DIMENSIONS DES GRANDEURS PHYSIQUES

1 GRANDEUR MESURABLE

Une grandeur caractéristique d'un objet ou d'un phénomène étant définie, elle sera mesurable si l'on sait lui appliquer les opérations élémentaires : addition, soustraction, rapport, multiplication et division par un nombre réel.

Remarque : certaines grandeurs comme le temps, une énergie potentielle, sont repérables (une origine étant choisie) mais non mesurables. Par contre une durée, une énergie reçue, une énergie cinétique, sont, elles, mesurables car indépendantes du choix arbitraire d'une origine.

2 UNITÉS

Pour faire correspondre une valeur numérique à une grandeur X, on choisit arbitrairement une grandeur unité X_u de même espèce. La valeur numérique de X est alors égale à $x = \dfrac{X}{X_u}$.

Exemple : si un phénomène périodique possède une période T_0, toute durée peut s'exprimer sous la forme $\tau = \lambda T_0$. Si on choisit de prendre cette période comme durée unité, la valeur numérique de la durée τ vaut λ.

Plus généralement si X_1 et X_2 sont deux grandeurs de même espèce : $x_1 = \dfrac{X_1}{X_u}$, $x_2 = \dfrac{X_2}{X_u}$

d'où $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{X_2}{X_1}$: **le rapport de deux grandeurs de même espèce est indépendant de l'unité choisie pour exprimer ces deux grandeurs.**

Attention : ce n'est pas vrai lorsque deux unités différentes d'une même grandeur ne sont pas proportionnelles. Par exemple, une température n'est pas directement mesurable en degrés celsius (°C) alors qu'elle l'est en kelvin (K), car alors l'origine $T = 0$ possède un sens physique. **Dans le calcul d'un rapport de températures, il faut obligatoirement exprimer les températures en kelvin**. Ce rapport prend une valeur numérique différente, privée de sens physique, lorsque les températures sont exprimées en °C. On rappelle que si T est la température en K et θ en °C, on a $\theta = T - 273{,}15$.

3 CHOIX DES UNITÉS / SYSTÈME INTERNATIONAL

Les problèmes liés à l'existence de systèmes d'unités propres à chaque pays, voire à chaque région ont conduit à l'adoption d'un système international d'unités simplifiant les échanges scientifiques (et commerciaux ...) et les communications.

Il existe sept unités de base, indépendantes, les autres s'en déduisent par des relations entre les grandeurs correspondantes.

(i) unité de temps : la seconde (s). Symbole dimensionnel : T
(ii) unité de longueur : le mètre (m). Symbole dimensionnel : L
(iii) unité de masse : le kilogramme (kg). Symbole dimensionnel : M
(iv) unité d'intensité de courant électrique : l'ampère (A). Symbole dimensionnel : I
(v) unité de température thermodynamique : le kelvin (K). Symbole dimensionnel : Θ
(vi) unité de quantité de matière : la mole (mol). Symbole dimensionnel : N
(vii) unité d'intensité lumineuse : le candela (cd). Symbole dimensionnel : J

Ces unités sont définies en fixant la valeur numérique de certaines constantes fondamentales :

La fréquence de transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, $\Delta\nu_{Cs}$, est égale à 9 192 631 770 Hz.

La **seconde** est donc définie comme la durée pendant laquelle il y a exactement 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à cette transition.

La vitesse *c* de la lumière dans le vide est égale à $299\,792\,458\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Le **mètre** est donc défini comme la longueur du trajet que parcourt la lumière dans le vide pendant une durée de $1/299\,792\,458\ \text{s}$.

La constante de Planck *h* est égale à $h = 6{,}626\,070\,15\cdot 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$.

Comme $1\ \text{J}\cdot\text{s} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$, le **kilogramme** est donc défini en fixant la valeur de *h*.

La charge élémentaire *e* est égale à $e = 1{,}602\,176\,634\cdot 10^{-19}\ \text{C}$.
Comme $1\ \text{C} = 1\ \text{A}\cdot\text{s}$, l'**ampère** est donc défini en fixant la valeur de *e*.

La constante de Boltzmann k_B est égale à $k_B = 1{,}380\,649\cdot 10^{-23}\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.

Comme $1\ \text{J} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$, le **kelvin** est défini en fixant la valeur de k_B.

La constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A$ est égale à $\mathcal{N}_A = 6{,}022\,140\,76\cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$.
La **mole** est donc définie en fixant la valeur de $\mathcal{N}_A$.

La **candela** est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540\cdot 10^{12}\ \text{Hz}$ et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de $\dfrac{1}{683}$ watt par stéradian.

Le stéradian est l'unité d'angle solide (c'est l'équivalent dans l'espace d'un angle dans le plan). *L'intensité lumineuse caractérise la sensation visuelle humaine*. Cette dernière est maximale pour une longueur d'onde de 555 nm (soit une fréquence de l'onde électromagnétique de 540 THz). Deux objets lumineux ponctuels émettant la même puissance et regardés sous le même angle solide, mais à des longueurs d'onde différentes, ne correspondent pas à la même intensité lumineuse.

La dernière modification des définitions des unités fondamentales est entrée en vigueur le 20 mai 2019.

À chaque changement correspond une précision accrue : le critère retenu dans le choix des unités de base est celui de l'exactitude maximale avec laquelle une unité peut être réalisée expérimentalement.

Par exemple, pour définir une unité de temps, il faut une horloge (système évoluant périodiquement). La seconde était avant 1960 définie comme la fraction $1/86\,164{,}090\,55$ de la durée de la rotation propre de la Terre. Or, la Terre tournant de moins en moins vite autour de son axe de rotation, il a fallu trouver une meilleure horloge. C'est le cas des horloges atomiques permettant la nouvelle définition et dont on peut penser que la période est une vraie période (invariable dans le temps). Des résultats d'observations sont alors utilisables en tout temps.

Il est à noter que l'utilisateur courant ne doit pas être perturbé par le changement : la « taille » de l'unité reste la même.

La définition du mètre revient à fixer la vitesse de la lumière dans le vide à $299\,792\,458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. La définition initiale de 1798 posait $1\,\mathrm{km} =$ longueur d'un méridien terrestre / 40000 (actuellement cette longueur vaut 40008,08 km).

La nouvelle définition du kilogramme obéit à la même logique. L'ancienne définition était la suivante : « le kilogramme est la masse de l'étalon prototype en platine iridié à 10% réalisé en 1889 sous la forme d'un cylindre dont le diamètre est égal à la hauteur ». Cette définition manquait d'universalité (l'étalon était conservé à Sèvres) et surtout de constance dans le temps (la masse de l'étalon variait dans le temps). La nouvelle définition permet, grâce à des expériences menées avec une balance de Kibble (ou balance de Watt), de mesurer des masses avec une meilleure précision que celle obtenue par comparaison avec l'étalon. Cette expérience a permis de mesurer la constante de Planck avec une incertitude relative de $5{,}7 \cdot 10^{-8}$.

4 ANALYSE DIMENSIONNELLE

Toute grandeur peut s'exprimer en fonction des grandeurs de base

En mécanique par exemple, toute grandeur s'exprimera en fonction d'un temps T, d'une longueur L et d'une masse M.

La norme d'une force est d'après $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}}$ le produit d'une masse et d'une longueur et de l'inverse d'un temps au carré et ceci indépendamment du système d'unités dans lequel on l'exprime : on dit qu'une force est homogène à $\mathrm{M \cdot L \cdot T^{-2}}$ ou bien on écrit $[F] = \mathrm{M \cdot L \cdot T^{-2}}$ où $[F]$ est la dimension de *F*. Dans le SI l'unité de *F* est le newton (N), unité dérivée valant $1\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$.

On ne peut faire la somme (ou la différence) de deux termes que s'ils ont même dimension, on ne peut appliquer les fonctions sinus, cosinus, tangente, logarithme, exponentielle, etc., qu'à une grandeur sans dimension. Ces règles permettent de vérifier l'homogénéité d'une formule (une formule non homogène est incorrecte, la réciproque est bien entendu fausse).

Quelques exemples :

— équation différentielle dans un circuit électrique : $\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{(RC)^2} = 0$.

RC étant homogène à un temps, l'équation est homogène car tous les termes de la somme sont homogènes à une tension divisée par un temps au carré :

$$\left[\frac{d^2u}{dt^2}\right]=\left[\frac{1}{RC}\frac{du}{dt}\right]=\left[\frac{u}{(RC)^2}\right]=\frac{[u]}{T^2}$$

Il n'est pas nécessaire de revenir aux grandeurs de base pour vérifier l'homogénéité

— équation différentielle du pendule pesant : $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\dfrac{g}{\ell}\sin\theta=0$.

Comme $[g]=L\cdot T^{-2}$ et $[\ell]=L$, l'équation est homogène car tous les termes de la somme sont homogènes à T^{-2} (un angle est par définition un rapport entre deux longueurs donc une grandeur sans dimension).

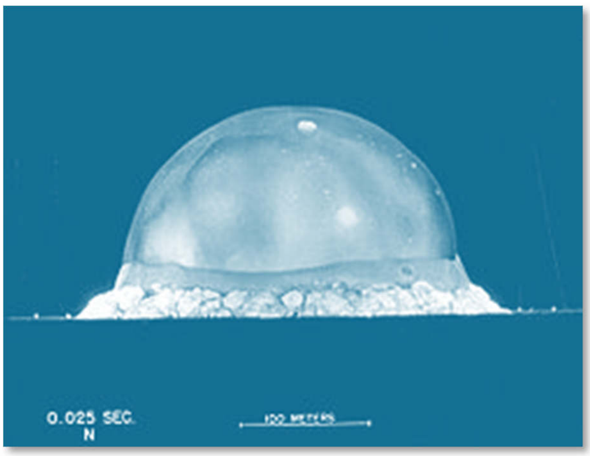
— pression de l'atmosphère de température uniforme : $p(z)=p_0\exp\left(-\dfrac{Mgz}{RT}\right)$ où M est la masse molaire de l'air. Mgz est homogène à une énergie par mole puisque mgz est une énergie potentielle de pesanteur : $[Mgz]=\dfrac{[E]}{N}$. Le terme RT est également homogène à une énergie par mole. En effet $\left[\dfrac{pV}{n}\right]=[RT]$, or une pression est par définition homogène à une force divisée par une surface, soit $[p]=\dfrac{[F]}{L^2}$ d'où $[pV]=[F]L=[E]$.

Le terme $-\dfrac{Mgz}{RT}$ est bien sans dimension, on peut prendre son exponentielle (également sans dimension) et on a donc de part et d'autre de l'égalité deux termes homogènes à une pression.

5 ÉQUATION AUX DIMENSIONS

Une simple analyse dimensionnelle peut parfois permettre de trouver une loi physique.

Le plus illustre exemple est celui du physicien G.I. Taylor qui estima correctement l'ordre de grandeur de l'énergie dégagée par la première explosion atomique le 16 juillet 1945 dans le désert du nouveau-Mexique, simplement à l'aide d'une photo de cette explosion (ci-dessous). La valeur officielle ($8{,}4\cdot 10^{13}$ J) était pourtant maintenue top-secret…



Il exploita le **théorème Π de Vashy-Buckingham** (hors-programme) qui affirme :

Si N grandeurs physiques faisant intervenir k dimension indépendantes sont liées par une relation $f(g_1,...,g_N)=0$, on peut réécrire cette relation en faisant intervenir $N-k$ nombres n_i^* sans dimension : $f(n_1^*,...,n_{N-k}^*)=0$, avec $n_i^* = g_1^{\alpha_{i1}} g_2^{\alpha_{i2}} \cdot \quad \cdot g_N^{\alpha_{iN}}$, les α_{ij} étant des réels.

L'explosion commence à $t=0$. Taylor identifia (c'est le point délicat !) les grandeurs physiques dont dépend le rayon R du nuage à la date t : l'énergie E dégagée quasi-instantanément, la date t, la masse volumique ρ de l'air extérieur : $f(R,E,t,\rho)=0$. Il y a 4 grandeurs et 3 dimensions (M, L et T) donc on ne peut former qu'un nombre n_1^* sans dimension :

$E^\alpha t^\beta \rho^\gamma R^\delta = n_1^*$, soit :

$$\left(\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-2}\right)^\alpha \mathrm{T}^\beta \left(\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3}\right)^\gamma \mathrm{L}^\delta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ 2\alpha-3\gamma+\delta=0 \\ -2\alpha+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=-\alpha \\ \beta=2\alpha \\ \delta=-5\alpha \end{cases}.$$

On en déduit $Et^2\rho^{-1}R^{-5} = {n_1^*}^{\frac{1}{\alpha}} = Cte$ puisque n_1^* est solution d'une équation $f(n_1^*)=0$.
On a donc $R(t) = K\left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}} \propto t^{\frac{2}{5}}$.

D'après la photo, G.I Taylor estima que $R=140\ \mathrm{m}$ au bout de $t=0{,}025\ \mathrm{s}$. Il prit $\rho = 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ et supposa que si les grandeurs caractéristiques sont bien identifiées, la constante K est de l'ordre de 1, si bien que l'énergie dégagée était de l'ordre de $E \approx \frac{\rho R^5}{t^2} \approx 8{,}6\cdot 10^{13}\ \mathrm{J}$.

Prenons un autre exemple : on donne que la célérité de l'onde le long d'une corde dépend de sa tension T et de sa masse linéique μ. On a donc $c = KT^\alpha \mu^\beta$ avec K constante sans dimension.

$$\left(\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}\right)^\alpha \left(\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-1}\right)^\beta = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha-\beta=1 \\ -2\alpha=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{2} \\ \beta=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow c = K\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

. La constante vaut 1, mais on ne peut pas le montrer à partir de l'analyse dimensionnelle.

6 INTÉRÊT DE L'ADIMENSIONNALISATION / LOI D'ÉCHELLE

Prenons l'exemple d'une équation de diffusion thermique : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

On peut à l'aide de grandeurs caractéristiques du problème : amplitude T_0 des variations de température, distance L, durée τ, définir des grandeurs adimensionnées :
$T^* = \dfrac{T}{T_0}$, $x^* = \dfrac{x}{L}$, $t^* = \dfrac{t}{\tau}$, et obtenir une équation elle-même adimensionnée :
$\dfrac{T_0}{L^2}\dfrac{\partial^2 T^*}{\partial {x^*}^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{T_0}{\tau}\dfrac{\partial T^*}{\partial t^*}$ soit $\boxed{\dfrac{\partial^2 T^*}{\partial {x^*}^2} = \dfrac{L^2}{a\tau}\dfrac{\partial T^*}{\partial t^*} = N^*\dfrac{\partial T^*}{\partial t^*}}$ (*) avec $N^* = \dfrac{L^2}{a\tau}$, après les changements de variables $T \to T^*$, $x \to x^*$ et $t \to t^*$

— Si les grandeurs caractéristiques sont bien choisies, on a $\dfrac{\partial^2 T^*}{\partial {x^*}^2} = O(1)$ (de l'ordre de 1) et $\dfrac{\partial T^*}{\partial t^*} = O(1)$. Par exemple, pour L fixée, la durée caractéristique de la diffusion est $\tau = O\left(\dfrac{L^2}{a}\right)$.

— Une équation adimensionnée fait intervenir des paramètres sans dimension comme N^*. Si des problèmes correspondent à la même géométrie et à la même valeur de ces paramètres, on passe de l'un à l'autre en appliquant des facteurs d'échelle.
Par exemple Si $T^*(x^*, t^*, N^*)$ est la solution de (*) correspondant à certaines conditions initiales (T^* connu à $t^* = 0$) et certaines conditions aux limites (T^* connu sur un certain domaine de valeurs de x^*), il suffit pour obtenir la solution d'un de ces problèmes de multiplier x^* par L et t^* par $\tau = \dfrac{L^2}{aN^*}$.

Les lois d'échelle (ou de similitude) étant connues, on peut expérimenter sur un modèle réduit et avec d'autres matériaux, en en déduire les grandeurs en situation réelle.

— La recherche d'une solution numérique est également facilitée par une adimensionnalisation préalable des équations.