FORMULAIRE : CHAMPS & OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Gradient

$$\mathrm{d}V = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,V \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$ (définition intrinsèque)

Coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$ sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

Coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$ sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

Coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$ sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

Rotationnel

Théorème de **Stokes** : $\displaystyle\oint_\gamma \vec{A}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \iint_{\mathscr{S}(\gamma)} \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A}\cdot \mathrm{d}^2\mathscr{S}$ (définition intrinsèque)

Coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$ sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

Coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left[rA_\theta\right] - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] \end{pmatrix}$ sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

Coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left[A_\varphi \sin\theta\right] - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right] \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[rA_\varphi\right] \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left[rA_\theta\right] - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] \end{pmatrix}$ sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

Divergence

Théorème de **Green-Ostrogradski** : $\displaystyle \boxed{\oiint_{\mathscr{S}} \vec{A}\cdot \mathbf{d}^2\vec{\mathscr{S}} = \iiint_{\mathscr{V}(\mathscr{S})} \mathbf{div}\vec{A}\ \mathbf{d}^3\mathscr{V}}$ (définition intrinsèque)

Coordonnées cartésiennes : $$\boxed{\mathbf{div}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

Coordonnées cylindriques : $$\mathbf{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rA_r\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques : $$\mathbf{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 A_r\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[A_\theta \sin\theta\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

Laplacien

Laplacien scalaire : $\Delta V = \mathbf{div}\left[\overrightarrow{\mathbf{grad}}V\right]$ (définition intrinsèque)

Coordonnées cartésiennes : $$\boxed{\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}$$

Coordonnées cylindriques : $$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial V}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{ou} \quad \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques : $$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

On peut utiliser $\displaystyle \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right] = \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rV\right]$

Laplacien vectoriel : $\Delta\vec{A} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\left[\mathbf{div}\vec{A}\right] - \overrightarrow{\mathbf{rot}}\left[\overrightarrow{\mathbf{rot}}\ \vec{A}\right]$ (définition intrinsèque)

Coordonnées cartésiennes : $$\Delta\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z).$$

Cylindriques et sphériques : **Attention !** $\Delta\vec{A} \neq \begin{pmatrix} \Delta A_r \\ \Delta A_\theta \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$ sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et $\Delta\vec{A} \neq \begin{pmatrix} \Delta A_r \\ \Delta A_\theta \\ \Delta A_\varphi \end{pmatrix}$ sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

On calcule $\Delta\vec{A}$ à partir de la relation de définition intrinsèque. L'expression la plus générale est lourde et très rarement utilisée.

Formules utiles

$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left[\overrightarrow{\mathbf{grad}}V\right] = \vec{0}}$ $\qquad$ $\boxed{\mathbf{div}\left[\overrightarrow{\mathbf{rot}}\ \vec{A}\right] = 0}$

$\mathbf{div}(V\vec{A}) = V\mathbf{div}\vec{A} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}V\cdot\vec{A}$ $\qquad$ $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\ (V\vec{A}) = V\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}\ \vec{A} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}V \wedge \vec{A}$ $\qquad$ $\mathbf{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathbf{rot}}\ \vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathbf{rot}}\ \vec{B}$

$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left[\overrightarrow{\mathbf{rot}}\ \vec{A}\right] = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\left[\mathbf{div}\vec{A}\right] - \Delta\vec{A}}$ (définition intrinsèque du Laplacien vectoriel)