_c le travail utile massique qu'il reçoit ;
— transformation isobare (étape $2 \to 3$) dans un radiateur échangeur. Le gaz se trouve alors dans les conditions (p_2, T_3). On note $q_{2\to3}$ la chaleur massique qu'il reçoit ;
— détente adiabatique dans la turbine. Une partie du travail qu'elle fournit est utilisée pour faire fonctionner le compresseur, l'autre est le travail disponible pour l'utilisation souhaitée (étape $3 \to 4$). Le gaz se trouve alors dans les conditions (p_1, T_4). On note w_t le travail massique qu'il reçoit de la part des parties mobiles ;
— transformation isobare (étape $4 \to 1$) dans un radiateur échangeur. Le gaz se trouve alors dans les conditions (p_1, T_1). On note $q_{4\to1}$ la chaleur massique qu'il reçoit.



1) Calculer l'enthalpie massique et l'entropie massique du gaz parfait en variable (*T*,*p*). On note h_0 et s_0 l'enthalpie et l'entropie massique à T_0 et p_0, *R* la constante des gaz parfaits et *M* la masse molaire du gaz.
2) Représenter le cycle en justifiant l'allure des courbes dans le diagramme de Clapeyron (volume massique *v* en abscisse, pression en ordonnée), puis dans le diagramme entropique (entropie massique en abscisse, température en ordonnée).
Que représentent les aires de ces cycles ? Justifier
3) Démontrer $\Delta h = h_{\text{sortie}} - h_{\text{entrée}} = q + w$ entre l'entrée et la sortie d'un composant, où *q* est la chaleur reçue par l'unité de masse du gaz entre l'entrée et la sortie et *w* le travail reçu de la part des pièces mobiles. Quel est le signe des chaleurs $q_{2\to3}$ et $q_{4\to1}$?
4) Définir le rendement η du cycle. Calculer η en fonction des températures, puis en fonction de γ et du taux de compression $a = \dfrac{p_2}{p_1}$. Tracer l'allure de $\eta(a)$. Conclure.
5) En quel point du cycle la température est-elle maximale ? minimale ? On donne $T_{max} = 1000\,\mathrm{K}$ et $T_{min} = 300\,\mathrm{K}$ au cours du cycle. Déterminer la valeur de *a* rendant maximal le travail fourni par le gaz. Calculer alors η.

réponse : 1) $h(T) = \dfrac{R\gamma}{M(\gamma-1)}(T - T_0) + h_0$; $s(T,p) = \dfrac{R\gamma}{M(\gamma-1)}\ln\left[\dfrac{T}{T_0}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right] + s_0$ 3) $q_{2\to3} = h_3 - h_2 > 0$;

$q_{4\to1} = h_1 - h_4 < 0$; 4) $\eta = \dfrac{|W_{cycle}|}{q_{2\to3}} = 1 + \dfrac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} = 1 - a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$; 5) $T_{max} = T_3$; $T_{min} = T_1$; $a = \left[\dfrac{T_3}{T_1}\right]^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}} = 8{,}22$; $\eta = 0{,}452$.



Un gaz parfait obtenu après combustion d'un propergol dans le réacteur s'écoule dans une tuyère horizontale de révolution autour de l'axe Ox. On note $h(x)$, $\rho(x)$, $p(x)$, $T(x)$, $v(x)$ et $\mathscr{S}(x)$ respectivement l'enthalpie massique, la masse volumique, la pression, la température, la vitesse macroscopique du gaz et la section de la tuyère à l'abscisse x.
On affecte l'indice 0 aux grandeurs d'entrée et l'indice 1 aux grandeurs de sortie. L'écoulement est stationnaire et adiabatique réversible.

1) Calculer v_1 en fonction de v_0, T_0, γ (supposé constant), du rapport $r = \dfrac{R}{M}$ où M est la masse molaire du gaz et R la constante des gaz parfaits, et du rapport des pressions $\psi = \dfrac{p_1}{p_0}$. On suppose par la suite v_0 négligeable devant v_1.
A.N : $\gamma = 1{,}3$, $M = 18\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$, $T_0 = 3500\ \mathrm{K}$, $\psi = 10^{-2}$. Calculer T_1 et v_1.

2) Calculer la masse volumique de sortie ρ_1 en fonction de p_0, T_0, r et ψ. En déduire que le débit massique q_m se met sous la forme $q_m = Cte \cdot \mathscr{S}_1 \cdot \psi^{\frac{1}{\gamma}}\left[1-\psi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}$ où $\mathscr{S}_1$ est la section de sortie. Expliciter Cte en fonction de p_0, T_0, γ et r.

3) Pour quelle valeur ψ^* de ψ le débit massique q_m est-il maximal ? Faire l'application numérique pour $\gamma = 1{,}3$.

4) Un engin à réacteur muni d'une tuyère de Laval subit une force de poussée de norme $\pi = q_m v_1$. Pour quelle valeur $\psi^{\oplus}$ de ψ la poussée est-elle maximale ? Faire l'application numérique pour $\gamma = 1{,}3$.

réponse : 1) $v_1 = \sqrt{{v_0}^2 + \dfrac{2\gamma r T_0}{\gamma-1}\left(1-\psi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \approx 3030\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $T_1 = T_0 \psi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1210\ \mathrm{K}$ 2) $Cte = p_0\left[\dfrac{2\gamma}{(\gamma-1) r T_0}\right]^{\frac{1}{2}}$

3) $\psi^* = \left[\dfrac{2}{1+\gamma}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0{,}546$ 4) $\psi^{\oplus} = \gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 0{,}320$.

5. Tourbillon de Rankine

On considère un récipient cylindrique de rayon R_0, d'axe vertical Oz, rempli d'eau. Un petit barreau magnétique tourne autour de Oz, engendrant un écoulement. On repère un point M du fluide repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z). On distingue dans notre modélisation deux zones :
— zone A : $0 \le r < R$: l'écoulement est tourbillonnaire avec $\vec{\omega}$ uniforme : $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_z$;
— zone B : $R < r \le R_0$: l'écoulement est irrotationnel.

1) Dans quelles zones de l'écoulement doit-on *a priori* renoncer au modèle du fluide parfait ?
2) Calculer le champ des vitesses dans l'écoulement.
3) Montrer que l'eau dans la zone A est en équilibre dans le référentiel en rotation autour de Oz avec un vecteur rotation $\omega_0 \vec{e}_z$ par rapport au référentiel du laboratoire. En déduire l'expression du champ de pression dans cette zone, puis l'équation de la surface libre au dessus de A (on prend pour cette dernière $z = a$ pour $r = 0$).
4) Déterminer le champ de pression dans la partie B de l'écoulement. En déduire l'équation de la surface libre au-dessus de B.

réponse : 3) $z = a + \dfrac{{\omega_0}^2 r^2}{2g}$ 4) $z = a + \dfrac{{\omega_0}^2 R^2}{g}\left[1 - \dfrac{R^2}{2r^2}\right]$.

6. Régimes d'un cours d'eau

On considère un écoulement parfait 1D incompressible et stationnaire selon Ox entre un plan horizontal $z = 0$ et une surface libre dont l'altitude z varie lentement avec x. On note L la largeur constante du cours d'eau. Dans une section en amont, $z = h_0$ et la vitesse est uniforme : $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. On note $H = h_0 + \dfrac{{v_0}^2}{2g}$. Dans une section quelconque en aval, $z = h$ et la vitesse est uniforme $\vec{v} = v \vec{e}_x$.

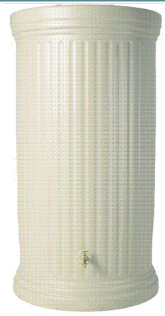
1) Calculer le débit volumique q_V du cours d'eau en fonction de L, g, h et H.
2) Calculer le débit maximal $q_{V\max}$ et la hauteur h_c correspondante. Tracer la courbe $q_V(h)$.
3) Montrer que pour un débit donné $q_V < q_{V\max}$, on a deux régimes d'écoulement possibles : régime torrentiel et régime fluvial. Les identifier sur le graphe.
On introduit le nombre de Froude $Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}}$. Montrer que le régime torrentiel correspond à $Fr > 1$, le fluvial à $Fr < 1$.

4) On suppose que L rétrécit progressivement et passe de L à $L + \Delta L$ (avec $\frac{\Delta L}{L} << 1$: il n'y a pas changement de régime). Dans quel sens évolue h ? Discuter selon que l'on est en régime torrentiel ou fluvial.
Qu'observera-t-on pour la hauteur d'eau lorsque le cours d'eau passe entre les piles d'un pont, selon que le régime est fluvial ou torrentiel ?

réponse : 1) $q_V = hL\sqrt{2g(H-h)}$; 2) $h_c = \frac{2H}{3}$; $q_{V\max} = L\sqrt{\frac{8gH^3}{27}}$ 4) l'eau monte entre les piles si le régime est torrentiel, elle descend si le régime est fluvial (observer la Garonne…).

7. Récupérateur d'eau

Le récupérateur d'eau est un cylindre de rayon $R = 55\,\text{cm}$ et de hauteur $H = 2{,}10\,\text{m}$.
On peut fixer sur sa base un robinet de diamètre d. Il en existe avec différents diamètres de sortie.

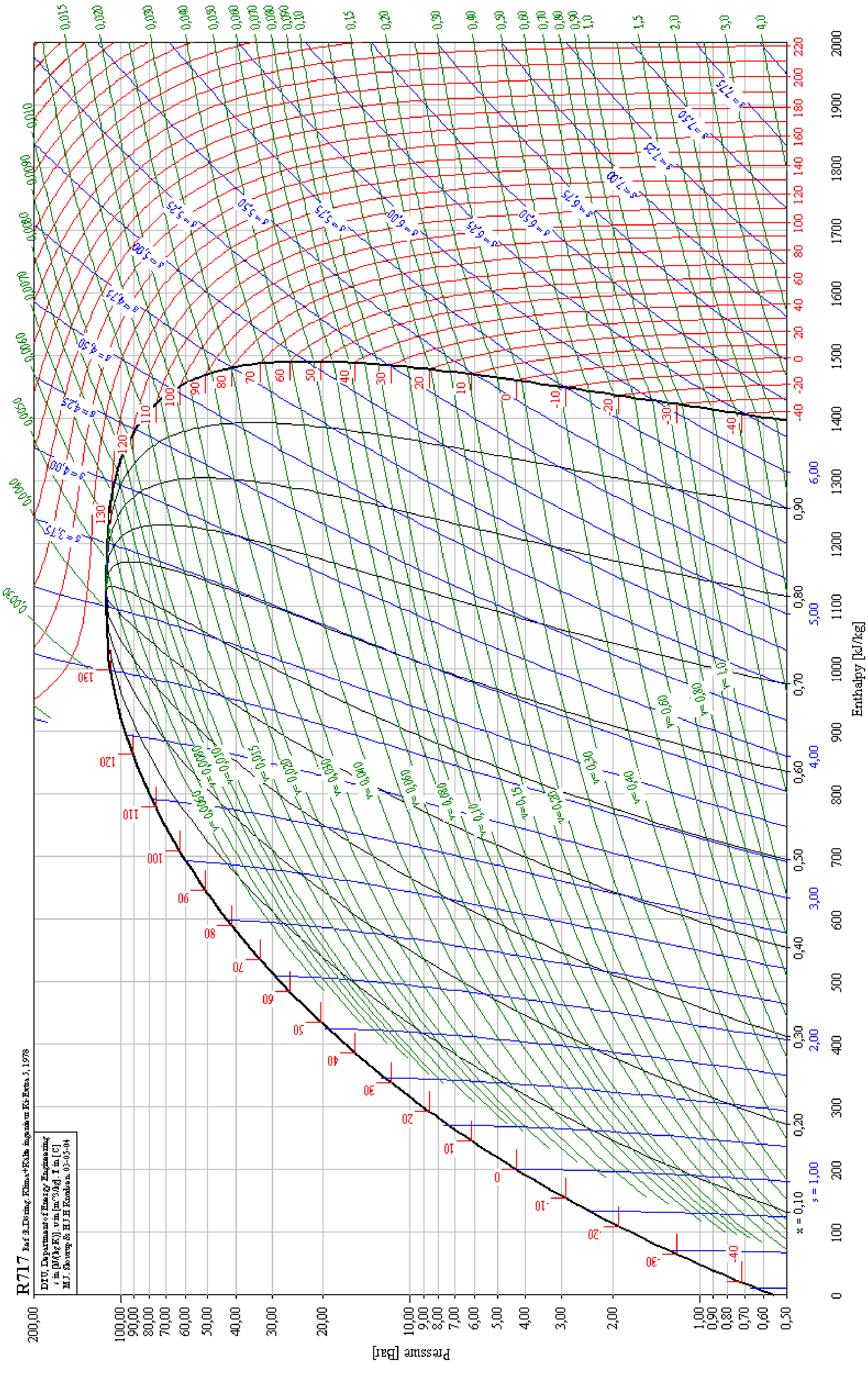


1) Calculer le diamètre minimal de sortie du robinet pour que le remplissage d'un arrosoir de 15 L dure moins de 30 s quand le récupérateur est plein.
2) Calculer le temps de vidange du récupérateur avec ce diamètre de robinet.
3) Quelle devrait être la forme du récipient pour que la hauteur d'eau varie en fonction du temps de façon affine ?

réponse : 1) $d \geq d_{\min} = 9{,}96\,\text{mm}$; 2) $t_{\text{vidange}} = \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\frac{2R}{d}\right)^2 = 2\,\text{h}\,13\,\text{min}$ 3) $R \propto h^{\frac{1}{4}}$.

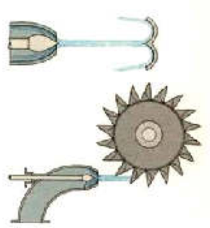
Compétences fondamentales :

- dominer la distinction entre un système ouvert (qui permet de faire des bilans mais pas d'appliquer les principes de la dynamique ni de la thermodynamique) et un système fermé. Savoir définir un volume de contrôle et un système fermé qui y transite entre t et $t + \mathrm{d}t$ et en déduire la variation d'une grandeur extensive x de ce système dans le cas d'écoulements unidirectionnels en entrée et sortie du volume de contrôle.
- connaître et savoir démontrer l'expression du premier et du second principes de la thermodynamique pour un fluide en écoulement.
- connaître la définition d'un fluide parfait, le théorème de Bernoulli pour un écoulement stationnaire incompressible de fluide parfait et ses principales applications (effet Venturi, débitmètre, tube de Pitot).
- connaître les applications des principes, pour un fluide en écoulement, aux machines thermiques, aux pompes et aux tuyères.

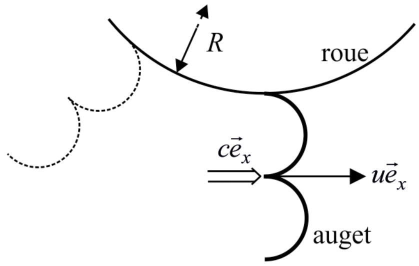

R717
Enthalpy [kJ/kg]
Pressure [Bar]

BILANS DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET DE MOMENT CINÉTIQUE POUR UN ÉCOULEMENT

1. Étude d'une turbine Pelton



La turbine Pelton est constituée par une roue munie d'augets. Un auget Pelton est un double godet avec une cloison au milieu qui dédouble le jet en deux parties identiques. Les deux parties s'écoulent parallèlement au jet incident mais en sens opposé. L'eau, en provenance d'un injecteur, est propulsée sur ces augets et met la roue en mouvement. Dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}$, la vitesse du jet d'eau, est notée $c\vec{e}_x$. On néglige l'effet de la pesanteur sur les jets. Le rayon R du rotor est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler le déplacement des augets, dans $\mathscr{R}$, à une translation suivant l'axe Ox dans la zone d'action du jet. Sous l'action du jet de section $\mathscr{S}$, de l'air et de la force du bâti, l'auget se déplace donc à la vitesse uniforme $u\vec{e}_x$. L'écoulement de l'eau de masse volumique ρ, est supposé incompressible et irrotationnel.



1) Montrer que pendant la durée de passage de l'auget dans le jet, l'écoulement est stationnaire dans le référentiel $\mathscr{R}'$ lié à l'auget et en translation par rapport à $\mathscr{R}$. Donner dans $\mathscr{R}'$ l'expression du débit massique q'_m incident sur un auget.

2) En appliquant le théorème de Bernoulli, montrer que la vitesse d'éjection du fluide dans $\mathscr{R}'$ est opposée à celle du jet incident.

3) En faisant un bilan de quantité de mouvement dans $\mathscr{R}'$, déterminer la force $\vec{F}$ totale exercée par l'air et l'eau sur l'auget.

4) On pose $X = \dfrac{u}{c}$. On se place dans $\mathscr{R}$. On note $\mathrm{d}E_{\text{ce}}$ l'énergie cinétique du jet qui rentre dans un volume de contrôle fixe ; $\mathrm{d}E_{\text{cs}}$ l'énergie cinétique qui en sort. Calculer la puissance $P_{\max}(X)$ que le jet peut potentiellement fournir à l'auget. Le comparer à la puissance $P(X)$ de $\vec{F}$ dans $\mathscr{R}$.

Montrer qu'entre t et $t + \mathrm{d}t$, la puissance perdue l'est du fait du déplacement de l'auget.

5) La roue qui porte les augets étant en rotation, un auget repoussé par le jet est remplacé par un autre auget possédant la même vitesse $u\vec{e}_x$. Un auget donné se déplace très peu pendant qu'il est soumis au jet. Montrer que l'on récupère ainsi la puissance qui serait perdue avec un auget unique. Définir et calculer le rendement $r(X)$ de la turbine. Pour quelle valeur de X ce rendement est-il maximal ? Commenter le résultat obtenu.

6) Le rotor tourne à la vitesse angulaire de 750 tours par minute et la vitesse de sortie du jet vaut $c = 74\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Calculer le rayon R du rotor pour atteindre le rendement maximum. Le résultat est-il réaliste ? Pour un débit de 1500 litres par seconde, calculer la puissance maximale $P_{\max}$. Le rendement réel de la turbine est égal à 0,87. Calculer la puissance réelle P de la turbine. Quelles sont les raisons permettant d'expliquer pourquoi on n'atteint pas le rendement maximum ?

réponse : 1) $q'_m = \rho\mathscr{S}(c-u)$ 3) $\vec{F} = 2\rho\mathscr{S}(c-u)^2\vec{e}_x$ 4) $P_{\max} = \rho\mathscr{S}c^3(3X - 6X^2 + 4X^3) \neq P = \rho\mathscr{S}c^3(2X - 4X^2 + 2X^3)$, la différence $P_{\max} - P$ est la puissance perdue dans jet qui s'allonge de $u\mathrm{d}t$ 5) r max pour $X = \dfrac{1}{2}$ 6) $R = 47\ \mathrm{cm}$; $P_{\max} = 4\mathrm{MW}$.

2. Démarrage d'un rotor de gyroscope

Le rotor d'un gyroscope peut tourner autour d'un axe fixe vertical Δ. On note J_Δ le moment d'inertie du rotor par rapport à Δ. Pour obtenir l'effet gyroscopique, le rotor doit tourner très rapidement autour de son axe. On utilise alors un démarreur à réaction : des réserves de propergol solide situées de part et d'autre de Δ, à une distance a de Δ, sont enflammées et les gaz produits de la combustion sont éjectés par des tuyères de direction orthoradiale par rapport à Δ. Les gaz sont expulsés de chaque côté avec une vitesse relative orthoradiale de norme u par rapport au rotor et un débit massique total $q_{\text{m}} > 0$ supposé constant. On note m_0 la masse initiale de propergol. Les liaisons entre le gyroscope et son support sont supposées parfaites. Le rotor étant initialement immobile, calculer sa vitesse angulaire ω_{f} lorsque la combustion du propergol s'achève dans les deux cas suivants :

1) Le rotor est soumis à un couple résistant de moment constant $\Gamma_\Delta < 0$.

2) Le rotor est soumis à un couple résistant de moment $\Gamma_\Delta = -\lambda\omega$.

réponse : le théorème du moment cinétique fournit $(J_\Delta + ma^2)\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_\Delta + q_\mathrm{m} au$ 1) $\omega_\mathrm{f} = \dfrac{\Gamma_\Delta + q_\mathrm{m} au}{q_\mathrm{m} a^2}\ln\left[\dfrac{J_\Delta + m_0 a^2}{J_\Delta}\right]$

2) $\omega_\mathrm{f} = \dfrac{q_\mathrm{m} au}{\lambda}\left[1 - \left(\dfrac{J_\Delta}{J_\Delta + m_0 a^2}\right)^{\frac{\lambda}{q_\mathrm{m} a^2}}\right]$.

3. Tir vertical d'une fusée

On envoie verticalement et sans vitesse initiale, depuis la surface de la Terre, une fusée de masse initiale totale m_0. Les réacteurs de la fusée expulsent des gaz avec une vitesse $\vec{u}$ par rapport à la fusée ($\vec{u}$ est verticale et possède une norme constante), et un débit massique $q_m > 0$ constant. On note m_c la masse initiale de carburant. On suppose que le champ de pesanteur est uniforme, d'intensité $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. La fusée est repérée par son altitude *z* (prise nulle lorsque la fusée se trouve sur le sol).

1) En faisant un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force de poussée $\vec{\Pi}$ que subit la fusée.
On donne $m_0 = 10000\ \mathrm{kg}$, $m_\mathrm{c} = 8000\ \mathrm{kg}$, $q_m = 125\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ et $u = 2000\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. La fusée décolle-t-elle ?

2) Calculer la vitesse $\dot{z}$ et l'altitude *z* de la fusée à la date *t*. On donne $\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - x$.

3) Calculer l'altitude z_1 et la vitesse v_1 de la fusée à la date t_1 pour laquelle le carburant est totalement brûlé.

4) Calculer l'accélération $\ddot{z}$, la vitesse et l'altitude de la fusée pour $t > t_1$. En déduire la date t_2 à laquelle la fusée retombe sur le sol. On déterminera l'altitude maximale atteinte.

réponse : 1) $\vec{\Pi} = \vec{u}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$; décollage car $\ddot{z}_0 = \dfrac{q_\mathrm{m} u}{m_0} - g > 0$ 2) $\dot{z} = -gt + u\ln\left(\dfrac{m_0}{m_0 - q_\mathrm{m} t}\right)$ et $z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + ut\left[1 + \ln\left(\dfrac{m_0}{m_0 - q_\mathrm{m} t}\right)\right]$ $-\dfrac{um_0}{q_\mathrm{m}}\ln\left(\dfrac{m_0}{m_0 - q_\mathrm{m} t}\right)$ 3) $t_1 = \dfrac{m_\mathrm{c}}{q_\mathrm{m}} = 64\ \mathrm{s}$; $v_1 = 2580\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $z_1 = 56{,}0\ \mathrm{km}$ 4) $t_2 = 601\ \mathrm{s}$; $z_\mathrm{max} = 389\ \mathrm{km}$.

4. Bilan de quantité de mouvement pour un écoulement de Poiseuille

On donne l'expression du champ des vitesses $\vec{v} = v_z(r)\vec{e}_z = \dfrac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2)\vec{e}_z$ de l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité η qui s'écoule dans un tube cylindrique d'axe *Oz*, de rayon *R* et de longueur *L*. On néglige l'action de la pesanteur et on note $\Delta p = p_\mathrm{e} - p_\mathrm{s}$ la différence de pression entre l'entrée du tube ($z = 0$) et la sortie ($z = L$).

1) Calculer directement la force qu'exerce le fluide sur le tube.

2) Retrouver le résultat en supposant uniquement l'écoulement parallèle et incompressible, et en faisant un bilan de quantité de mouvement pour le système ouvert constitué par le tube de longueur *L*.

réponse : 1) et 2) $\vec{F}_\mathrm{v} = \pi\Delta p R^2 \vec{e}_z$.

5. Rendement d'une hélice

On considère un écoulement parfait unidimensionnel, incompressible et stationnaire d'un fluide de masse volumique ρ à travers une hélice, supposée plane, d'axe *Ox*. On néglige dans cette étude l'influence de la pesanteur. On suppose que l'écoulement se fait dans un tube de courant de symétrie de révolution autour de l'axe *Ox* de section droite d'aire variable $\mathscr{S}(x)$, la zone extérieure, de pression uniforme p_0 n'étant pas affectée par le mouvement de l'hélice.

Très en amont de l'hélice, la pression est p_0 et la vitesse du fluide $\vec{v}_1 = v_1\vec{e}_x$ sur la section droite du tube de courant d'aire $\mathscr{S}_1$.
Très en aval de l'hélice, la pression est p_0 et la vitesse du fluide $\vec{v}_2 = v_2\vec{e}_x$ sur la section droite du tube de courant d'aire $\mathscr{S}_2$.
Dans le plan de l'hélice, la vitesse du fluide vaut $\vec{v} = v\vec{e}_x$ et la section droite du tube a une aire $\mathscr{S}$.
L'influence de l'hélice sur l'écoulement est modélisée en faisant intervenir une discontinuité de pression qui passe de p_A à p_B à la traversée du plan de l'hélice.

1) Déduire de la conservation du débit massique q_m deux relations liant les trois aires et les trois vitesses introduites. Justifier que l'on puisse appliquer le théorème de Bernoulli au fluide en amont, puis en aval de l'hélice. En déduire la relation liant p_A, p_B, v_2, v_1 et ρ.

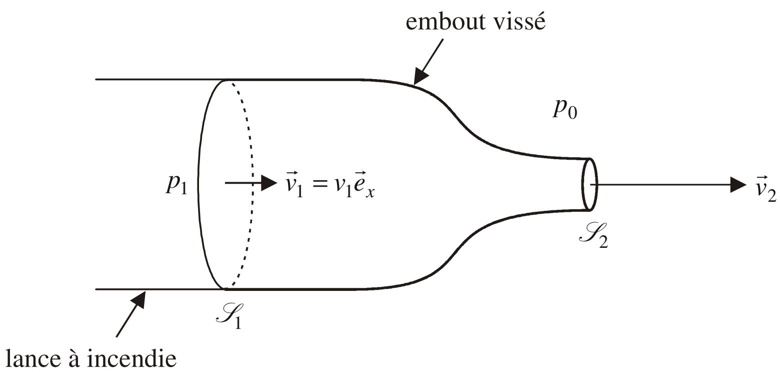
2) En effectuant un bilan de quantité de mouvement au fluide qui transite entre t et $t+\mathrm{d}t$ dans le volume de contrôle constitué par le tube de courant délimité par les sections droites $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$, déduire une première expression de la force $\vec{F}=F\vec{e}_x$ exercée par le fluide sur l'hélice.
En faisant de même entre $x=-\varepsilon$ et $x=\varepsilon$ avec $\varepsilon \to 0$, déduire une deuxième expression de $\vec{F}$. Établir alors les deux relations $v=\dfrac{1}{2}(v_1+v_2)$ et $F=2\rho\mathscr{S}v(v_1-v)$.
3) Déduire de l'étude précédente la puissance P reçue par l'hélice. On pose $v=\lambda v_1$.
Déterminer la valeur λ_F qui rend F maximale et les expressions $F_{\max}$ et P_F correspondantes de la force et de la puissance.
Déterminer la valeur λ_P qui rend P maximale et les expressions F_P et $P_{\max}$ correspondantes de la force et de la puissance.
Tracer les courbes $F(\lambda)$, $P(\lambda)$ et $P(F)$ pour $0\le\lambda\le 1$. Commenter.
4) Le rendement r de l'hélice considérée ici comme une éolienne est défini comme le rapport de la puissance qu'elle reçoit à la puissance que recevrait l'aire $\mathscr{S}$ sous forme cinétique, en l'absence de l'hélice. Donner, en fonction de λ, l'expression du rendement de l'hélice et préciser la valeur du rendement maximal $r_{\max}$.

réponse : 1) $\mathscr{S}_1 v_1=\mathscr{S}_2 v_2=\mathscr{S}v$; $p_A-p_B=\dfrac{1}{2}({v_1}^2-{v_2}^2)$ 2) $F=q_m(v_1-v_2)\overset{\text{aussi}}{=}(p_A-p_B)\mathscr{S}$ 3) $P=2\rho\mathscr{S}v^2(v_1-v)$

4) $r=4\lambda^2(1-\lambda)$ maximal pour $\lambda=\dfrac{2}{3}$; $r_{\max}\approx 0{,}59$.

6. Force exercée sur l'embout d'une lance à incendie

On considère un écoulement supposé parfait d'eau de masse volumique ρ dans une lance à incendie de section $\mathscr{S}_1$ se faisant avec un débit volumique q_V, avec une vitesse uniforme $\vec{v}_1=v_1\vec{e}_x$. On place en extrémité de la veine un embout dont la section de sortie est $\mathscr{S}_2$. La pression extérieure de l'air p_0 est uniforme.



1) Quelle est la pression p_1 nécessaire en amont de l'embout pour obtenir un débit volumique q_V.
2) Calculer la résultante des forces de pression sur l'embout. On l'exprimera en fonction de ρ, q_V, $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ et $\vec{e}_x$. Commenter le cas $\mathscr{S}_2=\mathscr{S}_1$.

réponse : 2) $\vec{F}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho {q_V}^2}{\mathscr{S}_1}\left[\dfrac{\mathscr{S}_1}{\mathscr{S}_2}-1\right]^2\vec{e}_x$.

Compétences fondamentales :

- savoir effectuer un bilan de quantité de mouvement en vue de déterminer des forces exercées par un fluide sur un objet ; connaître la notion de pertes de charges singulières.
- savoir effectuer un bilan de moment cinétique pour trouver des moments exercés par un fluide sur un objet.