

## CCP Maths

### Exercice 1 (Algèbre) :

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  avec  $\dim E = n$ . Le rang de  $u$  est égal à 1.

Montrer l'équivalence suivante :  $u$  est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

### Exercice 2 (Analyse) :

Soit l'équation différentielle (E)  $x(x-1)y' + y = \ln(x)$

- Montrer que (E) admet une unique solution sur  $\mathbb{R}^+^*$  notée  $f$ .
- Montrer l'existence et calculer la valeur de  $I_n = \int_0^1 \ln(x) x^n dx$
- Après avoir justifié son existence, calculer l'intégrale entre 0 et 1 de  $f$ . Indication : la somme des  $1/n^2 = \pi^2/6$

## Mines Maths

### Exercice 1 (Analyse) :

Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \exp(-nx)}{1+n^2}$

- Trouver et justifier l'ensemble de définition de  $f$
- Donner la classe de  $f$ .
- Trouver une équation différentielle dont  $f$  est solution.

### Exercice 2 (Algèbre) :

Soit  $A$  la matrice dans  $M_n(\mathbb{R})$  telle que il n'y ait que des  $a$  partout et que des  $b$  sur la diagonale.

- Calculer les valeurs propres  $A$ .  $A$  est-elle diagonalisable ?
- Dans le cas où  $A$  est inversible, calculer  $A^{-1}$
- Calculer  $A^n$  (sans passer par la matrice diagonale puissance  $n$ )

## Physique Mines

### Exercice 1 :

Soit un proton et un électron tels que le proton est fixe et le neutron a une trajectoire circulaire autour de celui-ci. On utilise le modèle de Bohr et on a alors la norme du moment cinétique constante de valeur  $nh$  avec  $h$  liée à la constante de Planck.

- Montrer que l'énergie mécanique de l'électron est en  $-E/n^2$  avec  $E$  une constante à déterminer.
- Faire l'application numérique. Donner le résultat en electron-volts.
- Commenter le résultat.