OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

● *Lois de Descartes*

1. Réfraction atmosphérique

Dans cet exercice, les angles seront exprimés en degrés.
L'atmosphère terrestre peut en première approximation être assimilée à un ensemble de couches planes et parallèles d'indice optique décroissant avec l'altitude.
On considère un astre qui envoie des rayons faisant un angle i avec la verticale au lieu d'observation.
En partant du sol, les couches successives ont des indices n_0, n_1, n_2 décroissant jusqu'à $n = 1$, indice du vide. Les rayons provenant de l'astre font au sol un rayon i_0 avec la verticale.

1) Écrire la relation entre n_0, i_0, n et i. L'astre est il vu plus « haut » ou plus « bas » dans le ciel par rapport à sa position réelle ?

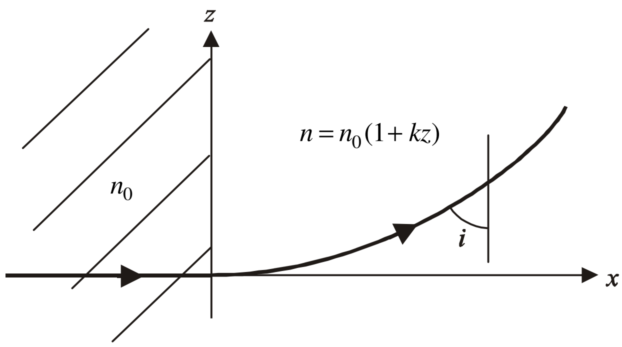
2) On donne $n_0 = 1{,}000279$. De quel angle les rayons sur l'horizon ($i = 90°$) sont-ils déviés ?

3) Le Soleil a un diamètre apparent (hors atmosphère) de $0{,}5°$. Quelle est sa taille angulaire lors de son lever ou de son coucher (son bord inférieur étant alors dans une direction $i = 90°$) ? Commenter la valeur obtenue.

réponse : 1) $n_0 \sin i_0 = n \sin i$ 2) $i - i_0 = 1{,}35°$ 3) $\theta_{app} = 0{,}09°$.

2. Propagation dans un milieu non homogène

Un rayon de lumière se propage initialement horizontalement dans un milieu homogène d'indice n_0 (demi-espace $x < 0$). Il pénètre dans une zone de l'espace ($x > 0$) où l'indice varie d'un point à un autre selon la relation : $n = n_0(1 + kz)$, l'axe Oz étant vertical ascendant. k est une constante.



1) On cherche l'équation du rayon lumineux sous la forme $z(x)$. En déduire une équation différentielle régissant $z(x)$.

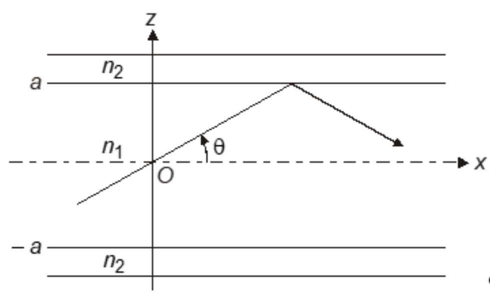
2) Résoudre cette équation différentielle en posant $\mathrm{sh}y = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

réponse : 1) $1 + kz = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}$ 2) $z = \dfrac{1}{k}\left[\mathrm{ch}(kx) - 1\right]$.

3. Étude de fibres optiques

Fibres à saut d'indice

On s'intéresse ici à la propagation de rayons lumineux dans les fibres optiques à saut d'indice. Ces fibres sont constituées d'un cœur cylindrique de rayon a et d'indice n_1 entouré d'une gaine cylindrique coaxiale d'indice n_2 très légèrement inférieur à n_1. On étudie ici la propagation dans un plan de symétrie xOz de la fibre d'axe Ox.



1) En considérant la propagation dans le plan xOz d'un rayon lumineux faisant un angle θ avec l'axe Ox de la fibre, expliquer quel est le phénomène physique à l'origine de la propagation dans le cœur de la fibre optique. Montrer que cette propagation n'est possible que si θ est inférieur à une valeur θ_{max} que l'on déterminera.

2) Montrer que pour une longueur L de fibre, la différence des temps de parcours entre le rayon parcourant le chemin le plus long et le rayon parcourant le chemin le plus court vaut $\Delta\tau \approx \dfrac{n_1 L \varepsilon}{c}$, c étant la vitesse de la lumière dans le vide et $\varepsilon = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1}$.

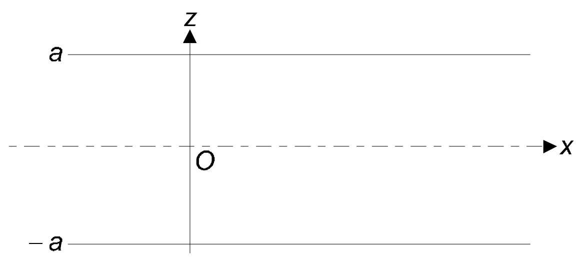
A.N : $L = 1\,\mathrm{km}$; $n_1 = 1{,}46$ (fibre en silice) ; $c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $\varepsilon = 0{,}01$. Calculer $\Delta\tau$.

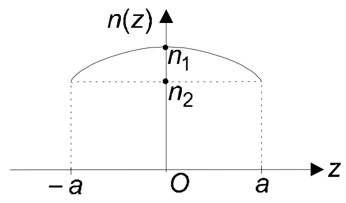
3) Calculer le nombre maximal de bits transmis par seconde pour une longueur de fibre de 1 km.

Fibres à gradient d'indice

On s'intéresse ici à la propagation de rayons lumineux dans les fibres optiques à gradient d'indice. Ces fibres sont constituées d'un cylindre de rayon a formé d'un matériau dont l'indice varie graduellement avec la distance à l'axe du cylindre depuis une valeur n_1 sur l'axe à une valeur n_2 très légèrement inférieure à n_1 sur le bord. On étudie ici la propagation dans un plan de symétrie xOz de la fibre d'axe Ox, où, si Ox est l'axe du cylindre et Oz un axe perpendiculaire, la loi de variation de l'indice est :

$n^2(z) = n_1^2\left[1 - 2\varepsilon\dfrac{z^2}{a^2}\right]$ où $\varepsilon = \dfrac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \dfrac{n_1 - n_2}{n_1}$ de telle sorte que $n(0) = n_1$ et $n(\pm a) = n_2$ très légèrement inférieur à n_1.





4) Quel est le phénomène physique à l'origine du guidage d'un rayon lumineux par un tel milieu ?

5) On considère un rayon lumineux se propageant dans le plan xOz. En utilisant les lois de Descartes et en découpant le milieu en tranches perpendiculaires à l'axe Oz, dont on fera tendre l'épaisseur vers zéro, établir l'équation de la trajectoire d'un rayon lumineux :

$\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \dfrac{n^2(z) - \alpha^2}{\alpha^2}$, où α est une constante positive, paramètre caractéristique de la trajectoire considérée.

6) Montrer que le rayon est guidé par la fibre si le paramètre α de la trajectoire considérée est tel que $n_2 \le \alpha \le n_1$.

7) Montrer qu'en prenant $z(0) = 0$, on a $z = A\sin(Kx)$ (on pourra dériver par rapport à x l'équation différentielle du 1.2 b) afin d'obtenir une équation différentielle linéaire).

Exprimer K et A en fonction de n_1, ε, α et a.

8) Montrer que le temps mis par la lumière pour parcourir un quart de période spatiale de la trajectoire d'un rayon guidé de paramètre α est $t_{1/4} = \dfrac{\pi a}{4n_1 c\sqrt{2\varepsilon}}\left(n_1^2 + \alpha^2\right)$.

9) En déduire le temps τ mis par la lumière pour parcourir une distance L de la fibre sur un rayon lumineux de paramètre α.

10) Montrer que la différence des temps de parcours entre le rayon parcourant le chemin le plus long et le rayon parcourant le chemin le plus court vaut $\Delta\tau \approx \dfrac{n_1 L\varepsilon^2}{2c}$.

A.N : $L = 1\,\text{km}$; $n_1 = 1{,}46$ (fibre en silice) ; $c = 3\cdot 10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\varepsilon = 0{,}01$.

Calculer $\Delta\tau$. Quelle est l'origine de la différence entre les valeurs de $\Delta\tau$ pour les fibres à saut d'indice et les fibres à gradient d'indice étudiées dans l'exercice précédent ?

11) Calculer le nombre maximal de bits transmis par seconde pour une longueur de fibre de 1 km.

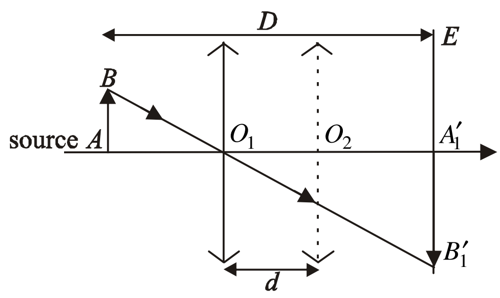
réponse : 1) $\theta < \theta_{max} = \arccos\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)$ 2) $\Delta\tau = \dfrac{n_1}{c}L\left(\dfrac{1}{\cos\theta_{max}} - 1\right)$ 7) $K = \dfrac{n_1}{\alpha a}\sqrt{2\varepsilon}$, $A = \dfrac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{\dfrac{n_1^2 - \alpha^2}{n_1^2}}$ 9) $\tau = \dfrac{L}{2c\alpha}\left(n_1^2 + \alpha^2\right)$

10) $\Delta\tau \approx \dfrac{n_1 L\varepsilon^2}{2c}$ 11) $N = 4{,}11\,\text{Gbits}\cdot\text{s}^{-1}$.

• *Systèmes optiques*

4. Focométrie

1) Autocollimation : un objet transverse AB est placé à gauche d'une lentille mince L convergente. Un miroir plan M, parallèle au plan de la lentille, est placé à droite de L. Montrer qu'il existe une position particulière de A pour laquelle l'image $A'B'$ donnée par le système catadioptrique {lentille L, miroir plan M} se trouve dans le même plan de front que AB. Préciser cette position et la nature complète de AB. En déduire une méthode de mesure de la distance focale de L.



2) Méthode de Bessel : un écran E est placé à une distance D d'un objet AB. On place une lentille mince convergente entre l'objet et l'écran. Montrer que si D est suffisamment grande, on obtient une image nette sur l'écran pour deux positions O_1 et O_2 de la lentille, distantes de $d = \overline{O_1O_2}$ et symétriques par rapport au milieu de la distance objet-écran. Quelle relation il y a-t-il alors entre la distance focale f' de la lentille, D et d ? En déduire une méthode de mesure de la distance focale de L.

réponse : 1) $A \equiv F$, $\gamma = -1$ 2) Il faut $D > 4f'$, alors $f' = \dfrac{D^2 - d^2}{4D}$.

5. L'œil

On modélise l'œil en assimilant le cristallin à une lentille mince permettant de former une image sur la rétine.
Lorsque les muscles susceptibles de bomber le cristallin sont au repos (on dit qu'il n'y a pas accommodation), l'œil voit nettement des objets situés au *punctum remotum* P_R . Lorsque les muscles bombent au maximum le cristallin, l'œil voit nettement des objets situés au *punctum proximum* P_P .

1) Pour un œil normal (emmétrope), la distance entre le cristallin et la rétine, supposée invariable, vaut $d' = 16{,}7$ mm ; P_R se trouve à l'infini, et P_P à 25 cm en avant de l'œil. Calculer la vergence de l'œil au repos, puis de l'œil qui observe un objet au P_P . Calculer la différence positive ΔV , appelée amplitude dioptrique, entre ces deux vergences.

2) On considère un œil myope : le cristallin est supposé être identique à celui de l'œil emmétrope, mais la distance entre le cristallin et la rétine vaut $d' = 16{,}8$ mm . Déterminer les positions du P_R et du P_P .
Déterminer la vergence de la lentille mince (verre correcteur) qu'il faut placer à 1 cm de l'œil pour qu'un objet éloigné soit vu nettement sans accommodation. Où se trouve maintenant le P_P ?

3) On considère un œil hypermétrope : le cristallin est supposé être identique à celui de l'œil emmétrope, mais la distance entre le cristallin et la rétine vaut $d' = 16{,}4$ mm . Déterminer les positions du P_R et du P_P . Quelles sont les positions de objets réels pouvant être vus nets par l'œil hypermétrope ? Même question pour les objets virtuels.
Déterminer la vergence de la lentille mince (verre correcteur) qu'il faut placer à 1 cm de l'œil pour qu'un objet éloigné soit vu nettement sans accommodation. Où se trouve maintenant le P_P ?

réponse : 1) $\Delta V = 4\,\delta$ 2) $\overline{OP_R} = -2{,}81$ m , $\overline{OP_P} = -22{,}9$ cm , $V_{\text{lentille}} = -0{,}357\,\delta$ 3) $\overline{OP_R} = +91{,}3$ cm , $\overline{OP_P} = -34{,}2$ cm , $V_{\text{lentille}} = +1{,}08\,\delta$.

6. Lunette de Galilée

On réalise l'association afocale d'un objectif convergent de distance focale $f_1' = 50$ mm et d'un oculaire divergent de distance focale $f_2' = -5$ mm .

1) Représenter le système et déterminer l'encombrement D de l'ensemble.

2) Déterminer pour ce système le grossissement G.

réponse : 1) $D = f_1' + f_2' = 45$ mm 2) $G = -\dfrac{f_1'}{f_2'} = 10$.

7. Téléobjectif

On désire photographier une tour AB haute de 50 m et distante de 2 km.

1) On utilise un objectif standard assimilable à une lentille mince de centre O_1 , de distance focale $f_1' = \overline{O_1F_1'} = 50$ mm . Le point A se trouve sur l'axe optique de la lentille, l'objet AB est perpendiculaire à cet axe. Quelle est la valeur numérique de l'encombrement E_1 de l'objectif, c'est-à-dire de la distance entre l'objectif et la pellicule ? Quelle est la taille de l'image $\overline{A'B'}$ de la tour sur la pellicule ? Si le cliché est pris sur une pellicule de format $24\text{ mm} \times 36\text{ mm}$, quelle sera la taille de la tour sur la photo papier de format $10\text{ cm} \times 15\text{ cm}$?

2) Pour obtenir une image plus grande, on utilise le système formé par une lentille convergente L_1 de distance focale) $f_1' = \overline{O_1F_1'} = 50$ mm suivie d'une lentille divergente L_2 de distance focale $f_2' = \overline{O_2F_2'} = -25$ mm (téléobjectif). La distance entre les centres des deux lentilles est $\overline{O_1O_2} = 31{,}2$ mm . Soit $\overline{A'B'}$ l'image de $\overline{AB}$ par L_1 : préciser la position de $\overline{A'B'}$ par rapport à O_2 et indiquer la nature de $\overline{A'B'}$ pour la lentille L_2 . Faire la construction géométrique donnant l'image $\overline{A''B''}$ de la tour à travers le système des deux lentilles.
Déterminer la position de $\overline{A''B''}$ par rapport à O_2 , puis la taille de cette image. Représenter à l'échelle les photos prises avec l'objectif standard du a) et au téléobjectif. Évaluer l'encombrement E_2 du téléobjectif.

3) Quelle serait la distance focale f_3' d'une lentille convergente unique L_3 qui donnerait de la tour la même taille d'image $\overline{A''B''}$ que le téléobjectif ? Comparer son encombrement E_3 à E_2 et conclure.

réponse : 1) $\overline{A'B'} = \gamma_1 \overline{AB} = -1{,}25 \text{ mm}$ 2) $\overline{A''B''} = \gamma_2 \overline{A'B'} = -5{,}04 \text{ mm}$ 3) $f_3' = \overline{O_3A'} = \gamma_3 \overline{O_3A} = 201{,}5 \text{ mm}$.

8. Objectif de photocopieur

Les procédés de reprographie nécessitent la formation de l'image du document sur une surface photosensible par l'intermédiaire d'un objectif de reproduction. On désire reproduire un document de format A4 soit en A4 (même format), en A3 (format double en surface) ou en A5 (format moitié en surface). On réalise ces différents tirages à l'aide d'un objectif en modifiant la position respective des lentilles à l'intérieur du système.
La distance entre le document et le récepteur photosensible est de 384 mm et l'on positionne une première lentille mince divergente L_1, de distance focale image $f_1' = -90 \text{ mm}$ à 180 mm du récepteur.

1) La lentille L_1 peut-elle donner une image du document sur le récepteur ? Justifier la réponse.

On ajoute alors une lentille mince L' devant la lentille L_1, à 180 mm du document. La lentille L' peut-elle être divergente ? Justifier la réponse.

Calculer la distance focale image f' de cette lentille L' pour obtenir une image réelle du document sur le récepteur.

En déduire le grandissement γ_1 de l'association des deux lentilles et indiquer quel type de tirage permettra cet objectif : transformation de A4 en A3 ou de A4 en A5.

2) En fait la lentille L' est constituée de deux lentilles accolées L_2 et L_3, L_2 étant identique à L_1.

Calculer la distance focale image f_3' de la lentille L_3. Quelle est la nature de cette lentille mince ?

On glisse alors la lentille L_3 afin de l'accoler à L_1, Montrer que l'image du document reste sur le récepteur et calculer le grandissement γ_2 correspondant à l'association de ces trois lentilles. En déduire le type de tirage obtenu.

réponse : 1) $f' = 57{,}3 \text{ mm}$; $\gamma_1 \approx -\sqrt{2} \Rightarrow$ A4 en A3 2) $f_3' = 35{,}0 \text{ mm}$; $\gamma_2 \approx -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ A4 en A5.

Compétences fondamentales :

- connaître les lois de la réflexion et de la transmission de Snell-Descartes pour une onde à l'interface entre deux milieux transparents ; la condition de réflexion totale.
- savoir trouver l'image d'un rayon puis d'un objet par un miroir plan.
- connaître les conditions de Gauss, les définitions de stigmatisme approché et d'aplanétisme approché pour un système optique centré, la notion d'image réelle ou virtuelle, de foyers, de grandissement transversal et angulaire.
- connaître la définition d'une lentille mince, de son centre optique, connaître la formule de conjugaison de Descartes. Savoir tracer l'image d'un rayon quelconque par une lentille convergente ou divergente à l'aide de foyers objet ou image secondaires.