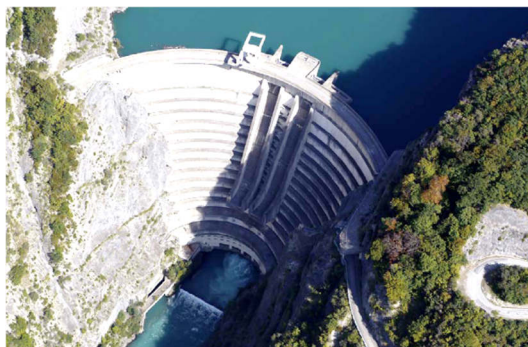


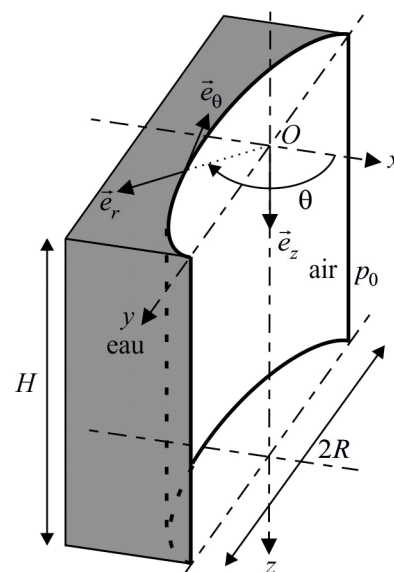
STATIQUE DES FLUIDES

1. Barrage-voûte



Sa forme permet de faire porter une grande partie des efforts de poussée de l'eau sur les flancs de la vallée.

Le barrage est constitué par un demi-cylindre à base circulaire de rayon R , de génératrice verticale. L'eau de masse volumique ρ se trouve du côté opposé à la concavité du barrage ; elle a une hauteur H . La pression de l'air p_0 est uniforme. On note g l'intensité du champ de pesanteur.



- 1) Déterminer la loi de pression $p(z)$ de l'eau, avec Oz verticale descendante, O se trouvant à l'altitude de l'interface eau-air.
- 2) Calculer la force de pression totale s'exerçant sur un élément de surface $d^2\mathcal{S} = R d\theta dz$ du barrage.
- 3) Montrer que la force de pression totale qui s'exerce sur le barrage est portée par l'axe Ox . En déduire l'expression de cette force \vec{F}_p en fonction de ρ , g , R et H .
- 4) Comparer à la force qui s'exercerait sur le barrage s'il était plan, de largeur $2R$.

réponse : 3) $\vec{F}_p = \rho g R H^2 \vec{e}_x$.

2. Équilibre d'une sphère plongée dans un liquide

On considère une sphère de rayon R et de masse volumique ρ partiellement immergée dans un liquide de masse volumique ρ_0 .

On néglige la poussée d'Archimède due à l'air. On pose $\lambda = \frac{\rho}{\rho_0}$ et on suppose $\lambda < 1$.

- 1) Déterminer l'équation régissant la hauteur H de sphère immergée à l'équilibre. A.N : calculer $\xi = \frac{H}{R}$ si $\lambda = 0,5$.
- 2) On perturbe l'équilibre. On repère la position du centre d'inertie de la sphère par rapport à la position d'équilibre par $\varepsilon = z_G - z_{G_{\text{éq}}}$ où l'axe Oz est vertical descendant. Déterminer l'équation différentielle régissant l'infiniment petit ε . Montrer que l'équilibre est stable et calculer la pulsation ω_0 et la période T_0 des petites oscillations si $\lambda = 0,5$ en prenant $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $R = 10 \text{ cm}$.

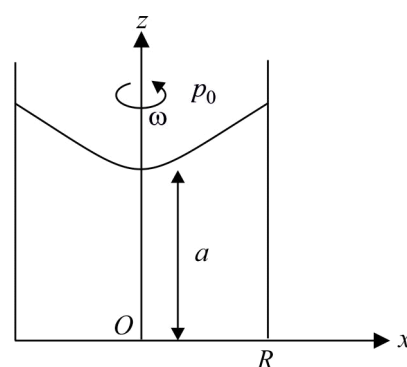
réponse : 1) $\xi^3 - 3\xi^2 + 4\lambda = 0$ 2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{4\lambda R^2} (2 - \xi)}$; $T_0 = 0,16 \text{ s}$.

3. Statique d'un liquide dans un référentiel en rotation uniforme

Un liquide de masse volumique ρ est placé dans un récipient cylindrique. Ce récipient possède un axe Oz de symétrie de révolution : sa section droite est circulaire, de rayon R . Initialement, l'ensemble est au repos dans le référentiel du laboratoire et la hauteur du liquide est H . On pose le récipient sur un plateau tournant à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz . La pression de l'air est p_0 .

- 1) Déterminer la forme de la surface libre du liquide à l'équilibre relatif dans le référentiel $Oxyz$ lié au récipient. On donnera l'équation $z(x)$ de sa trace dans un plan méridien.
- 2) Calculer la hauteur minimale a du liquide (supposée non nulle).

réponse : 1) $z = a + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2$ 2) $a = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$.



4. Fonte de la banquise

- 1) On considère un verre rempli à ras bord d'eau liquide sur laquelle flottent des glaçons. Le verre va-t-il déborder quand les glaçons auront fondu ?
- 2) On entend dire qu'une augmentation de la température moyenne terrestre au cours du siècle va provoquer la fonte de la banquise et l'inondation d'une partie des continents. Est-ce vrai ? Il y a-t-il un danger ?



réponse : 1) pas de changement du niveau de la surface libre.

5. Les hémisphères de Magdebourg

Otto Von Guericke, bourgmestre de Magdebourg, avait joint deux hémisphères métalliques de 28 cm de rayon et réalisé le vide à l'intérieur du dispositif à l'aide d'une pompe à vide de son invention. Lors de la première expérience le 6 mai 1654 devant l'Empereur Ferdinand II à Ratisbonne, deux attelages de 15 chevaux n'ont pas pu séparer les deux hémisphères tant que le vide a été maintenu.

Quelle force aurait-il fallu exercer de chaque côté pour séparer les hémisphères ?

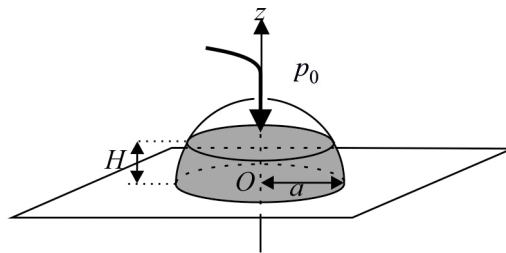


réponse : 25 000 N.

6. Décollage d'une demi-sphère qui se remplit de liquide

Une cloche hémisphérique de masse m et de rayon a est posée sur un plan horizontal. On la remplit par un orifice situé à son sommet d'un liquide de masse volumique ρ . Un joint posé sur sa base empêche le liquide de fuir.

Montrer que pour une certaine hauteur H de liquide versé (que l'on exprimera en fonction de m et de ρ), la cloche se soulève et le liquide fuit. On note p_0 la pression atmosphérique.



réponse : calculer la résultante des forces de pression s'exerçant sur la cloche : $\vec{F} = \frac{1}{3} \pi \rho g H^3 \vec{e}_z$, on en déduit $h = \left[\frac{3m}{\pi \rho} \right]^{\frac{1}{3}}$.

Compétences fondamentales :

- connaître les définitions de libre parcours moyen et d'échelle mésoscopique.
- identifier une force de pression comme étant une action normale à une surface ; utiliser l'équivalent volumique des forces de pression $\vec{\rho} = -\text{grad } p$.
- savoir exprimer la relation fondamentale de la statique dans un référentiel galiléen et en déduire le champ de pression statique dans un fluide : savoir exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans les cas d'un fluide incompressible et de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.
- connaître l'expression de la poussée d'Archimède ainsi que les conditions de validité de cette expression.

DESCRIPTION D'UN FLUIDE EN MOUVEMENT

1. Cyclone

On le modélise par un écoulement d'air incompressible dont on donne dans la base de coordonnées cylindriques le rotationnel

$$\text{du champ des vitesses : } \begin{cases} \text{pour } r < R : \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \overrightarrow{Cte} = \omega_0 \vec{e}_z \\ \text{pour } r > R : \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

- 1) Montrer que la recherche du champ des vitesses est analogue à un problème de magnétostatique. En déduire \vec{v} en tout point.
- 2) Calculer l'accélération \vec{a} d'une particule d'air. Peut-on lier la courbure des lignes de champ au caractère tourbillonnaire d'un fluide ?
- 3) On considère un vortex : $R \rightarrow 0$, $\omega_0 \rightarrow \infty$ avec $2\omega_0\pi R^2 = Cte = \Gamma$. Quel est l'analogue magnétostatique ? Calculer \vec{v} en tout point.

réponse : 1) $\vec{v} = \omega_0 r \vec{e}_\theta$ pour $r \leq R$; $\vec{v} = \omega_0 \frac{R^2}{r} \vec{e}_\theta$ pour $r \geq R$.

2. Écoulement potentiel

On considère un écoulement potentiel : $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ avec $\varphi(x, y, z, t) = \frac{x^2 - y^2}{\tau}$

- 1) Quelle est la dimension de la constante positive τ ?
- 2) Caractériser cet écoulement (est il stationnaire ? incompressible ? irrotationnel ?)
- 3) On considère un vecteur $\vec{u}(t) = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$ reliant deux particules fluides infiniment proches à t . Montrer que $\vec{u}(t+dt) = \vec{u}(t) + [\mathbf{D}]\vec{u}(t)dt$ et donner les composantes de la matrice déformation $[\mathbf{D}]$.
- 4) Déterminer la forme que prend à $t+dt$ un élément de fluide qui est à t un rectangle de côtés parallèles aux axes Ox et Oy de longueurs respectives dx et dy . Comparer les surfaces $d^2\mathcal{S}(t)$ et $d^2\mathcal{S}(t+dt)$. Commenter.
Donner qualitativement la déformation entre t et $t+dt$ d'un rectangle dont les côtés ne sont pas parallèles aux axes Ox et Oy .
- 5) Déterminer puis représenter les trajectoires des particules et les lignes de courant.
- 6) Calculer l'accélération d'une particule fluide.

réponse : 1) $[\tau] = T$ 2) stationnaire, incompressible, irrotationnel 3) $[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\tau} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\tau} \end{bmatrix}$ 4) le rectangle reste un rectangle mais

s'étire selon Ox et se contracte selon Oy ; il garde la même surface (incompressibilité) ; le rectangle de côtés non parallèles aux axes Ox et Oy devient un losange 5) hyperboles d'équation $y = \frac{x_0 y_0}{x}$ 6) $\vec{a} = \frac{4}{\tau^2} \overrightarrow{OM}$.

3. Plan oscillant

Un fluide se trouve dans le demi-espace $z > 0$. Le plan $z = 0$ est en translation sinusoïdale selon la direction du vecteur \vec{e}_x . Le

champ de vitesse dans le fluide est alors $\vec{v}(M, t) = v_0 e^{-kz} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$

- 1) Caractériser cet écoulement (est il stationnaire ? incompressible ? irrotationnel ?)
- 2) Déterminer les trajectoires des particules et les lignes de courant.
- 3) Commenter les conditions aux limites.

réponse : 1) instationnaire incompressible tourbillonnaire 2) à t fixé les lignes de courant sont // à Ox , les trajectoires aussi 3) adhérence à la paroi : fluide réel (visqueux) ; quand $z \rightarrow \infty$ $\vec{v} \rightarrow \vec{0}$ (fluide pas atteint par la perturbation).

4. Sphère de rayon variable dans un fluide incompressible

Une sphère de rayon variable $R(t)$, de centre O est placée dans un fluide incompressible. Un point M du fluide est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans un système d'axes $Oxyz$ lié au référentiel d'étude.

1) Justifier que la vitesse d'une particule fluide s'écrit $\vec{v}(M, t) = v(r, t)\vec{e}_r$,

2) Calculer $v(r, t)$ en fonction de R , \dot{R} et r .

3) Montrer que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ et calculer φ avec la convention $\varphi \rightarrow 0 \quad \forall t$.

4) On suit une particule donnée (description lagrangienne) en M à la date t : $\overrightarrow{OM} = s(t)\vec{e}_r$. Calculer $s(t)$. Retrouver l'expression de \vec{v} et calculer l'accélération \vec{a} .

réponse : 2) $v(r, t) = \frac{R^2}{r^2} \dot{R}$ 3) $\varphi(r, t) = -\frac{R^2}{r} \dot{R}$ 4) $s(t) = (R(t)^3 + Cte)^{\frac{1}{3}}$, $\vec{a} = \left[\frac{R^2}{r^2} \ddot{R} + 2 \frac{R\dot{R}^2}{r^2} - \frac{2R^4\dot{R}^2}{r^5} \right] \vec{e}_r$.

5. Mobile à coussin d'air

Le mobile est un cylindre d'axe Oz vertical de rayon R , dont la base se trouve à une distance h de la table (plan $z = 0$). Il éjecte de l'air vers le bas avec une vitesse donnée en coordonnées cylindriques par l'expression $\vec{v} = v_r(r)\vec{e}_r - v_0\vec{e}_z$ au niveau de la base.

L'écoulement d'air est supposé incompressible. Le champ des vitesses est recherché sous la forme :

$$\vec{v} = v_r(r)\vec{e}_r + v_z(r, z)\vec{e}_z.$$

1) On donne dans le cas étudié $\text{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$. Déterminer $v_r(r)$ et $v_z(r, z)$.

2) L'écoulement est-il tourbillonnaire ? S'il ne l'est pas, calculer le potentiel des vitesses $\varphi(r, z)$.

3) Donner l'équation d'une ligne de courant.

4) donner l'équation horaire de la trajectoire d'une particule d'air : $\begin{cases} r(t) \\ z(t) \end{cases}$

5) Déterminer l'accélération \vec{a} de la particule.

réponse : 1) $v_r(r) = \frac{v_0 r}{2h}$; $v_z(r, z) = -\frac{v_0 z}{h}$ 2) $\varphi(r, z) = \frac{v_0}{4h} [r^2 - 2z^2]$ 3) $z = z_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2$ 4) $\begin{cases} r = r_0 e^{\frac{v_0 t}{2h}} \\ z = z_0 e^{-\frac{v_0 t}{h}} \end{cases}$

5) $\vec{a} = \frac{v_0^2}{4h^2} [r\vec{e}_r + 4z\vec{e}_z]$.

Compétences fondamentales :

- dominer les différentes descriptions lagrangienne et eulérienne du champ des vitesses dans un fluide ; savoir distinguer les définitions d'une ligne de courant et de la trajectoire d'une particule (qui ne sont confondues qu'en régime stationnaire).
- connaître les définitions du vecteur densité de courant de masse $\vec{J}_m = \rho \vec{v}$; connaître et savoir retrouver l'équation locale de conservation de la masse.
- exploiter la conservation du débit massique le long d'un tube de courant en régime stationnaire.
- exploiter la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant pour un fluide incompressible en régime quelconque, ainsi que l'équation locale $\text{div} \vec{v} = 0$.

DYNAMIQUE DES FLUIDES

• Écoulements externes

1. Décollage d'un Airbus A380



1) Calculer sa vitesse au décollage au niveau de la mer, à une température de 20°C, pour une masse de 421 tonnes, une surface portante de 845 m² et un coefficient de portance $C_z = 1,38$.

Calculer la variation relative de cette vitesse due à une variation d'altitude de +2250 m (altitude de Mexico).

Calculer la variation relative de cette vitesse due à une variation de température de +20°C.

Commenter.

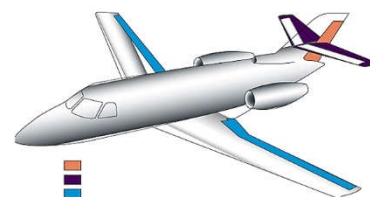
2) Le décollage se fait-il face aux vents dominants, avec le vent arrière, ou de travers ?

Lorsque la vitesse de décollage est atteinte, le pilote actionne la gouverne de profondeur, ce qui provoque la rotation de l'avion (le nez s'élève). Identifier cette gouverne sur le schéma ci-dessous. À quoi servent les autres parties mobiles (tangage ? lacet ? roulis ? Tracer les axes de rotation dans chaque cas.

Que se passe-t-il lorsque l'avion entame sa rotation ?

Des éléments hypersustentateurs (becs au bord d'attaque des ailes, ou volets au bord de fuite) peuvent être orientés vers le haut ou vers le bas. Commenter leur influence lors des phases d'atterrissage et de décollage.

3) La finesse de l'avion est le rapport du coefficient de portance sur celui de traînée Sa valeur maximale est de 22 pour l'A380. Montrer que c'est le rapport de la distance horizontale parcourue sur la perte d'altitude lors d'un vol « plané » (moteurs coupés). Quelle est sa signification dans le digramme paramétrique donnant $C_z(i)$ et fonction de $C_x(i)$ (polaire d'Eiffel) pour différentes incidences ?



réponse : 1) $v = 276 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, altitude : $\Delta v / v = 13\%$, température : $\Delta v / v = 3,4\%$.

2. Écoulement de Stokes autour d'une sphère

On considère l'écoulement stationnaire incompressible à faible nombre de Reynolds ($Re < 1$), uniforme à l'infini (vitesse $\vec{u} = u\vec{e}_z$), autour d'une sphère lisse de rayon R et de centre O . On repère un point M de l'écoulement en coordonnées sphériques.

On néglige l'action de la pesanteur.

1) Simplifier l'expression de la vitesse eulérienne en analysant les symétries du problème.

On montre que le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

$$\begin{cases} v_r = u \cos \theta \left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right] \\ v_\theta = -u \sin \theta \left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right] \end{cases}$$

Montrer que les conditions aux limites du problème sont bien vérifiées, ainsi qu'une des équations locales.

On donne $\text{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 v_r] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [v_\theta \sin \theta] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$ en coordonnées sphériques.

2) On donne la pression $p(r, \theta) = p_0 - \frac{3u\eta R}{2r^2} \cos \theta$ obtenue en prenant $p \rightarrow p_0$ pour $r \rightarrow \infty$. Calculer la résultante \vec{F}_p des actions de pression sur la sphère. Comment faudrait-il modifier ce résultat si l'on tenait compte de la pesanteur ?

3) Le fluide exerce également sur un élément de surface $d^2\mathcal{S}$ de la sphère une force visqueuse :

$d^2\vec{F}_v = \eta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} (r=R) d^2\mathcal{S} \vec{e}_\theta$. Justifier cette expression et calculer \vec{F}_v .

4) En déduire la force de traînée exercée par le fluide sur la sphère. Montrer que l'on obtient bien la formule de Stokes $\vec{F}_t = -6\pi\eta R \vec{u}$ pour une sphère mobile avec \vec{u} dans un fluide au repos à l'infini.

réponse : 2) $\vec{F}_p = 2\pi\eta R \vec{e}_z$ avec la pesanteur, on a un gradient de p dû à \vec{g} et il se rajoute la poussée d'Archimède.

3) $\vec{F}_v = 4\pi\eta R \vec{e}_z$ 4) $\vec{F}_t = 6\pi\eta R \vec{e}_z$ soit $\vec{F}_t = -6\pi\eta R \vec{u}$ si \vec{u} est la vitesse de la sphère.

3. Chute d'une bille

On laisse chuter sans vitesse initiale une bille de masse $m = 0,4 \text{ g}$, de rayon $r = 2,5 \text{ mm}$ dans de la glycérine de masse volumique $\rho = 1300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de viscosité dynamique $\eta = 0,60 \text{ Pl}$. On suppose que la force de traînée qu'exerce la glycérine sur la bille vaut $\vec{F}_t = -6\pi\eta r \vec{v}$, où \vec{v} est le vecteur vitesse de la bille.

On donne l'intensité du champ de pesanteur : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- 1) Déterminer la loi donnant $v(t)$ en projection sur un axe vertical descendant et en déduire la vitesse limite v_{lim} de la bille ainsi que la durée caractéristique τ d'obtention du régime stationnaire. On introduira la masse volumique ρ_0 de la bille. Commenter les valeurs numériques de v_{lim} et de τ .
- 2) Calculer le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement autour de la bille et commenter l'expression utilisée pour la force de traînée. Comment évolue Re avec r ?
- 3) Proposer une méthode pour mesurer η .
- 4) Pourquoi la bille ne doit-elle pas être placée trop près des parois du récipient contenant la glycérine ?

réponse : 1) $v_{\text{lim}} = \frac{2gr^2}{9\eta}(\rho_0 - \rho) = 10,9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$; $\tau = \frac{2\rho_0 r^2}{9\eta} = 14,1 \text{ ms}$ 2) $Re = 1,18$ convenable, marche mieux avec r plus petit (Re en r^3) 3) mesure de v_{lim} en chronométrant les passages de la bille au niveau de graduations régulièrement espacées.

• Écoulements internes

4. Coefficient de pertes de charges linéaires / diagramme de Moody

Dans une conduite circulaire de diamètre D , de rugosité ε et de longueur L s'écoule un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η avec une vitesse débitante u .

- 1) Justifier que la perte de charge Δp entre l'entrée et la sortie de la conduite est proportionnelle à la longueur L , toutes choses égales par ailleurs. On cherche donc une relation de la forme $f\left(\frac{\Delta p}{L}, D, \varepsilon, u, \rho, \eta\right) = 0$.

Pour cela, on cherche à former des coefficients n_i^* sans dimension de la forme $n_i^* = \left(\frac{\Delta p}{L}\right)^\alpha D^{\beta_1} \varepsilon^{\beta_2} u^\gamma \rho^\delta \eta^\lambda$

- 2) Montrer que l'on se ramène à un système linéaire en α , $\beta = \beta_1 + \beta_2$, γ , δ et λ . Il y a-t-il unicité des solutions de ce système ? Montrer que l'on peut se fixer les valeurs de α et β .

- 3) α et β étant supposés connus, résoudre ce système et montrer que $n_i^* = \left(\frac{\Delta p \eta}{L \rho^2 u^3}\right)^\alpha \left(\frac{\rho u D}{\eta}\right)^\beta \left(\frac{\varepsilon}{D}\right)^{\beta_2}$. Combien peut-on former de coefficients sans dimension indépendants ?

- 4) Définir la rugosité relative de la conduite et le nombre de Reynolds de l'écoulement. Identifier à chaque fois les valeurs correspondantes de α , β et β_2 .

- 5) On définit le coefficient de pertes de charges linéaires par $\lambda = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho u^2 \frac{L}{D}}$. Identifier à chaque fois les valeurs correspondantes

de α , β et β_2 . De quels autres nombres sans dimension dépend-il ?

Expliquer la construction du diagramme de Moody.

- 6) Par lecture sur le diagramme de Moody, donner la perte de charge par mètre dans un tube de cuivre de diamètre intérieur de 1 cm , de rugosité relative $5 \cdot 10^{-3}$, pour un débit d'eau de $7,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Commenter.

réponse : 5) $\alpha = 1$, $\beta_2 = 0$ et $\beta = 1$.

5. Écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique

Un fluide visqueux incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité η , s'écoule dans un tube cylindrique d'axe Oz , de rayon R et de longueur L . On néglige l'action de la pesanteur et on suppose que l'écoulement est stationnaire et parallèle à Oz : $\vec{v} = v_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$.

On note $\Delta p = p_e - p_s$ la différence de pression entre l'entrée du tube ($z = 0$) et la sortie ($z = L$).

- 1) Montrer que $\vec{v} = v_z(r) \vec{e}_z$ et $p = p(r, z)$
- 2) Montrer que $v_z(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2)$ et calculer $p(r, z)$.

- 3) Montrer que le débit volumique s'écrit $q_V = A\Delta p$ (loi de Poiseuille). Exprimer A en fonction de R , η et L .
- 4) Calculer la force qu'exerce le fluide sur le tube. Commenter le résultat.
- 5) On applique les résultats précédents afin de déterminer la viscosité dynamique d'un fluide incompressible. Pour cela, on alimente la conduite en plaçant en amont un récipient cylindrique d'axe vertical, de rayon $a \gg R$. L'écoulement est alors quasi-stationnaire. La pression extérieure est uniforme et vaut p_0 .
- Pendant une durée Δt , le fluide passe d'une hauteur H_1 à $H_2 < H_1$. En déduire l'expression de η en justifiant soigneusement les approximations faites.

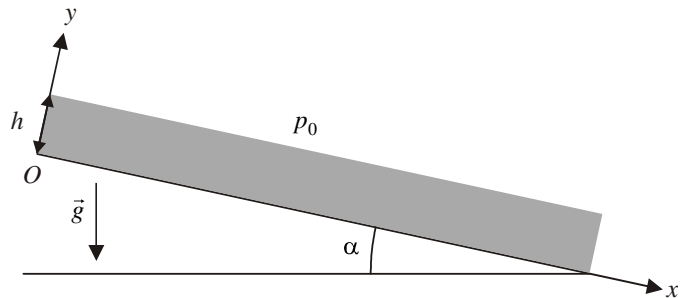
réponse : 2) $p(z) = p_e - \frac{\Delta p}{L}z$ 3) $q_V = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta p$ 4) $\vec{F}_V = \pi\Delta p R^2 \vec{e}_z$ 5) $\eta = \frac{\rho g R^4 \Delta t}{8La^2 \ln\left(\frac{H_1}{H_2}\right)}$.

6. Écoulement sur un plan incliné

On cherche à modéliser l'écoulement de la lave le long des pentes d'un volcan.

On considère pour cela l'écoulement stationnaire d'une fine couche de fluide visqueux de viscosité dynamique η , incompressible, de masse volumique ρ , sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale.

On suppose l'épaisseur h de la couche constante, et l'écoulement parallèle à la ligne de plus grande pente : $\vec{v} = v_x(x, y)\vec{e}_x$. L'air est supposé être un fluide parfait à la pression p_0 .



- 1) Montrer que $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$. Donner les conditions aux limites portant sur $v_x(y)$. On étudiera pour la condition en $y = h$ l'équilibre de la surface libre du fluide.
- 2) En déduire le champ de pression dans le fluide, puis le champ de vitesse. Représenter le profil des vitesses. Calculer v_{\max} .
- 3) Calculer le débit volumique q_V pour une tranche de fluide de largeur L selon Oz .
- 4) Déterminer la contrainte (force par unité de surface) tangentielle exercée par le fluide sur le plan incliné.

réponse : 1) $\frac{\partial v_x}{\partial y}(y = h) = 0$ 2) $p = p_0 - \rho g \cos \alpha (y - h)$ indépendant de x ; $v_x = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} y \left(h - \frac{y}{2} \right)$ 3) $q_V = \frac{\rho g L \sin \alpha h^3}{3\eta}$.

7. Vol des oiseaux

On cherche la loi reliant la vitesse de vol d'un oiseau à sa masse.

Pour cela on fait l'hypothèse d'un vol stationnaire horizontal dans lequel la portance est la force prédominante pour compenser le poids.

- 1) Par analyse dimensionnelle, relier le maître-couple de l'oiseau à sa masse.
- 2) Avec un modèle à expliciter, établir la loi $v(m)$.

réponse : 2) $v \propto m^{\frac{1}{6}}$.

8. Établissement d'un écoulement de Couette à une dimension (régime instationnaire)

On considère un fluide incompressible entre deux plaques horizontales d'équations $y = 0$ et $y = h$. Le fluide de viscosité cinématique ν est au repos pour $t \leq 0$. À $t = 0$, la plaque inférieure est mise en mouvement instantanément avec une vitesse $\vec{u} = u\vec{e}_x$. On suppose que la vitesse en un point du fluide est portée par \vec{e}_x à un instant $t > 0$.

- 1) Montrer que $\vec{v} = v_x(y, t)\vec{e}_x$. En déduire que l'accélération d'une particule fluide peut s'écrire $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial v_x(y, t)}{\partial t} \vec{e}_x$.
- 2) On considère une particule parallélépipédique de côtés dx , dy et dz (et donc de volume $d^3\mathcal{V} = dx dy dz$). Sur quelles faces du parallélépipède s'exercent des forces de viscosité ? En déduire que la résultante de ces forces sur la particule fluide vaut :

$$d^3\vec{F}_V = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} d^3\mathcal{V} \vec{e}_x.$$

3) En appliquant le principe fondamental à la particule fluide, montrer qu'en l'absence de gradient horizontal de pression appliqué, $v_x(y,t)$ est régi par l'équation de diffusion $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial v_x}{\partial t}$ (analogue à l'équation de diffusion thermique ou de particules). En déduire la durée τ caractéristique de l'établissement d'un régime stationnaire. Faire l'application numérique avec $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $h = 10 \text{ cm}$.

4) Montrer que dans le cas $h \rightarrow \infty$, $v_x(y,t) = u[1 - \text{erf}(\xi)]$ avec $\xi = \frac{y}{\sqrt{4\nu t}}$ est solution du problème étudié.

$$\text{On donne } \text{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-X^2} dX \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-X^2} dX = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

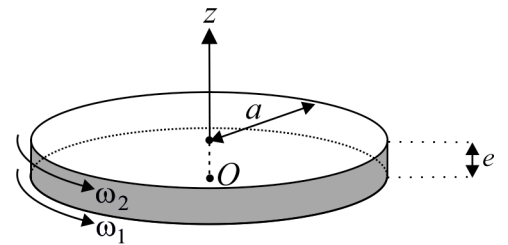
Dans quel intervalle de temps la solution donnée est-elle une bonne approximation si h est fini ?

5) Calculer la contrainte visqueuse subie la plaque inférieure à la date t dans l'approximation précédente. Commenter le cas $t \rightarrow 0$.

réponse : 2) incompressibilité 4) $\vec{\sigma}_v \rightarrow \infty$: impossible de mettre la plaque en mouvement en une durée nulle.

9. Viscosimètre

On considère deux disques de même rayon a en rotation autour de l'axe Oz . Le disque D1 est à la cote $z = 0$ et tourne à la vitesse angulaire ω_1 , le disque D2 est à la cote $z = e \ll a$ et tourne à la vitesse angulaire ω_2 . On néglige les effets de bord en $r = a$. On a placé entre les deux disques un fluide incompressible de viscosité η . Aucun gradient de pression n'est appliqué.



1) Justifier que l'on recherche un champ de vitesse de la forme $\vec{v}(M,t) = r\omega(z,t)\vec{e}_\theta$.

2) La force exercée par une couche de fluide de surface $d\mathcal{S}$ sur celle du dessous est $d\vec{F} = \eta \frac{\partial v}{\partial z} d\mathcal{S} \vec{e}_\theta$. On considère un volume élémentaire de fluide compris entre r et $r + dr$, θ et $\theta + d\theta$, z et $z + dz$. Déterminer les forces s'exerçant sur ce volume.

3) Appliquer le théorème du moment cinétique en projection sur Oz à ce volume, en déduire que $\omega(z,t)$ est solution d'une équation de diffusion.

4) On se place en régime stationnaire. Calculer $\omega(z)$. En déduire le moment du couple qu'exerce le fluide sur D1. Définir et calculer le coefficient de frottement fluide λ entre les deux plaques.

5) On donne pour l'huile de ricin $\rho = 965 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\eta = 1,015 \text{ Pl}$. On donne également $a = 10 \text{ cm}$ et $e = 5 \text{ mm}$, $\omega_1 = \Omega = 10 \text{ tours/min}$ et $\omega_2 = 0$. Vérifier que l'on est bien en régime laminaire. Donner également le temps caractéristique d'établissement du régime stationnaire quand, à partir du repos, ω_1 passe brutalement à Ω .

réponse : 4) $\Gamma = \frac{\pi\eta a^4}{2e} (\omega_2 - \omega_1)$.

Compétences fondamentales :

- savoir définir la viscosité dynamique dans le cas d'un écoulement cisailé du type $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$ d'un fluide newtonien ; connaître quelques ordres de grandeur de η .
- connaître l'interprétation microscopique de la viscosité.
- connaître les conditions aux limites pour un écoulement de fluide visqueux (adhérence aux parois solides).
- interpréter le nombre de Reynolds comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection. Évaluer le nombre de Reynolds et l'utiliser pour caractériser le régime d'écoulement.
- pour les écoulements externes, connaître la notion de couche limite, la définition de la traînée et de la portance, la courbe $C_x = f(Re)$ en échelles logarithmiques.
- pour les écoulements internes, connaître la notion de vitesse débitante, la loi de Hagen-Poiseuille et la notion de résistance hydraulique. Savoir démontrer la loi de Hagen-Poiseuille dans le cas d'une conduite circulaire à bas nombre de Reynolds, et savoir exploiter le diagramme de Moody dans le cas général.

BILANS ÉNERGÉTIQUES ET ENTROPIQUES POUR UN ÉCOULEMENT / FLUIDES PARFAITS

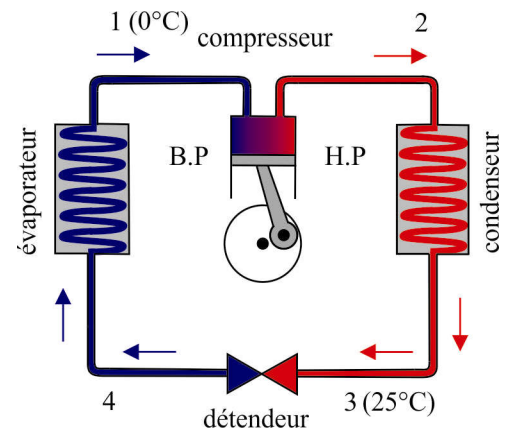
1. Installation frigorifique

L'agent de la transformation est l'ammoniac (réfrigérant R717 dont on donne le diagramme de Mollier en dernière page).

Il subit :

- Une compression isentropique $1 \rightarrow 2$ dans le compresseur.
- Une liquéfaction totale isobare $2 \rightarrow 3$ dans le condenseur. La température de la transition de phase est de 30°C . La température de sortie du liquide est de 25°C (on parle de sous-refroidissement puisque cette température est inférieure à celle de la transition de phase). Le fluide caloporteur fournit alors un transfert thermique massique à la source chaude q_1 .
- Une détente de Joule/Thomson $3 \rightarrow 4$ dans le détendeur.
- une vaporisation totale isobare $4 \rightarrow 1$ dans l'évaporateur. La température de la transition de phase est de -10°C . La température de sortie du liquide est de 0°C (on parle de surchauffe puisque cette température est supérieure à celle de la transition de phase). Il reçoit alors un transfert thermique massique de la source froide q_2

L'installation développe une puissance frigorifique brute de 100 kW.



1) Représenter le cycle dans le diagramme de Mollier. Dresser un tableau des pressions, températures, enthalpies massiques et titres massiques en vapeur x aux différents points du cycle.

2) Quelle est l'expression du premier principe pour un écoulement de fluide ? Indiquer l'intérêt de la surchauffe et du sous-refroidissement.

3) Déterminer :

— le débit massique du fluide.

— la puissance mécanique théorique P_u du compresseur.

— la puissance mécanique réelle. On prendra un rendement mécanique $\eta_m = 0,90$ et un rendement thermodynamique (le cycle décrit est un modèle : il y a notamment des pertes de charge) $\eta_t = 1 - 0,05 \frac{P_{\text{cond.}}}{P_{\text{évap.}}}$ où $p_{\text{cond.}}$ et $p_{\text{évap.}}$ sont respectivement les pressions dans le condenseur et dans l'évaporateur.

— l'efficacité théorique (appelée C.O.P : coefficient de performance) et réelle de l'installation.

— l'efficacité η_C du cycle de Carnot décrit par le fluide dont la température varie entre -10°C et 30°C , ainsi que le rendement

de l'installation, défini par $r = \frac{\text{C.O.P}_{\text{réel}}}{\eta_C}$.

— la puissance à évacuer au condenseur.

réponse : 3) $q_m = 0,087 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, $P_u = 19 \text{ kW}$, $r = 57 \%$.

2. Élévation de la température de la rivière, source froide dans une centrale nucléaire

La centrale délivre une puissance moyenne P de 1 GW. Son rendement thermodynamique s'écrit $\eta = x\eta_{\text{rev}}$, où η_{rev} est le rendement thermodynamique pour un cycle réversible, et $x = 0,6$.

Lors d'un cycle, l'agent de la transformation (de l'eau) circule entre le cœur de la centrale à une température $T_1 = 700 \text{ K}$ et une rivière dont le débit volumique est $q_v = 400 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et la température d'entrée $T_2 = 290 \text{ K}$. La température de sortie de la rivière est $T_2 + \Delta T_2$. On cherche à calculer numériquement ΔT_2 lorsque la centrale fonctionne en régime stationnaire.

On suppose ΔT_2 petit, ce qui permet de considérer que la rivière est une source froide de température T_2 pour la machine thermique.

1) Retrouver l'expression de η_{rev} en fonction de T_1 et T_2 .

2) En déduire l'expression de l'énergie Q_2 reçue sous forme de chaleur par la machine de la part de la rivière pendant la durée Δt d'un cycle, en fonction de P , Δt , x , T_1 et T_2 .

3) Déterminer ΔT_2 en appliquant le premier principe à la rivière entre l'entrée et la sortie de la centrale. On note c_p la capacité thermique massique de l'eau et ρ sa masse volumique.
Faire l'application numérique avec $c_p = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. Il arrive qu'en été on doive diminuer la puissance fournie par une centrale. Expliquer pourquoi.

réponse : 1) cycle de Carnot moteur $\eta_{\text{rev}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ 2) $Q_2 = P \Delta t \left[1 - \frac{1}{x(1 - T_2/T_1)} \right]$ 3) $\Delta T_2 = - \frac{P}{\rho q_v c_p} \cdot \left[1 - \frac{1}{x(1 - T_2/T_1)} \right] = 1,1 \text{ K}$.

3. Cycle de Brayton

Le gaz utilisé est assimilé à un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1,4$; il subit les transformations (toutes réversibles) suivantes :

— compression adiabatique dans le compresseur (étape 1 → 2). Le gaz se trouve alors dans les conditions (p_2, T_2) .

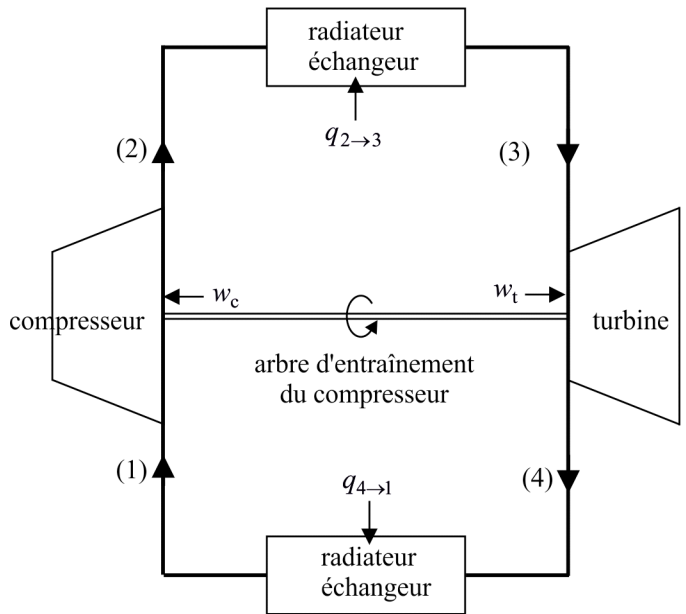
On note w_c le travail utile massique qu'il reçoit ;

— transformation isobare (étape 2 → 3) dans un radiateur échangeur. Le gaz se trouve alors dans les conditions (p_2, T_3) . On note $q_{2 \rightarrow 3}$ la chaleur massique qu'il reçoit ;

— détente adiabatique dans la turbine. Une partie du travail qu'elle fournit est utilisée pour faire fonctionner le compresseur, l'autre est le travail disponible pour l'utilisation souhaitée (étape 3 → 4). Le gaz se trouve alors dans les conditions (p_1, T_4) . On note w_t le travail massique qu'il reçoit de la part des parties mobiles ;

— transformation isobare (étape 4 → 1) dans un radiateur échangeur. Le gaz se trouve alors dans les conditions (p_1, T_1) .

On note $q_{4 \rightarrow 1}$ la chaleur massique qu'il reçoit.



1) Calculer l'enthalpie massique et l'entropie massique du gaz parfait en variable (T, p) . On note h_0 et s_0 l'enthalpie et l'entropie massique à T_0 et p_0 , R la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz.

2) Représenter le cycle en justifiant l'allure des courbes dans le diagramme de Clapeyron (volume massique v en abscisse, pression en ordonnée), puis dans le diagramme entropique (entropie massique en abscisse, température en ordonnée). Que représentent les aires de ces cycles ? Justifier

3) Démontrer $\Delta h = h_{\text{sortie}} - h_{\text{entrée}} = q + w$ entre l'entrée et la sortie d'un composant, où q est la chaleur reçue par l'unité de masse du gaz entre l'entrée et la sortie et w le travail reçu de la part des pièces mobiles. Quel est le signe des chaleurs $q_{2 \rightarrow 3}$ et $q_{4 \rightarrow 1}$?

4) Définir le rendement η du cycle. Calculer η en fonction des températures, puis en fonction de γ et du taux de compression $a = \frac{p_2}{p_1}$. Tracer l'allure de $\eta(a)$. Conclure.

5) En quel point du cycle la température est-elle maximale ? minimale ? On donne $T_{\text{max}} = 1000 \text{ K}$ et $T_{\text{min}} = 300 \text{ K}$ au cours du cycle. Déterminer la valeur de a rendant maximal le travail fourni par le gaz. Calculer alors η .

réponse : 1) $h(T) = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}(T - T_0) + h_0$; $s(T, p) = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} \ln \left[\frac{T}{T_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right] + s_0$ 3) $q_{2 \rightarrow 3} = h_3 - h_2 > 0$;

$q_{4 \rightarrow 1} = h_1 - h_4 < 0$; 4) $\eta = \frac{|W_{\text{cycle}}|}{q_{2 \rightarrow 3}} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} = 1 - a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$; 5) $T_{\text{max}} = T_3$; $T_{\text{min}} = T_1$; $a = \left[\frac{T_3}{T_1} \right]^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}} = 8,22$; $\eta = 0,452$.

4. Tuyère de Laval : étude du débit massique et de la poussée

Un gaz parfait obtenu après combustion d'un propergol dans le réacteur s'écoule dans une tuyère horizontale de révolution autour de l'axe Ox . On note $h(x)$, $\rho(x)$, $p(x)$, $T(x)$, $v(x)$ et $\mathcal{S}(x)$ respectivement l'enthalpie massique, la masse volumique, la pression, la température, la vitesse macroscopique du gaz et la section de la tuyère à l'abscisse x .

On affecte l'indice 0 aux grandeurs d'entrée et l'indice 1 aux grandeurs de sortie. L'écoulement est stationnaire et adiabatique réversible.

1) Calculer v_1 en fonction de v_0 , T_0 , γ (supposé constant), du rapport

$$r = \frac{R}{M} \text{ où } M \text{ est la masse molaire du gaz et } R \text{ la constante des gaz parfaits,}$$

et du rapport des pressions $\psi = \frac{p_1}{p_0}$. On suppose par la suite v_0

négligeable devant v_1 .

A.N : $\gamma = 1,3$, $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $T_0 = 3500 \text{ K}$, $\psi = 10^{-2}$. Calculer T_1 et v_1 .

2) Calculer la masse volumique de sortie ρ_1 en fonction de p_0 , T_0 , r et ψ . En déduire que le débit massique q_m se met sous la

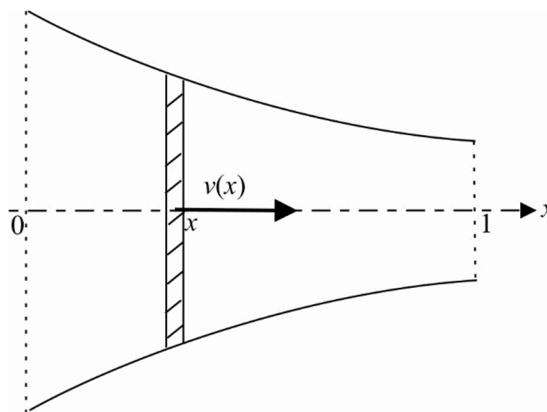
$$\text{forme } q_m = Cte \cdot \mathcal{S}_1 \cdot \psi^{\frac{1}{\gamma}} \left[1 - \psi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ où } \mathcal{S}_1 \text{ est la section de sortie. Expliciter } Cte \text{ en fonction de } p_0, T_0, \gamma \text{ et } r.$$

3) Pour quelle valeur ψ^* de ψ le débit massique q_m est-il maximal ? Faire l'application numérique pour $\gamma = 1,3$.

4) Un engin à réacteur muni d'une tuyère de Laval subit une force de poussée de norme $\pi = q_m v_1$. Pour quelle valeur ψ^\oplus de ψ la poussée est-elle maximale ? Faire l'application numérique pour $\gamma = 1,3$.

$$\text{réponse : 1) } v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\gamma r T_0}{\gamma-1} \left(1 - \psi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)} \approx 3030 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, T_1 = T_0 \psi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1210 \text{ K} \quad 2) Cte = p_0 \left[\frac{2\gamma}{(\gamma-1)rT_0} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$3) \psi^* = \left[\frac{2}{1+\gamma} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0,546 \quad 4) \psi^\oplus = \gamma^{1-\gamma} = 0,320.$$



5. Tourbillon de Rankine

On considère un récipient cylindrique de rayon R_0 , d'axe vertical Oz , rempli d'eau. Un petit barreau magnétique tourne autour de Oz , engendrant un écoulement. On repère un point M du fluide repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On distingue dans notre modélisation deux zones :

— zone A : $0 \leq r < R$: l'écoulement est tourbillonnaire avec $\vec{\omega}$ uniforme : $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_z$;

— zone B : $R < r \leq R_0$: l'écoulement est irrotationnel.

1) Dans quelles zones de l'écoulement doit-on *a priori* renoncer au modèle du fluide parfait ?

2) Calculer le champ des vitesses dans l'écoulement.

3) Montrer que l'eau dans la zone A est en équilibre dans le référentiel en rotation autour de Oz avec un vecteur rotation $\omega_0 \vec{e}_z$ par rapport au référentiel du laboratoire. En déduire l'expression du champ de pression dans cette zone, puis l'équation de la surface libre au dessus de A (on prend pour cette dernière $z = a$ pour $r = 0$).

4) Déterminer le champ de pression dans la partie B de l'écoulement. En déduire l'équation de la surface libre au-dessus de B.

$$\text{réponse : 3) } z = a + \frac{\omega_0^2 r^2}{2g} \quad 4) z = a + \frac{\omega_0^2 R^2}{g} \left[1 - \frac{R^2}{2r^2} \right].$$

6. Régimes d'un cours d'eau

On considère un écoulement parfait 1D incompressible et stationnaire selon Ox entre un plan horizontal $z = 0$ et une surface libre dont l'altitude z varie lentement avec x . On note L la largeur constante du cours d'eau. Dans une section en amont, $z = h_0$

et la vitesse est uniforme : $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. On note $H = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$. Dans une section quelconque en aval, $z = h$ et la vitesse est

uniforme $\vec{v} = v \vec{e}_x$.

- 1) Calculer le débit volumique q_V du cours d'eau en fonction de L , g , h et H .
- 2) Calculer le débit maximal $q_{V_{\max}}$ et la hauteur h_c correspondante. Tracer la courbe $q_V(h)$.
- 3) Montrer que pour un débit donné $q_V < q_{V_{\max}}$, on a deux régimes d'écoulement possibles : régime torrentiel et régime fluvial. Les identifier sur le graphe.

On introduit le nombre de Froude $Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}}$. Montrer que le régime torrentiel correspond à $Fr > 1$, le fluvial à $Fr < 1$.

- 4) On suppose que L rétrécit progressivement et passe de L à $L + \Delta L$ (avec $\frac{\Delta L}{L} \ll 1$: il n'y a pas changement de régime). Dans quel sens évolue h ? Discuter selon que l'on est en régime torrentiel ou fluvial. Qu'observera-t-on pour la hauteur d'eau lorsque le cours d'eau passe entre les piles d'un pont, selon que le régime est fluvial ou torrentiel ?

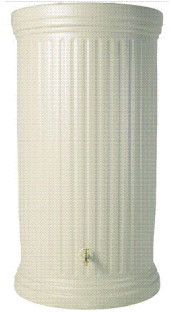
réponse : 1) $q_V = hL\sqrt{2g(H-h)}$; 2) $h_c = \frac{2H}{3}$; $q_{V_{\max}} = L\sqrt{\frac{8gH^3}{27}}$ 4) l'eau monte entre les piles si le régime est torrentiel, elle descend si le régime est fluvial (observer la Garonne...).

7. Récupérateur d'eau

Le récupérateur d'eau est un cylindre de rayon $R = 55$ cm et de hauteur $H = 2,10$ m.

On peut fixer sur sa base un robinet de diamètre d . Il en existe avec différents diamètres de sortie.

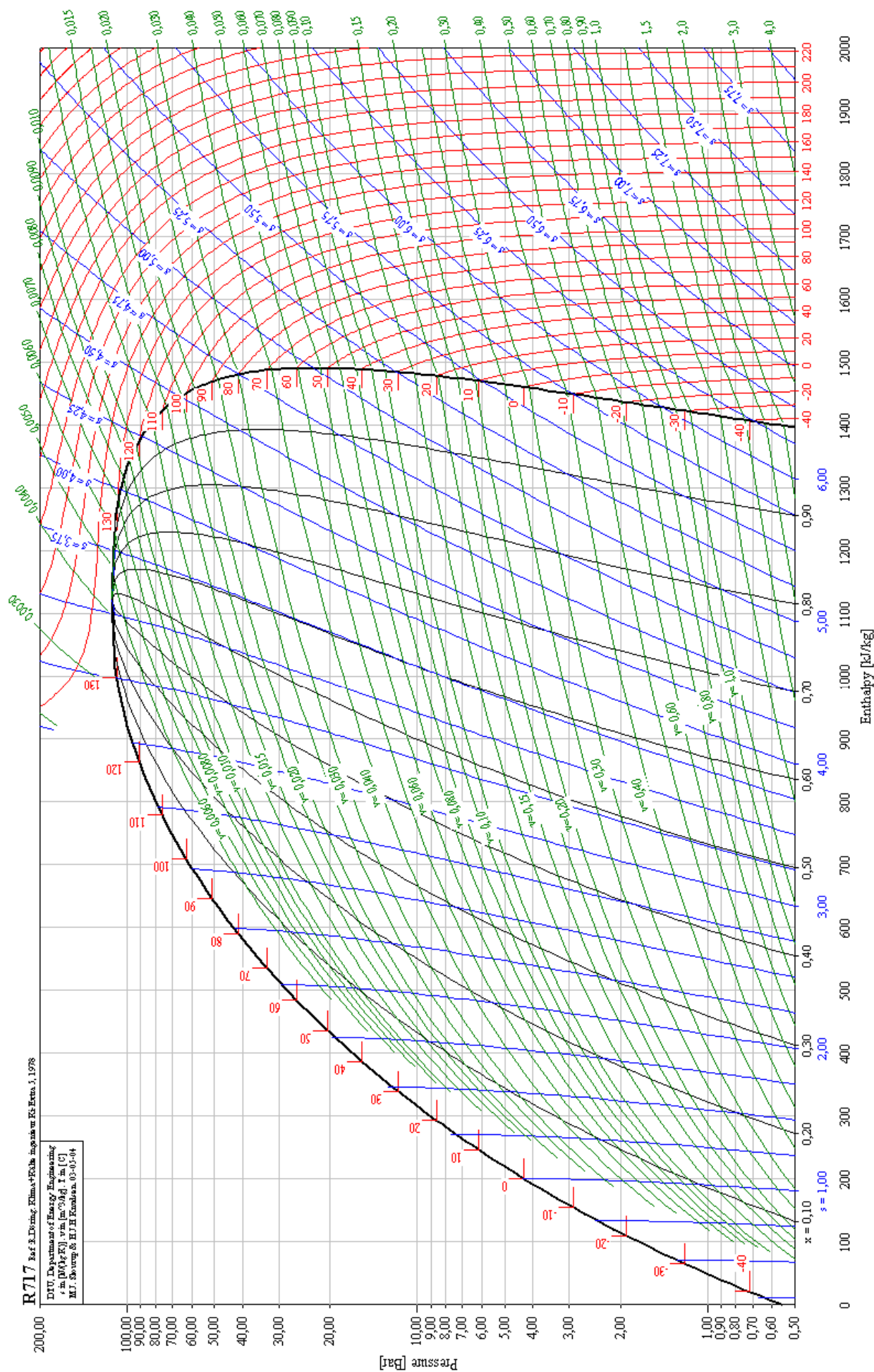
- 1) Calculer le diamètre minimal de sortie du robinet pour que le remplissage d'un arrosoir de 15 L dure moins de 30 s quand le récupérateur est plein.
- 2) Calculer le temps de vidange du récupérateur avec ce diamètre de robinet.
- 3) Quelle devrait être la forme du récipient pour que la hauteur d'eau varie en fonction du temps de façon affine ?



réponse : 1) $d \geq d_{\min} = 9,96$ mm ; 2) $t_{\text{vidange}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \left(\frac{2R}{d} \right)^2 = 2$ h 13 min 3) $R \propto h^{\frac{1}{4}}$.

Compétences fondamentales :

- dominer la distinction entre un système ouvert (qui permet de faire des bilans mais pas d'appliquer les principes de la dynamique ni de la thermodynamique) et un système fermé. Savoir définir un volume de contrôle et un système fermé qui y transite entre t et $t + dt$ et en déduire la variation d'une grandeur extensive x de ce système dans le cas d'écoulements unidirectionnels en entrée et sortie du volume de contrôle.
- connaître et savoir démontrer l'expression du premier et du second principes de la thermodynamique pour un fluide en écoulement.
- connaître la définition d'un fluide parfait, le théorème de Bernoulli pour un écoulement stationnaire incompressible de fluide parfait et ses principales applications (effet Venturi, débitmètre, tube de Pitot).
- connaître les applications des principes, pour un fluide en écoulement, aux machines thermiques, aux pompes et aux tuyères.

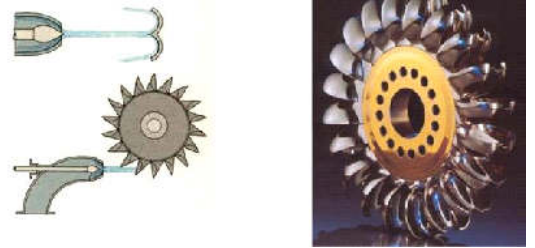


BILANS ÉNERGÉTIQUES ET ENTROPIQUES POUR UN ÉCOULEMENT / FLUIDES PARFAITS

BILANS DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET DE MOMENT CINÉTIQUE POUR UN ÉCOULEMENT

1. Étude d'une turbine Pelton

La turbine Pelton est constituée par une roue munie d'augets. Un auget Pelton est un double godet avec une cloison au milieu qui dédouble le jet en deux parties identiques. Les deux parties s'écoulent parallèlement au jet incident mais en sens opposé. L'eau, en provenance d'un injecteur, est propulsée sur ces augets et met la roue en mouvement. Dans le référentiel terrestre \mathcal{R} , la vitesse du jet d'eau, est notée $c\vec{e}_x$. On néglige l'effet de la pesanteur sur les jets. Le rayon R du rotor est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler le déplacement des augets, dans \mathcal{R} , à une translation suivant l'axe Ox dans la zone d'action du jet. Sous l'action du jet de section \mathcal{S} , de l'air et de la force du bâti, l'auget se déplace donc à la vitesse uniforme $u\vec{e}_x$. L'écoulement de l'eau de masse volumique ρ , est supposé incompressible et irrotationnel.



1) Montrer que pendant la durée de passage de l'auget dans le jet, l'écoulement est stationnaire dans le référentiel \mathcal{R}' lié à l'auget et en translation par rapport à \mathcal{R} . Donner dans \mathcal{R}' l'expression du débit massique q'_m incident sur un auget.

2) En appliquant le théorème de Bernoulli, montrer que la vitesse d'éjection du fluide dans \mathcal{R}' est opposée à celle du jet incident.

3) En faisant un bilan de quantité de mouvement dans \mathcal{R}' , déterminer la force \vec{F} totale exercée par l'air et l'eau sur l'auget.

4) On pose $X = \frac{u}{c}$. On se place dans \mathcal{R} . On note dE_{cc} l'énergie cinétique du jet qui rentre dans un volume de contrôle fixe ; dE_{cs} l'énergie cinétique qui en sort. Calculer la puissance $P_{\max}(X)$ que le jet peut potentiellement fournir à l'auget. Le comparer à la puissance $P(X)$ de \vec{F} dans \mathcal{R} .

Montrer qu'entre t et $t + dt$, la puissance perdue l'est du fait du déplacement de l'auget.

5) La roue qui porte les augets étant en rotation, un auget repoussé par le jet est remplacé par un autre auget possédant la même vitesse $u\vec{e}_x$. Un auget donné se déplace très peu pendant qu'il est soumis au jet. Montrer que l'on récupère ainsi la puissance qui serait perdue avec un auget unique. Définir et calculer le rendement $r(X)$ de la turbine. Pour quelle valeur de X ce rendement est-il maximal ? Commenter le résultat obtenu.

6) Le rotor tourne à la vitesse angulaire de 750 tours par minute et la vitesse de sortie du jet vaut $c = 74 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer le rayon R du rotor pour atteindre le rendement maximum. Le résultat est-il réaliste ? Pour un débit de 1500 litres par seconde, calculer la puissance maximale P_{\max} . Le rendement réel de la turbine est égal à 0,87. Calculer la puissance réelle P de la turbine. Quelles sont les raisons permettant d'expliquer pourquoi on n'atteint pas le rendement maximum ?

réponse : 1) $q'_m = \rho \mathcal{S} (c - u)$ 3) $\vec{F} = 2\rho \mathcal{S} (c - u)^2 \vec{e}_x$ 4) $P_{\max} = \rho \mathcal{S} c^3 (3X - 6X^2 + 4X^3) \neq P = \rho \mathcal{S} c^3 (2X - 4X^2 + 2X^3)$, la différence $P_{\max} - P$ est la puissance perdue dans jet qui s'allonge de udt 5) r max pour $X = \frac{1}{2}$ 6) $R = 47 \text{ cm}$; $P_{\max} = 4 \text{ MW}$.

2. Démarrage d'un rotor de gyroscope

Le rotor d'un gyroscope peut tourner autour d'un axe fixe vertical Δ . On note J_Δ le moment d'inertie du rotor par rapport à Δ . Pour obtenir l'effet gyroscopique, le rotor doit tourner très rapidement autour de son axe. On utilise alors un démarreur à réaction : des réserves de propergol solide situées de part et d'autre de Δ , à une distance a de Δ , sont enflammées et les gaz produits de la combustion sont éjectés par des tuyères de direction orthoradiale par rapport à Δ . Les gaz sont expulsés de chaque côté avec une vitesse relative orthoradiale de norme u par rapport au rotor et un débit massique total $q_m > 0$ supposé constant.

On note m_0 la masse initiale de propergol. Les liaisons entre le gyroscope et son support sont supposées parfaites. Le rotor étant initialement immobile, calculer sa vitesse angulaire ω_f lorsque la combustion du propergol s'achève dans les deux cas suivants :

1) Le rotor est soumis à un couple résistant de moment constant $\Gamma_\Delta < 0$.

2) Le rotor est soumis à un couple résistant de moment $\Gamma_\Delta = -\lambda\omega$.

réponse : le théorème du moment cinétique fournit $(J_{\Delta} + ma^2) \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{\Delta} + q_m au$ 1) $\omega_f = \frac{\Gamma_{\Delta} + q_m au}{q_m a^2} \ln \left[\frac{J_{\Delta} + m_0 a^2}{J_{\Delta}} \right]$

2) $\omega_f = \frac{q_m au}{\lambda} \left[1 - \left(\frac{J_{\Delta}}{J_{\Delta} + m_0 a^2} \right)^{\frac{\lambda}{q_m a^2}} \right]$.

3. Tir vertical d'une fusée

On envoie verticalement et sans vitesse initiale, depuis la surface de la Terre, une fusée de masse initiale totale m_0 . Les réacteurs de la fusée expulsent des gaz avec une vitesse \vec{u} par rapport à la fusée (\vec{u} est verticale et possède une norme constante), et un débit massique $q_m > 0$ constant. On note m_c la masse initiale de carburant. On suppose que le champ de pesanteur est uniforme, d'intensité $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La fusée est repérée par son altitude z (prise nulle lorsque la fusée se trouve sur le sol).

1) En faisant un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force de poussée $\vec{\Pi}$ que subit la fusée.

On donne $m_0 = 10000 \text{ kg}$, $m_c = 8000 \text{ kg}$, $q_m = 125 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ et $u = 2000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La fusée décolle-t-elle ?

2) Calculer la vitesse \dot{z} et l'altitude z de la fusée à la date t . On donne $\int \ln x dx = x \ln x - x$.

3) Calculer l'altitude z_1 et la vitesse v_1 de la fusée à la date t_1 pour laquelle le carburant est totalement brûlé.

4) Calculer l'accélération \ddot{z} , la vitesse et l'altitude de la fusée pour $t > t_1$. En déduire la date t_2 à laquelle la fusée retombe sur le sol. On déterminera l'altitude maximale atteinte.

réponse : 1) $\vec{\Pi} = \vec{u} \frac{dm}{dt}$; décollage car $\ddot{z}_0 = \frac{q_m u}{m_0} - g > 0$ 2) $\dot{z} = -gt + u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - q_m t} \right)$ et $z = -\frac{1}{2} g t^2 + u t \left[1 + \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - q_m t} \right) \right] - \frac{u m_0}{q_m} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - q_m t} \right)$ 3) $t_1 = \frac{m_c}{q_m} = 64 \text{ s}$; $v_1 = 2580 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $z_1 = 56,0 \text{ km}$ 4) $t_2 = 601 \text{ s}$; $z_{\max} = 389 \text{ km}$.

4. Bilan de quantité de mouvement pour un écoulement de Poiseuille

On donne l'expression du champ des vitesses $\vec{v} = v_z(r) \vec{e}_z = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{e}_z$ de l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux

incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité η qui s'écoule dans un tube cylindrique d'axe Oz , de rayon R et de longueur L . On néglige l'action de la pesanteur et on note $\Delta p = p_e - p_s$ la différence de pression entre l'entrée du tube ($z = 0$) et la sortie ($z = L$).

1) Calculer directement la force qu'exerce le fluide sur le tube.

2) Retrouver le résultat en supposant uniquement l'écoulement parallèle et incompressible, et en faisant un bilan de quantité de mouvement pour le système ouvert constitué par le tube de longueur L .

réponse : 1) et 2) $\vec{F}_v = \pi \Delta p R^2 \vec{e}_z$.

5. Rendement d'une hélice

On considère un écoulement parfait unidimensionnel, incompressible et stationnaire d'un fluide de masse volumique ρ à travers une hélice, supposée plane, d'axe Ox . On néglige dans cette étude l'influence de la pesanteur. On suppose que l'écoulement se fait dans un tube de courant de symétrie de révolution autour de l'axe Ox de section droite d'aire variable $\mathcal{S}(x)$, la zone extérieure, de pression uniforme p_0 n'étant pas affectée par le mouvement de l'hélice.

Très en amont de l'hélice, la pression est p_0 et la vitesse du fluide $\vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_x$ sur la section droite du tube de courant d'aire \mathcal{S}_1 .

Très en aval de l'hélice, la pression est p_0 et la vitesse du fluide $\vec{v}_2 = v_2 \vec{e}_x$ sur la section droite du tube de courant d'aire \mathcal{S}_2 .

Dans le plan de l'hélice, la vitesse du fluide vaut $\vec{v} = v \vec{e}_x$ et la section droite du tube a une aire \mathcal{S} .

L'influence de l'hélice sur l'écoulement est modélisée en faisant intervenir une discontinuité de pression qui passe de p_A à p_B à la traversée du plan de l'hélice.

1) Déduire de la conservation du débit massique q_m deux relations liant les trois aires et les trois vitesses introduites. Justifier que l'on puisse appliquer le théorème de Bernoulli au fluide en amont, puis en aval de l'hélice. En déduire la relation liant p_A , p_B , v_2 , v_1 et ρ .

2) En effectuant un bilan de quantité de mouvement au fluide qui transite entre t et $t + dt$ dans le volume de contrôle constitué par le tube de courant délimité par les sections droites \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , déduire une première expression de la force $\vec{F} = F\vec{e}_x$ exercée par le fluide sur l'hélice.

En faisant de même entre $x = -\varepsilon$ et $x = \varepsilon$ avec $\varepsilon \rightarrow 0$, déduire une deuxième expression de \vec{F} . Établir alors les deux relations $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ et $F = 2\rho\mathcal{S}v(v_1 - v)$.

3) Déduire de l'étude précédente la puissance P reçue par l'hélice. On pose $v = \lambda v_1$.

Déterminer la valeur λ_F qui rend F maximale et les expressions F_{\max} et P_F correspondantes de la force et de la puissance.

Déterminer la valeur λ_P qui rend P maximale et les expressions F_P et P_{\max} correspondantes de la force et de la puissance.

Tracer les courbes $F(\lambda)$, $P(\lambda)$ et $P(F)$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$. Commenter.

4) Le rendement r de l'hélice considérée ici comme une éolienne est défini comme le rapport de la puissance qu'elle reçoit à la puissance que recevrait l'aire \mathcal{S} sous forme cinétique, en l'absence de l'hélice. Donner, en fonction de λ , l'expression du rendement de l'hélice et préciser la valeur du rendement maximal r_{\max} .

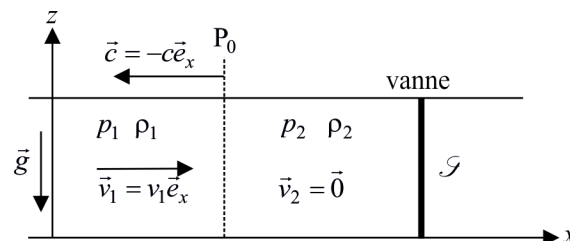
réponse : 1) $\mathcal{S}_1 v_1 = \mathcal{S}_2 v_2 = \mathcal{S} v$; $p_A - p_B = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)$ 2) $F = q_m(v_1 - v_2) = (p_A - p_B)\mathcal{S}$ 3) $P = 2\rho\mathcal{S}v^2(v_1 - v)$

4) $r = 4\lambda^2(1 - \lambda)$ maximal pour $\lambda = \frac{2}{3}$; $r_{\max} \approx 0,59$.

6. Onde de choc dans un liquide

Un liquide de masse volumique ρ_1 s'écoule uniformément à la vitesse $\vec{v}_1 = v_1\vec{e}_x$ dans une canalisation horizontale de section constante \mathcal{S} . On ferme instantanément la canalisation à l'aide d'une vanne.

1) Si le liquide était parfaitement incompressible, quel serait le champ de vitesses dans ce dernier après la fermeture de la vanne ?



En réalité, une onde de choc créée au niveau de la vanne se déplace dans

le liquide dans le sens des x décroissants à la célérité $\vec{c} = -c\vec{e}_x$, que l'on cherche à déterminer. Le plan de front P_0 de cette onde sépare le liquide en deux parties : à droite de P_0 , le liquide est au repos : $\vec{v}_2 = \vec{0}$, la pression vaut p_2 et la masse volumique ρ_2 ; à gauche de P_0 , le liquide s'écoule à \vec{v}_1 , la pression vaut p_1 et la masse volumique ρ_1 (l'écoulement n'est pas encore affecté par la fermeture de la vanne).

On raisonne dans le référentiel \mathcal{R}' lié au front d'onde, en translation rectiligne uniforme avec $\vec{c} = -c\vec{e}_x$ par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R} .

2) Montrer que l'écoulement est stationnaire dans \mathcal{R}' . Calculer les vitesses \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 du liquide respectivement à gauche et à droite de P_0 . Calculer de deux façons le débit massique q_m de l'écoulement et en déduire une relation (1) entre ρ_1 , ρ_2 , v_1 , v_2 et c .

3) Faire un bilan de quantité de mouvement sur un système que l'on définira soigneusement et en déduire une relation (2) entre p_1 , p_2 , ρ_2 , c et v_1 .

4) Constaté qu'il manque une équation pour pouvoir résoudre le problème. Quelles relations doit-on alors écrire de manière générale ?

5) On utilise le fait que le liquide est faiblement compressible et on fait l'hypothèse d'une transformation isentropique. Discuter cette dernière hypothèse.

On utilise le coefficient de compressibilité isentropique $\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S$. Vu la faible valeur de ce coefficient, en déduire une

relation (3) entre ρ_2 , ρ_1 , χ_S , p_1 et p_2 .

6) Déduire des trois relations établies précédemment que l'onde de choc se propage à la vitesse du son dans le liquide, soit

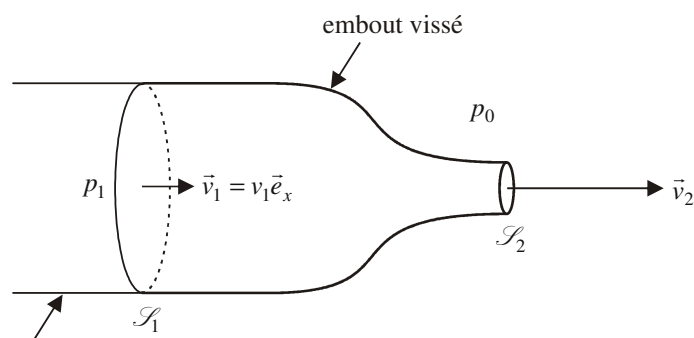
$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \chi_S}}$$

Calculer numériquement cette vitesse pour de l'eau ($\chi_S = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$; $\rho_1 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$), la pression et la masse volumique derrière le front d'onde si $p_1 = 1 \text{ bar}$ et $v_1 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

réponse : 3) $p_1 - p_2 = -\rho_2 c v_1$ 5) $\rho_2 = \rho_1 + \rho_1 \chi_S (p_2 - p_1)$.

7. Force exercée sur l'embout d'une lance à incendie

On considère un écoulement supposé parfait d'eau de masse volumique ρ dans une lance à incendie de section \mathcal{S}_1 se faisant avec un débit volumique q_V , avec une vitesse uniforme $\vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_x$. On place en extrémité de la veine un embout dont la section de sortie est \mathcal{S}_2 . La pression extérieure de l'air p_0 est uniforme.



1) Quelle est la pression p_1 nécessaire en amont de l'embout pour obtenir un débit volumique q_V .

2) Calculer la résultante des forces de pression sur l'embout. On l'exprimera en fonction de ρ , q_V , \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 et \vec{e}_x . Commenter le cas $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1$.

3) On ferme l'embout : que se passe-t-il ? Quelle est la force de pression subie par l'embout.

réponse : 2)
$$\vec{F} = \frac{1}{2} \frac{\rho q_V^2}{\mathcal{S}_1} \left[\frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2} - 1 \right]^2 \vec{e}_x.$$

Compétences fondamentales :

- savoir effectuer un bilan de quantité de mouvement en vue de déterminer des forces exercées par un fluide sur un objet ; connaître la notion de pertes de charges singulières.
- savoir effectuer un bilan de moment cinétique pour trouver des moments exercés par un fluide sur un objet.

DIFFUSION THERMIQUE

• Régime stationnaire

1. Fusible en régime stationnaire

On considère un cylindre plein conducteur électrique d'axe Ox , de section \mathcal{S} , de longueur L , de conductivité thermique λ , de conductivité électrique γ , parcouru par un courant I (le vecteur densité de courant électrique $\vec{J} = J_0 \vec{e}_x$ est uniforme). La surface latérale est calorifugée, les extrémités $x=0$ et $x=L$ sont en contact avec le milieu ambiant de température T_0 .

On donne $\lambda = 65 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\gamma = 1,2 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$; $T_0 = 290 \text{ K}$; $L = 2,5 \text{ cm}$

- 1) Calculer la résistance électrique R du fusible ainsi que la puissance électrique P_e reçue en régime stationnaire.
- 2) Déterminer l'équation différentielle régissant $T(x)$ lorsque le régime stationnaire est atteint. L'intégrer et tracer $T(x)$.
- 3) Le fusible fond pour $T_f = 390 \text{ K}$. On veut un fusible admettant $I_{\max} = 16 \text{ A}$.

À quel endroit le fusible va-t-il se rompre si $I > I_{\max}$?

Quelle section \mathcal{S} doit-on prévoir ? Donner sa valeur numérique en mm^2 .

- 4) On fixe $I = 10 \text{ A}$ avec la section trouvée précédemment. Calculer numériquement $P_{\text{th}}(0)$ et $P_{\text{th}}(L)$ puissance thermique transférée par conduction en $x=0$ et en $x=L$. Commenter leurs signes. Comparer $P_{\text{th}}(0)$ à P_e .

- 5) Montrer que l'entropie du fusible est à une constante près $S = \int_0^L \rho c \mathcal{S} \ln[T(x)] dx$, intégrale que l'on ne cherche pas à calculer.

Calculer l'entropie produite dans le fusible par unité de temps. Interpréter le résultat.

réponse : 1) $P_e = \frac{L J_0^2 \mathcal{S}}{\gamma}$ 2) $T(x) = \frac{J_0^2 x}{2\lambda\gamma} (L-x) + T_0$ 3) $\mathcal{S} = 1,6 \text{ mm}^2$ 4) $P_{\text{th}}(0) = -P_{\text{th}}(L) = -\frac{P_e}{2}$ 5) $\frac{\delta S^p}{dt} = \frac{P_e}{T_0} > 0$.

2. Expérience de Ingen-Housz

On considère un cylindre plein en cuivre, à base circulaire de rayon r , de longueur ℓ , de conductivité thermique λ . On le met en contact par une de ses extrémités $x=0$ avec de l'eau bouillante de température $T_0 = 373 \text{ K}$. La température extérieure est $T_e = 293 \text{ K}$. On suppose que la température est uniforme dans une section $x=Cte$ du cylindre. On note h le coefficient de transmission thermique de surface latérale. On se place en régime permanent.

- 1) Établir la loi $T(x)$ en supposant la longueur ℓ suffisamment grande. On précisera cette condition.
- 2) On place comme précédemment deux cylindres de même géométrie, mais constitués par deux métaux différents de conductivités thermiques λ_1 et λ_2 . Les deux tubes sont recouverts de paraffine dont la température de fusion vaut $T_f = 333 \text{ K}$. On constate qu'en régime permanent, la paraffine fond sur des distances $x_1 = 15,6 \text{ cm}$ pour le premier cylindre et $x_2 = 6,4 \text{ cm}$ pour le second. On connaît la conductivité thermique $\lambda_1 = 390 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ du premier métal, en déduire celle du second.

Donner la valeur numérique de h sachant que $r = 1 \text{ cm}$.

- 3) Établir la loi $T(x)$ lorsque la condition du a) n'est pas vérifiée.

réponse : 1) $T(x) = T_e + (T_0 - T_e) e^{-\frac{x}{\delta}}$ valable si $\delta = \sqrt{\frac{\lambda r}{2h}} \ll \ell$ 2) $\lambda_2 = \lambda_1 \left[\frac{x_2}{x_1} \right]^2 = 65,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

$h = \frac{r\lambda}{2x_f^2} \left[\ln \left(\frac{T_0 - T_e}{T_f - T_e} \right) \right]^2 = 38,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ 3) $T(x) = T_e + (T_0 - T_e) \left[\text{ch} \frac{x}{\delta} - \frac{hch \frac{\ell}{\delta} + \lambda \text{sh} \frac{\ell}{\delta}}{hsh \frac{\ell}{\delta} + \lambda \text{ch} \frac{\ell}{\delta}} \text{sh} \frac{x}{\delta} \right]$.

3. Température à l'intérieur d'un igloo

Quatre explorateurs construisent un igloo de rayon R et d'épaisseur e sur la banquise. La neige compactée qu'ils utilisent possède une conductivité thermique $\lambda = 0,3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. La température extérieure est $T_{\text{ext}} = -10^\circ\text{C}$. Chaque explorateur dégage une puissance P de 50 W . On néglige les transferts thermiques convectifs et radiatifs. Les explorateurs s'enferment dans l'igloo et on suppose qu'un régime stationnaire s'établit.

Calculer littéralement la température intérieure T_{int} de l'igloo en fonction des données du problème. Étudier l'influence de R et de e . Faire l'A.N pour $R = 1,5 \text{ m}$ et $e = 30 \text{ cm}$.

réponse : $T_{\text{int}} = 1,8^\circ\text{C}$.

4. Isolation d'une conduite cylindrique

Un écoulement stationnaire de vapeur à la température $T_0 = 950 \text{ K}$ se fait à l'intérieur d'une conduite en acier de longueur $L = 2 \text{ m}$, de rayon intérieur $R_1 = 5 \text{ cm}$ et de rayon extérieur $R_2 = 10 \text{ cm}$. On veut isoler la canalisation avec une gaine isolante d'épaisseur $e = R_3 - R_2$. La température de l'air extérieur est $T_e = 300 \text{ K}$. On donne les conductivités thermiques de l'acier $\lambda_a = 40 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, de l'isolant $\lambda_i = 1,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, ainsi que les coefficients de transmission thermique de surface latérale entre la vapeur et l'acier $h_0 = 600 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$; entre l'isolant et l'air $h_e = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

- 1) Établir l'expression de la résistance thermique d'un conducteur de conductivité λ , de longueur L , compris entre deux cylindres coaxiaux de rayons R et $R' > R$.
- 2) Établir l'expression de la résistance thermique d'une surface cylindrique de rayon R , de longueur L , séparant deux milieux pour lesquels le coefficient de transmission thermique de surface est h .
- 3) Donner le schéma électrique équivalent de la conduite en présence de l'isolant. En déduire la résistance équivalente $R_{\text{th} \text{éq}}$ de la conduite avec isolant.
- 4) Justifier par le calcul l'existence d'une valeur R_c du rayon R_3 pour lequel $R_{\text{th} \text{éq}}$ est minimale. Interpréter.

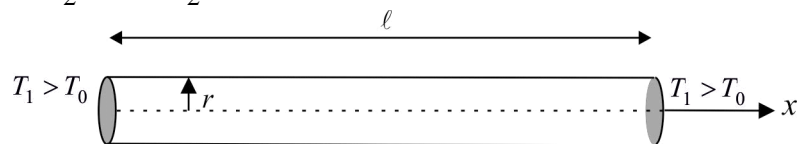
réponse : 1) $R_{\text{th}} = \frac{\ln \frac{R'}{R}}{2\pi\lambda L}$ 2) $R_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi h R L}$ 4) $R_c = \frac{\lambda_i}{h_e}$.

• Régime transitoire, A.R.Q.S

5. Évolution de la température dans une barre cylindrique chauffée à ses extrémités

On considère une barre pleine en cuivre, à base circulaire de petit rayon r , de longueur ℓ , de diffusivité thermique a , calorifugée sur sa surface latérale. Initialement, la température de la barre est homogène : $T(x,0) = T_0$. Pour $t > 0$, on porte brusquement

les extrémités de la barre $x = -\frac{\ell}{2}$ et $x = +\frac{\ell}{2}$ à la température $T_1 > T_0$. Déterminer $T(x,t)$ en utilisant des séries de Fourier.



réponse : $T(x,t) = T_1 + \frac{4(T_0 - T_1)}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos\left[\frac{(2p+1)\pi x}{\ell}\right] \exp\left(\frac{-(2p+1)^2 \pi^2 a t}{\ell^2}\right)$

6. Évolution de la température dans une barre

Une barre de section \mathcal{S} , de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique $c \approx 0$ et de longueur L relie deux solides S_1 et S_2 de capacités thermiques C_1 et C_2 , de conductivités thermiques $\lambda_1 \rightarrow \infty$ et $\lambda_2 \rightarrow \infty$, de températures T_1 et T_2 . Initialement, on a $T_1 = T_1^0$ et $T_2 = T_2^0 < T_1^0$.

- 1) Montrer que l'on peut définir une résistance thermique à la date t : $R_{\text{th}} = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{\phi}$ et la calculer. Calculer la température finale T_f du système. Déterminer les lois $T_1(t)$ et $T_2(t)$. Tracer les graphes correspondants.
- 2) Calculer la variation d'entropie ΔS entre l'état initial et l'état final du système.

réponse : 1) $R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda \mathcal{S}}$; pour $t \rightarrow \infty$, T_1 et T_2 tendent vers $T_f = \frac{C_1 T_1^0 + C_2 T_2^0}{C_1 + C_2}$, on a $T_1 = T_f + \frac{C_2}{C_1 + C_2} (T_1^0 - T_2^0) e^{-\frac{t}{\tau}}$ et

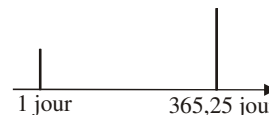
$T_2 = T_f - \frac{C_1}{C_1 + C_2} (T_1^0 - T_2^0) e^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $\tau = \frac{1}{R_{\text{th}}} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

● Régime forcé

7. Ondes thermiques dans le sol

On étudie la répartition de températures à l'intérieur du sol modélisé par le demi-espace $x \geq 0$, homogène. On note ρ sa masse volumique, λ sa conductivité thermique, c sa capacité thermique massique, $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ sa diffusivité thermique.

Dans ces conditions la température dans le sol ne dépend que de la profondeur x et du temps t , et elle est régie par l'équation de la diffusion thermique : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$ (*). Des mesures de la température à la surface du sol $T(0,t)$ pendant plusieurs années permettent de tracer le spectre des variations $\theta(0,t) = T(0,t) - T_0$ de cette température autour de la valeur moyenne T_0 dont l'allure grossière est donnée ci-contre. On note ω_1 et $\omega_2 < \omega_1$ les pulsations de ces pics.



1) On cherche à déterminer $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$ pour $x \geq 0$. Quelle propriété de (*) permet-elle de considérer d'abord une condition aux limites de la forme $\theta(0,t) = \frac{\Delta T}{2} \cos(\omega t)$? Quelle est la signification de ΔT ?

2) On pose $\delta = \sqrt{2a/\omega}$. Quelle est la dimension de cette grandeur ?

3) On se place en régime sinusoïdal forcé : les solutions de (*) sont cherchées sous la forme $\theta(x,t) = \text{Re}[\underline{\theta}(x,t)]$ avec $\underline{\theta}(x,t) = \underline{f}(x)e^{i\omega t}$ (les grandeurs soulignées sont des complexes). Justifier cette forme.

Déterminer l'équation différentielle régissant la fonction $\underline{f}(x)$. Montrer que les solutions les plus générales s'écrivent alors sous

la forme : $\underline{f}(x) = A e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-i\frac{x}{\delta}} + B e^{\frac{x}{\delta}} e^{i\frac{x}{\delta}}$. Donner la loi $T(x,t)$ en régime établi.

4) A.N : On définit la «profondeur de pénétration» comme la profondeur à laquelle l'amplitude d'une variation de température est réduite à 1% de son amplitude en surface. On mesure des profondeurs de pénétration pour des cycles quotidiens et annuels, selon le type de sol étudié :

	a ($\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	Profondeur de pénétration	
		Jour (m)	Année (m)
Roc	0,020	1,10	20,5
Argile humide	0,015	0,95	18,0
Sable humide	0,010	0,80	14,5
Argile sèche	0,002	0,40	6,5
Sable sec	0,001	0,30	4,5

Montrer que le rapport des profondeurs de pénétration pour un matériau donné, puis que la dépendance en a , sont conformes à la théorie. Que peut-on en conclure sur la température des grottes enfouies à plus de 5 m sous terre ?

réponse : 4) $T(x,t) = T_0 + \Delta T / 2 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - x/\delta)$.

Compétences fondamentales :

- savoir écrire les deux premiers principes de la thermodynamique pour une transformation infinitésimale, utiliser avec rigueur les notations « d » et « δ » en leur attachant une signification.
- connaître les trois modes de transferts thermiques, les définitions des vecteurs densité de courants thermiques associés, leur unité, leur signification, la loi de Fourier pour les échanges diffusifs et celle de Newton pour les échanges conducto-convectifs ; connaître des ordres de grandeur de la conductivité thermique de quelques matériaux.
- savoir effectuer un bilan d'énergie à 1D et 3D avec ou sans terme de production, afin d'établir une équation « de la chaleur » (équation aux dérivées partielles régissant $T(M,t)$).
- savoir exprimer les conditions aux limites dans diverses situations ; utiliser la continuité du flux thermique.
- savoir effectuer une analogie avec l'électrocinétique en régime stationnaire et dans l'A.R.Q.S. Connaître la définition de la résistance d'un conducteur thermique et son expression pour un cylindre calorifugé sur sa surface latérale.
- savoir trouver par analyse dimensionnelle l'épaisseur de peau pour les ondes thermiques ; savoir résoudre l'équation de la chaleur en régime sinusoïdal forcé.

DIFFUSION DE PARTICULES

• Régime stationnaire

1. Sédimentation

On disperse N particules identiques, assimilées à des boules de masse m et de rayon a dans un bécher cylindrique de section \mathcal{S} rempli d'eau de masse volumique ρ . On note Oz la verticale descendante.

1) Une particule dispersée est soumise à son poids et à une force de frottement fluide donnée par la formule de Stokes $f = -6\pi\eta a\vec{v}$ où η est la viscosité de l'eau.

Déterminer la vitesse limite v_{lim} des particules dispersées, supposée atteinte très rapidement. On supposera par la suite que la masse volumique des particules est très supérieure à celle de l'eau.

En déduire le nombre de particules dispersées δN_s traversant une section horizontale du bécher entre les instants t et $t + dt$, en fonction notamment de la densité particulaire $n(z)$.

2) Du fait de l'existence d'un gradient de densité particulaire, un phénomène de diffusion se superpose au phénomène étudié dans la question a). Exprimer le nombre de particules dispersées δN_d diffusées à travers une section horizontale du bécher entre

les instants t et $t + dt$, en fonction notamment du coefficient de diffusion D et de $\frac{dn}{dz}$.

3) En déduire en régime stationnaire une équation différentielle régissant $n(z)$ et donner sa solution.

En admettant que $n(z)$ est aussi donnée par un facteur de Boltzmann $e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$, en déduire une relation entre D , a , η , T et la constante de Boltzmann k_B .

On donne à $T = 293 \text{ K}$:

— les coefficients de diffusion $D = 6,9 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ de l'hémoglobine dans l'eau et $D = 1,8 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ du dioxygène dans l'eau,

— le rayon $a = 3 \text{ nm}$ d'une molécule d'hémoglobine.

En déduire le coefficient de viscosité de l'eau η et le rayon d'une molécule de dioxygène.

4) La relation $n(z) = n(0)e^{-\frac{z}{h}}$ définit une hauteur h caractéristique de la sédimentation. Calculer h pour l'hémoglobine de masse molaire $M_{\text{hém.}} = 68 \cdot 10^3 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et pour l'urée de masse molaire $M_{\text{ur.}} = 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Peut-on séparer ces deux solutés par sédimentation ?

réponse : 3) $n(z) = n(z=0)e^{-\frac{v_{\text{lim}}}{D}z}$; $a_{\text{O}_2} = 0,115 \text{ nm}$; $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$.

2. Diffusion d'un produit injecté dans une veine

Une veine de section \mathcal{S} est modélisée par un tube cylindrique infini de rayon a . Le sang s'y écoule avec une vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ avec $v_0 > 0$. On injecte continûment dans la veine un produit en $x = 0$. La densité moléculaire du produit y reste constante et vaut n_0^* .

On note D le coefficient de diffusion du produit dans le sang.

1) Déterminer l'équation différentielle qui régit $n^*(x,t)$. Pour une longueur L donnée, faire apparaître deux temps caractéristiques de diffusion et de convection.

Quel est en mécanique des fluides le nombre analogue au rapport $\xi = \frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{conv}}}$?

2) En déduire $n^*(x)$ en régime stationnaire. En faire la représentation graphique. Commenter la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} n^*(x)$.

3) La dose critique de produit que peut admettre un organe situé en amont du point d'injection, en $x = -L$ est n_c^* . Calculer la valeur de n_0^* permettant d'avoir $n_{\text{max}}^*(-L) = \frac{n_c^*}{10000}$.

Faire l'application numérique pour la concentration c_0 avec $L = 10 \text{ cm}$; $D = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; $v_0 = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $c_c = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

réponse : 1) $\frac{\partial n^*}{\partial t} = -v_0 \frac{\partial n^*}{\partial x} + D \frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}$ 2) $n^*(x) = n_0^* e^{\frac{v_0}{D}x}$.

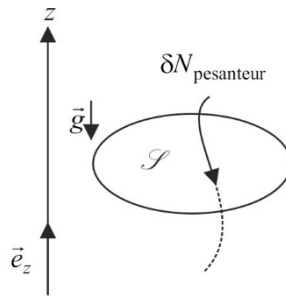
3. Modèle microscopique de l'atmosphère isotherme

L'air isotherme (température T) est supposé constitué de particules identiques de masse m . Entre deux chocs, une particule n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ avec \vec{g} uniforme.

1) On considère une particule subissant un choc à $t = 0$. Sa vitesse juste après choc \vec{v}_0 est aléatoire, de distribution isotrope. Calculer $\vec{v}(t)$ s'il n'y a pas de choc entre 0 et t . Calculer la vitesse moyenne des particules formant l'air à un instant donné, en fonction de \vec{g} et du temps moyen de vol τ .

2) Montrer que le poids induit un mouvement d'ensemble des particules, que l'on peut caractériser par un vecteur densité de courant vertical $\vec{J}_{N,\text{pesanteur}} = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{\delta N_{\text{pesanteur}}}{dt} \vec{e}_z$.

Calculer $\vec{J}_{N,\text{pesanteur}}$ en fonction de g , τ , n^* et \vec{e}_z .



3) Montrer qu'il existe alors nécessairement un phénomène d'auto-diffusion que l'on suppose régi par la loi de Fick (avec un coefficient de diffusion D). Que vaut $\vec{J}_{N,\text{diffusion}}$ en fonction de D , n^* et \vec{e}_z ?

4) Montrer en faisant un bilan de particules qui traversent une surface horizontale \mathcal{S} pendant dt qu'en régime stationnaire :

$n^*(z) = n_0^* \exp\left(-\frac{z}{H'}\right)$. Exprimer H' en fonction de g , τ et D .

5) On donne $D = \frac{1}{3} \ell \bar{v}$ où ℓ est le libre parcours moyen de la particule et $\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$ est la vitesse moyenne des particules.

Calculer H' en fonction de k_B , T , m et g . Conclure.

6) De quel type d'équilibre s'agit-il ?

réponse : 1) $\vec{v} = \vec{g}\tau$ 2) $\vec{J}_{N,\text{pesanteur}} = -n^*(z,t)g\tau\vec{e}_z$ 3) $\vec{J}_{N,\text{diffusion}} = -D \frac{\partial n^*}{\partial z} \vec{e}_z$ 4) $H' = \frac{D}{g}$ 5) $H' = \frac{8}{3\pi} \frac{k_B T}{mg}$.

4. Palier de diffusion

On considère la courbe intensité-potentiel obtenue pour le couple $\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}(s)$ avec une électrode inoxydable. Cette courbe présente un palier pour des courants négatifs (lorsqu'il y a réduction) : on a $i = -K[\text{Cu}^{2+}] = -Kc$.

On cherche à justifier l'existence de ce palier en régime stationnaire. On se place à une dimension : les ions Cu^{2+} se déplacent selon Ox orthogonalement à la cathode (de surface S). Leur concentration sur la cathode (en $x = 0$) est notée c_0 . On suppose

que hors d'une couche de diffusion de faible épaisseur δ dans laquelle $[\text{Cu}^{2+}]$ varie selon une loi affine, on a $[\text{Cu}^{2+}] = c$ pour $x \geq \delta$.

1) Énoncer la loi de Fick. En déduire l'expression de J_n (nombre de moles d'ions nickel qui diffusent par unité de temps et de surface) en fonction du coefficient de diffusion D des ions nickel, de c , c_0 et de δ .

2) Montrer que l'on a bien $i = -Kc$ lorsque le phénomène de diffusion devient limitant. Exprimer K en fonction de F , D , S et δ . On précisera quel est l'autre phénomène n'intervenant pas dans la cinétique car beaucoup plus rapide que la diffusion.

réponse : 1) $J_n = -D \frac{c - c_0}{\delta} < 0$ 2) $K = 2 \frac{FDS}{\delta}$.

Le fonctionnement du cœur d'un réacteur nucléaire limité par deux plans d'abscisse $x = \pm \frac{a}{2}$ et de section \mathcal{S} est modélisé à 1D par :

- une production volumique par unité de temps σ de neutron provenant des réactions de fission, avec $\sigma = \frac{n^*(x,t)}{\tau}$ où $n^*(x,t)$ est la densité volumique de neutrons ;
- une zone de piégeage appelée couverture : pour $x \geq \frac{a}{2}$ ou $x \leq -\frac{a}{2}$, on a $n^* = 0$.

La diffusion dans le cœur obéit à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D .

1) Établir l'équation vérifiée par $n^*(x,t)$.

Quelle est la signification de τ ? Quelle serait l'évolution temporelle de n^* à x fixé sans le phénomène de diffusion ? Commenter.

2) Déterminer $n^*(x)$ en régime permanent. En déduire qu'il existe une condition liant τ à D et a . Que se passe-t-il si τ est inférieur à la valeur requise ?

Exprimer $n^*(x)$ en fonction de a , \mathcal{S} et N_0 le nombre total de neutrons dans le réacteur.

Quelle est la densité maximale des neutrons ?

Déterminer le flux de neutron vers les zones de couverture.

Comparer le flux total sortant à la production totale de neutron.

3) Lors d'un arrêt d'urgence, des barres de piégeage plongent dans le coeur du réacteur. Le taux de production volumique global des neutrons peut alors être négatif (si le piégeage l'emporte sur la fission) : $\sigma = \frac{n^*(x,t)}{\tau'}$ avec τ' algébrique.

Rechercher la solution de l'équation de diffusion sous la forme $n^*(x,t) = f(x)g(t)$. On suppose que le régime permanent était atteint à l'instant $t = 0$.

En déduire le type de régime obtenu selon la valeur de τ' .

4) On note n_p^* la densité volumique des pièges et Σ la section efficace de piégeage. On suppose que les neutrons ont une vitesse de norme constante v .

Déterminer σ le nombre de neutrons piégés par unité de volume et de temps. Comparer au modèle macroscopique.

réponse : 1) $\frac{\partial n^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2} + \frac{n^*}{\tau}$ 2) $n^*(x) = n_0^* \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ si $\tau = \frac{a^2}{\pi^2 D}$; $n_0^* = \frac{\pi N_0}{2a\mathcal{S}}$; $\delta N^p = \delta N^a = \frac{D\pi^2 N_0}{a^2} dt$ 3) régime explosif si $0 < \tau' < \tau = \frac{a^2}{\pi^2 D}$, stationnaire si $\tau' = \frac{a^2}{\pi^2 D}$, sinon : $n^* \rightarrow 0$ 4) $|\sigma| = v\Sigma n_p^* n^* = \frac{n^*}{\tau'}$.

6. Évaporation de l'éther

Un tube cylindrique de section \mathcal{S} contient de l'éther liquide. On note h la distance entre l'ouverture et la surface du liquide. Un point du tube est repéré par son abscisse x à partir de l'ouverture. Le renouvellement de l'air au niveau de l'ouverture du tube implique que la pression partielle en éther y est pratiquement nulle.

L'évaporation est très lente et on suppose qu'il y a équilibre thermodynamique local dans le tube à la température $T = 293$ K. On note p_s la pression de vapeur saturante et on donne $p_s(293 \text{ K}) = 0,583$ bar. La diffusivité de la vapeur d'éther dans l'air est $D = 1,50 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. La masse molaire de l'éther est $M = 74,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et la masse volumique de l'éther liquide $\rho = 626 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

1) Montrer que dans l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire la densité moléculaire et la pression partielle de l'éther vapeur varient linéairement avec x . Montrer alors en appliquant la loi de Fick que si dn est le nombre de moles d'éther qui se vaporise pendant dt , $\frac{dn}{dt}$ s'exprime en fonction de D , \mathcal{S} , p_s , h , R (constante des gaz parfaits) et T .

2) Montrer qu'en exprimant la relation entre le volume et le nombre n_L d'éther liquide, on aboutit à l'équation différentielle régissant $h(t)$.

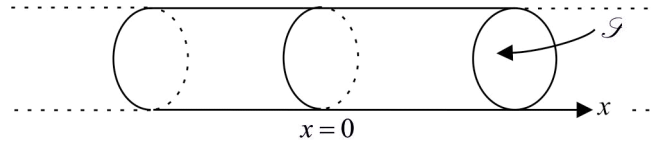
3) Résoudre cette équation différentielle.

A.N : calculer la durée nécessaire pour évaporer totalement l'éther remplissant les trois-quarts d'un tube à essai de longueur totale 20 cm.

réponse : 1) $\frac{dn}{dt} = \frac{D\mathcal{S}p_s}{hRT}$ 2) $h dh = \frac{DMp_s}{\rho RT} dt$ 3) $h = \sqrt{h_0^2 + \frac{2DMp_s}{\rho RT} t}$, $t \approx 2 \text{ j } 9 \text{ h}$.

7. Diffusion 1D en géométrie infinie

On considère une diffusion unidirectionnelle dans un cylindre d'axe Ox , de longueur infinie et de section \mathcal{S} . A $t = 0$, on introduit N_0 particules en $x = 0$.



1) Montrer que $n^*(x,t) = \lambda t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$ est solution de l'équation de diffusion et qu'elle vérifie les conditions aux limites

et les conditions initiales.

2) Calculer λ , conclure.

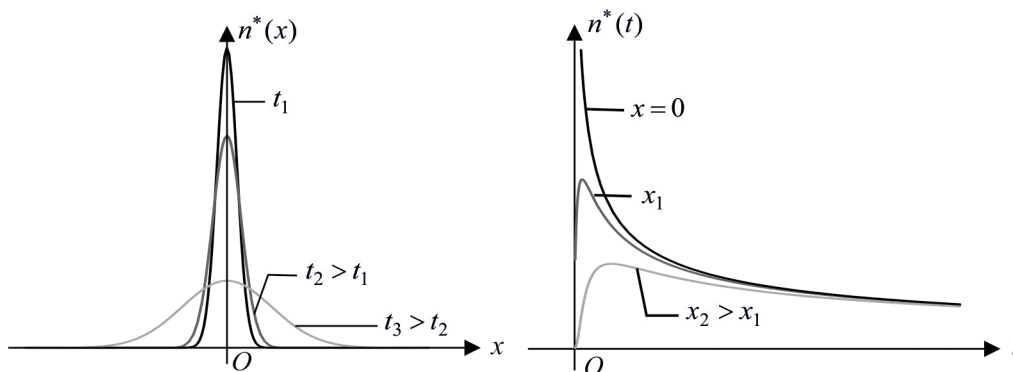
3) Tracer $n^*(x)$ pour différentes valeurs de t et $n^*(t)$ pour $x = 0$ et $x \neq 0$.

4) Calculer la largeur de la courbe $n^*(x)$ à mi-hauteur à la date t : $\Delta x(t)$. Quelle est sa signification physique ?

A.N : pour du sucre dans du café, $D = 0,52 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

En déduire l'ordre de grandeur du temps τ nécessaire à l'homogénéisation du sucre dans une tasse de café de rayon 4 cm.

réponse : 2) $\lambda = \frac{N_0}{\mathcal{S}\sqrt{4\pi D}}$ 4) $\Delta x = 4\sqrt{Dt \ln 2} \Rightarrow \tau \approx 3 \text{ j } 3)$



Compétences fondamentales :

- connaître les deux modes de transferts de particules (diffusion et convection), les définitions des vecteurs densité de courants de particules associés, leur unité, leur signification, la loi de Fick pour les échanges diffusifs.
- savoir effectuer un bilan de particules à 1D et 3D avec ou sans terme de production, afin d'établir une équation aux dérivées partielles régissant $n^*(M,t)$.