DIFFÉRENTIELLES ET FORMES DIFFÉRENTIELLES

1. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1.1 Dérivées partielles

On raisonne sur une fonction *f* de deux variables réelles : $(x,y) \overset{f}{\mapsto} f(x,y)$, à valeurs réelles, de classe C^1.

On note $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ la dérivée de la fonction *f* par rapport à la variable *x*, les autres variables (ici *y*) étant fixées.

On note simplement $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ cette dérivée partielle lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

En thermodynamique, une fonction d'état d'un corps pur sous une seule phase, comme l'entropie *S*, peut être décrite comme une fonction de deux variables : la température *T* et la pression *p*, mais également comme une fonction de *T* et du volume *V*. Dès lors, il faut absolument distinguer les dérivées partielles $\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_p$ et $\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_V$, qui sont *a priori* différentes.

1.2 Théorème de Schwarz

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est encore une fonction de deux variables, qui peut elle-même être dérivée par rapport à *x* et à *y* si elle est de classe C^1. On peut donc former $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$.

De même, si $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est de classe C^1, on peut former $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe C^1, *f* est de classe C^2 et le *théorème de Schwarz* s'applique :

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, soit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$: peu importe l'ordre des dérivations.

Par exemple : $(x,y) \overset{f}{\mapsto} x^2 \ln(y)$ est de classe C^2 sur son domaine de définition. On calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\ln(y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2}{y}$. On a bien $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{2x}{y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$.

2. DIFFÉRENTIELLES

2.1 Fonction d'une seule variable

La fonction f : $x \overset{f}{\mapsto} f(x)$ étant suffisamment régulière, elle admet au voisinage de x un développement de Taylor : $f(x+\delta x) = f(x) + \delta x \cdot f'(x) + \frac{(\delta x)^2}{2!} \cdot f''(x) + O\left[(\delta x)^3\right]$.

Intéressons-nous à la différence $f(x+\delta x) - f(x)$, quand δx est très petit :

$f(x+\delta x) - f(x) = \delta x \cdot f'(x) + \frac{(\delta x)^2}{2!} \cdot f''(x) + O\left[(\delta x)^3\right]$. D'où

$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x) + \frac{\delta x}{2!} \cdot f''(x) + O\left[(\delta x)^2\right]$.

On note dx un accroissement δx *infiniment petit* :

$\frac{f(x+\mathrm{d}x) - f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x)$, ce qu'on écrit sous la forme :

$f(x+\mathrm{d}x) - f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$.

> La différence $\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$ est appelée ***différentielle*** de *f* en *x*.
>
> On a $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$ pour une fonction d'une seule variable.

Ceci fait tout l'intérêt de la notation de Leibniz : $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

$\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$ est la variation infinitésimale de *f* au voisinage de *x*, due à une variation infinitésimale d*x* de *x*.

Remarquons que contrairement au cas d'un accroissement fini δx, il n'y a pas de termes en $(\mathrm{d}x)^2$, $(\mathrm{d}x)^3$, dans d*f*. Ceci n'est pas une approximation car :

$A\mathrm{d}x + B(\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}x\left[A + B\mathrm{d}x\right] = \mathrm{d}x \cdot \lim\limits_{\delta x \to 0}\left[A + B\delta x\right] = A\mathrm{d}x$.

> Un infiniment petit du premier ordre $\mathrm{d}x$ est infiniment plus grand qu'un infiniment petit du second ordre $(\mathrm{d}x)^2$. Des termes en $(\mathrm{d}x)^2$ n'interviennent que s'il n'y a pas de termes en $\mathrm{d}x$ ($A = 0$).

Pour le calcul de différentielles, on utilise souvent les dérivations composées.

Si $x \overset{F}{\mapsto} F(x) = f\left[g(x)\right]$ alors $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \mathrm{d}F = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$. On retrouve la formule de dérivation $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

Par exemple, si $F(x) = \exp(2\sqrt{x}) = \exp\left[g(x)\right] = f\left[g(x)\right]$, avec $g(x) = 2\sqrt{x}$, on a

$\mathrm{d}F = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \exp\left[g(x)\right] \cdot g'(x) \cdot \mathrm{d}x = \frac{\exp(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

2.2 Fonction de plusieurs variables

On raisonne sur une fonction *f* de deux variables réelles : $(x,y)\overset{f}{\mapsto}f(x,y)$, de classe C^2, à valeurs réelles.

La fonction *f* étant suffisamment régulière, elle admet au voisinage de (*x*,*y*) un développement de Taylor à l'ordre 2 (à des termes d'ordre 3 près, comme $(\delta x)^3$ ou $\delta x(\delta y)^2$) :

$$f(x+\delta x,y+\delta y)=f(x,y)+\delta x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\delta y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2!}\left[(\delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\delta x\cdot\delta y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(\delta y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right],$$

En notant d*x* et d*y* les infiniment petits d'ordre 1, on a :

$$\mathrm{d}f=f(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)-f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$, ***différentielle*** de *f* en (*x*,*y*).

$\mathrm{d}f=f(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)-f(x,y)$ est la variation infinitésimale de *f* au voisinage de (x,y), due à une variation infinitésimale d*x* de *x* et d*y* de *y*.

Par exemple, si *f* : $(x,y)\overset{f}{\mapsto}x^2\ln(y)$, on a :

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=2x\ln(y)\mathrm{d}x+\frac{x^2}{y}\mathrm{d}y.$$

2.3 Intégration

Pour une fonction d'une seule variable, découpons l'intervalle $[a,b]$ en *N* intervalles de longueur $\delta x=\frac{b-a}{N}$. Cette longueur devient infiniment petite quand $\delta x\to 0\Leftrightarrow N\to\infty$. Elle est alors notée d*x*. On a donc :

$$\int_{x=a}^{x=b}\mathrm{d}f=\int_{x=a}^{x=b}[f(x+\mathrm{d}x)-f(x)]=\lim_{\delta x\to 0}\left[\sum_{i=1}^{N=\frac{b-a}{\delta x}}[f(a+i\delta x)-f(a+(i-1)\delta x)]\right].$$

La somme discrète intervenant ici se simplifie :

$$\sum_{i=1}^{N=\frac{b-a}{\delta x}}[f(a+i\delta x)-f(a+(i-1)\delta x)]=f(b)\underbrace{-f(b-\delta x)+f(b-\delta x)}_{0}\underbrace{-f(b-2\delta x)+f(b-2\delta x)}_{0}-\ldots$$

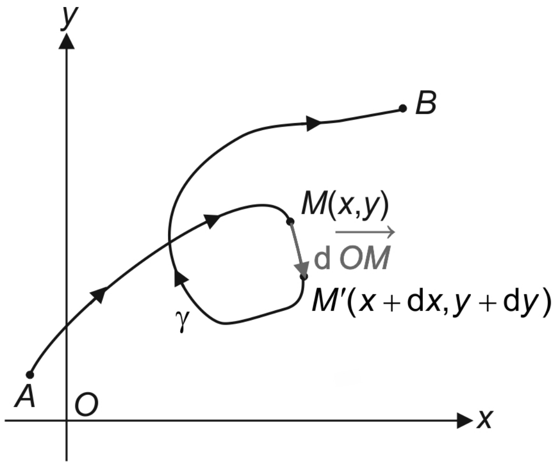
$$\ldots\underbrace{-f(a+\delta x)+f(a+\delta x)}_{0}-f(a)$$

$$=f(b)-f(a)$$

Ce résultat est bien traduit par la notation de Leibniz :

$$\int_{x=a}^{x=b}\mathrm{d}f=\int_{x=a}^{x=b}f'(x)\mathrm{d}x=[f(x)]_a^b=f(b)-f(a)$$

Pour une fonction de deux variables, $\int_{A(x_A,y_A)}^{B(x_B,y_B)} \mathrm{d}f$ prend le sens suivant : on somme, le long d'un chemin γ menant de A à B, les différences $\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y)$ entre des points M et M' de coordonnées respectives (x,y) et $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$.



Comme pour le cas d'une fonction d'une seule variable :

$\int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A) = f(x_B, y_B) - f(x_A, y_A)$, résultat ne dépendant que des points A et B, et pas des points intermédiaires.

> La somme continue $\int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$ ne dépend pas du chemin γ suivi pour aller de A à B.

3. FORMES DIFFÉRENTIELLES

3.1 Définition

> Pour un système décrit par deux variables x et y, une ***forme différentielle*** s'écrit $\delta W = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$.

Attention : malgré la notation qui est la même que celle d'un accroissement fini, δW désigne bien une grandeur infinitésimale.

Par exemple, dans un champ de force $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{e}_x + Q(x,y)\vec{e}_y$, le travail reçu par une particule se déplaçant de $M(x,y)$ à $M'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$ vaut :

$\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$.

C'est un travail *élémentaire*, ou *infinitésimal*, défini pour un déplacement élémentaire

$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y$ de la particule, se produisant entre les dates t et $t + \mathrm{d}t$.

Une forme différentielle est donc définie pour une *transformation infinitésimale* correspondant à une variation dx de x et dy de y au voisinage de (x, y).

Lorsqu'on somme les formes différentielles δW le long d'un chemin γ entre deux points A et B, on obtient la grandeur $W^{\gamma}_{A\to B}$ (par exemple, le travail de la force s'exerçant sur la particule qui se déplace entre A et B le long de γ).

La grandeur $W^{\gamma}_{A\to B} = \int_A^B \delta W$ dépend *a priori* du chemin γ suivi entre A et B.

3.2 Théorème de Poincaré

À quelle condition $W^{\gamma}_{A\to B}$ ne dépend-il que de A et de B et pas de γ ?

Autrement dit : à quelle condition existe-t-il une fonction f : $(x,y) \overset{f}{\mapsto} f(x,y)$, telle que $W^{\gamma}_{A\to B} = f(B) - f(A)$?

Pour un déplacement élémentaire la relation précédente s'écrit :
$\delta W = f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y)$, soit $\delta W = \mathrm{d}f$.

On cherche donc la condition pour qu'il existe une fonction f telle que :

$$\delta W = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Si c'est le cas, on identifie $\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ Q(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$ et d'après le théorème de Schwarz on a nécessairement $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

La réciproque n'est pas toujours vraie (elle l'est à certaines conditions sur le domaine des valeurs prises par x et y, conditions généralement vérifiées en Physique).

Retenons l'implication suivante (théorème de Poincaré) :

$$\exists f : (x,y) \overset{f}{\mapsto} f(x,y) \,/\, \delta W = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}f \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Prenons des exemples :

(i) La forme différentielle $\delta W = y\mathrm{d}x$ n'est pas une différentielle puisque :

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. En conséquence $W^{\gamma}_{A \to B}$ dépend du chemin γ.

(ii) La forme différentielle $\delta W = 2x\sin(y)\mathrm{d}x + \left[x^2\cos(y) - 1\right]\mathrm{d}y$ peut être une différentielle puisque $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos(y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Cherchons donc s'il existe une fonction *f*(*x*,*y*) telle que $\delta W = \mathrm{d}f$. On identifie pour cela les dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos(y) - 1 \end{cases}.$$

On intègre alors une quelconque de ces deux relations, par exemple la première : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(y) \Rightarrow f(x,y) = x^2\sin(y) + \varphi(y)$.

Attention ! On a intégré à *y* constant, donc φ *n'est pas une constante*, mais n'importe quelle fonction de *y* à ce stade. En effet, la dérivée de $y \overset{\varphi}{\mapsto} \varphi(y)$ par rapport à *x* donne bien 0.

En reportant $f(x,y) = x^2\sin(y) + \varphi(y)$ dans la deuxième relation, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos(y) + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} \underset{\text{aussi}}{=} x^2\cos(y) - 1 \Rightarrow \varphi(y) = -y + Cte.$$

Finalement, on a bien $\delta W = \mathrm{d}f$ avec $f(x,y) = x^2\sin(y) - y + Cte$.

Revenons sur les différentes notations :

Pour une transformation infinitésimale, on note δW une forme différentielle et d*f* une différentielle.

Pour une transformation finie (intégrale), on note $W^{\gamma}_{A \to B} = \int_A^B \delta W$, ou simplement *W* s'il n'y a pas d'ambiguïté, et $\Delta f = \int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$.

Par exemple, on écrit souvent le premier principe de la thermodynamique sous la forme $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$ pour une transformation infinitésimale, et $\Delta U = W + Q$ pour une transformation finie.

4. APPLICATIONS

4.1 Fonctions implicites

Considérons trois variables *x*, *y* et *z* liées par une relation $f(x,y,z) = 0$ (*), par exemple

$f(x,y,z) = yx^3 + z\ln(x) + 1 = 0$.

x, *y* et *z* ne sont donc pas indépendantes. Si par exemple on fixe les valeurs de *y* et de *z*, *x* ne peut prendre que certaines valeurs, solutions de l'équation $(*)$.

Cependant, on ne peut pas dans cet exemple exprimer analytiquement la fonction $(y,z) \overset{x}{\mapsto} x(y,z)$: *x* est donc une fonction *implicite* de *y* et de *z*.

On peut néanmoins obtenir des relations entre les dérivées partielles. En effet, comme *f* est une constante, on a, en prenant la différentielle de $(*)$:

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \mathrm{d}z = 0.$$

Si l'on maintient *z* constant ($\mathrm{d}z = 0$), on a $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \mathrm{d}y = 0$ à *z* constant. Or $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ à *z* constant est par définition la dérivée partielle par rapport à *x* de la fonction implicite de deux variables $(z,x) \overset{y}{\mapsto} y(z,x)$. On a donc $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}}$.

De même $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}}$, d'où la relation $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}$.

On peut aussi remarquer que $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$

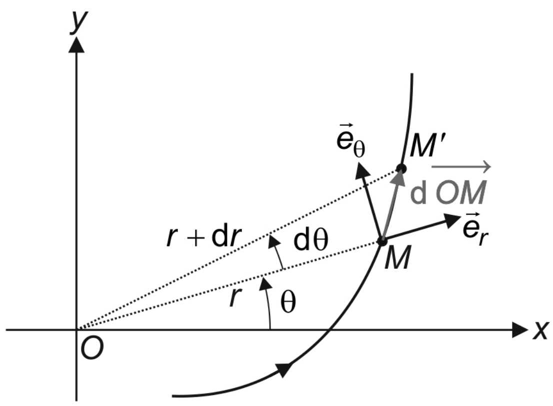
Un certain nombre de résultats peuvent être ainsi démontrés sans avoir à connaître explicitement les fonctions $(x,y) \overset{z}{\mapsto} z(x,y)$, $(y,z) \overset{x}{\mapsto} x(y,z)$ et $(z,x) \overset{y}{\mapsto} y(z,x)$.

4.2 Calculs intégraux

Le calcul de grandeurs finies se ramène souvent au découpage du domaine d'intégration en parties infinitésimales. Prenons quelques exemples.

Exemple 1 : longueur d'une courbe dont on connaît l'équation polaire $r(\theta)$

On découpe la courbe en segments élémentaires $[MM']$, où *M* a pour coordonnées polaires (r,θ) et M' : $(r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta)$.



Le vecteur position vaut $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ donc on obtient le déplacement élémentaire en prenant la différentielle de $\overrightarrow{OM}$:

$\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$, puisque $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = \vec{e}_\theta$.

La longueur élémentaire vaut :

$\mathrm{d}L = \left\|\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}\right\| = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\| = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2} = \mathrm{d}\theta\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}$, en parcourant la courbe dans le sens des θ croissants afin d'avoir $\mathrm{d}\theta > 0$.

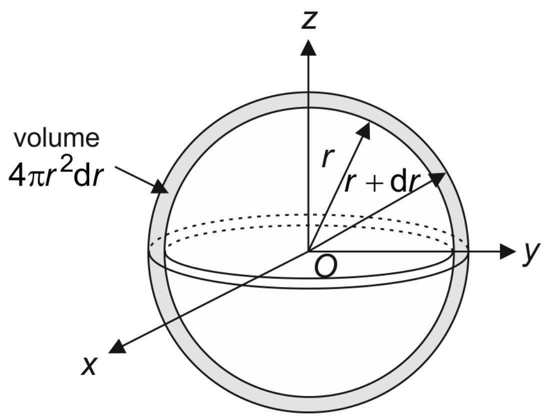
On obtient la longueur de la courbe comprise entre θ_{min} et θ_{max} en calculant une intégrale : $L = \displaystyle\int_{\theta_{\mathrm{min}}}^{\theta_{\mathrm{max}}} \left\|\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}\right\| = \int_{\theta_{\mathrm{min}}}^{\theta_{\mathrm{max}}} \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$.

Exemple 2 : charge d'une sphère

Une sphère de rayon R possède une densité volumique de charges connue $\rho(r)$ qui ne dépend pas des coordonnées sphériques θ et φ : on a *symétrie sphérique* (invariance du système par toute rotation autour du centre O de la sphère).

Si ρ était uniforme, on pourrait calculer la charge Q de la sphère en multipliant son volume par ρ, mais ce n'est pas le cas. On doit donc découper la sphère de façon à ce que $\rho(r)$ reste constant sur un volume élémentaire : on peut prendre le volume compris entre deux sphères de centre O, et de rayons r et $r + \mathrm{d}r$.

Ce volume vaut $\mathrm{d}\mathscr{V} = \mathscr{V}(r+\mathrm{d}r) - \mathscr{V}(r)$ où $\mathscr{V}(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ est le volume d'une sphère de rayon r. On a donc $\mathrm{d}\mathscr{V} = 4\pi r^2\mathrm{d}r$. On en déduit $Q = \displaystyle\int_{r=0}^{R} \rho(r)4\pi r^2\mathrm{d}r$



Tout l'intérêt des différentielles est le passage à une variation infiniment petite. Si le rayon de la sphère subissait un accroissement fini, on aurait :

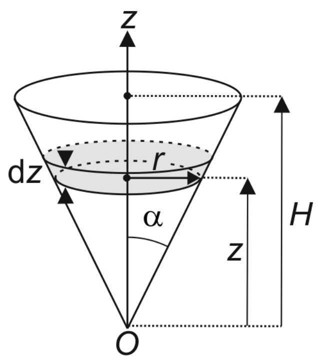
$$\delta\mathscr{V} = \mathscr{V}(r+\delta r) - \mathscr{V}(r) = \frac{4}{3}\pi\left[(r+\delta r)^3 - r^3\right] = \frac{4}{3}\pi\left[3r^2\delta r + 3r(\delta r)^2 + (\delta r)^3\right] \neq 4\pi r^2 \delta r\ .$$

En revanche, pour une variation infinitésimale dr de r, $\mathrm{d}\mathscr{V} = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ est une relation exacte (comme on l'a vu, un infiniment petit d'ordre 2 « n'existe pas » devant un infiniment petit d'ordre 1).

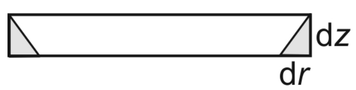
Exemple 3 : volume d'un cône

On peut calculer le volume d'un cône de sommet O, d'axe Oz, de hauteur H et de demi-angle au sommet α en le découpant en tranches infinitésimales de hauteur dz.

Le volume d'une telle tranche se confond avec celui d'un cylindre circulaire de hauteur dz et de rayon r, soit $\mathrm{d}\mathscr{V} = \pi r^2 \mathrm{d}z$.



Là encore, ce qui ne serait qu'une approximation pour un accroissement petit δz devient rigoureux pour dz infiniment petit. En effet la différence de volume entre le cylindre et le cône de hauteur dz est de l'ordre de $r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$, donc c'est un infiniment petit d'ordre 2 en dz puisque $r = z\tan\alpha$.



Finalement, le volume du cône est :

$$\mathscr{V} = \int_{z=0}^{H} \pi r^2 \mathrm{d}z = \int_{z=0}^{H} \pi \tan^2\alpha \cdot z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{3}\pi \tan^2\alpha \cdot H^3.$$

Exemple 4 : énergie reçue par un conducteur ohmique

Un conducteur ohmique de résistance R parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ reçoit une puissance instantanée $p(t) = Ri^2(t)$.

On passe d'une puissance moyenne $P = \dfrac{W}{\Delta t}$, où W est le travail reçu pendant la durée Δt, à une puissance instantanée, en considérant une durée infiniment petite dt au voisinage de l'instant t.

Pendant cette durée dt, le conducteur reçoit un travail élémentaire δW (attention : c'est une forme différentielle et pas une différentielle).

La puissance instantanée est donc définie par $p(t) = \dfrac{\delta W}{\mathrm{d}t}$. *Ce n'est pas une dérivée* puisque W n'est pas une fonction du temps (parler du « travail à la date t » n'a aucun sens ; c'est le travail δW reçu entre t et $t + \mathrm{d}t$ qui en a un).

Pour calculer le travail reçu par le conducteur entre t_1 et t_2 il suffit donc de calculer une intégrale : $W = \int_{t_1}^{t_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)\mathrm{d}t$.