

INCERTITUDES DE MESURE / RÉGRESSION LINÉAIRE

1. UN PEU DE VOCABULAIRE ET DE THÉORIE

1.1 Vocabulaire

On cherche à mesurer une grandeur X (le **mesurande**). La **mesure** (ou mesurage) consiste à attribuer une valeur numérique x à cette grandeur (par exemple, on mesure avec un ohmmètre la résistance R d'un conducteur ohmique, l'ohmmètre affiche la valeur numérique $1,54 \text{ k}\Omega$).

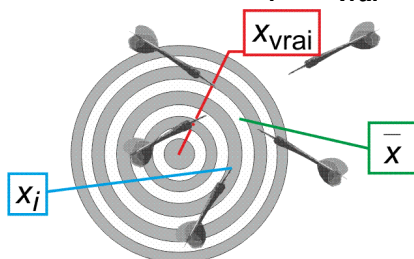
Lorsque l'on effectue dans les mêmes conditions de **répétabilité** plusieurs mesures d'une même grandeur X , les résultats x_j se répartissent autour d'une valeur moyenne \bar{x} . Ceci est dû aux petites variations aléatoires des nombreuses grandeurs influençant la mesure (par exemple les variations de température de chaque composant électronique de l'ohmmètre). Il en résulte **une incertitude sur la mesure** de la grandeur. On définit l'erreur aléatoire **EA** = $x_j - \bar{x}$.

Le résultat du mesurage doit faire apparaître l'information sur l'incertitude de mesure sous la forme d'un intervalle contenant les valeurs probables du mesurande.

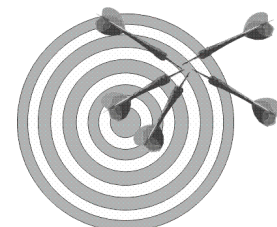
Le résultat d'une mesure est **précis** lorsque les résultats donnés par l'instrument de mesure restent très voisins pour le même mesurande dans les mêmes conditions. L'instrument est alors caractérisé par une bonne **fidélité** (résultats peu écartés de la valeur moyenne). Le résultat de la mesure est **exact** s'il est proche de la valeur vraie x_{vrai} de X (obtenue avec un appareillage de référence). L'instrument est alors caractérisé par sa **justesse**. Un instrument peut donner un résultat précis, mais faux.

L'erreur commise **ES** = $\bar{x} - x_{\text{vrai}}$ lorsque l'on fait une série de mesures dont la valeur moyenne est \bar{x} , est appelée **erreur systématique**. Lorsque l'on ne fait qu'une mesure, on commet une erreur de mesure, somme de l'erreur aléatoire et de l'erreur systématique :

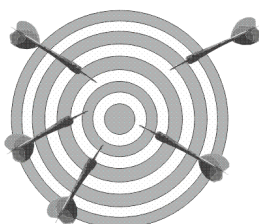
$$E = x_j - x_{\text{vrai}} = x_j - \bar{x} + \bar{x} - x_{\text{vrai}} = EA + ES$$



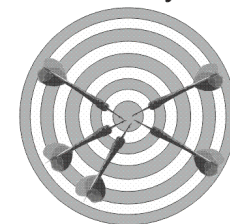
fortes erreurs aléatoires: les x_j s'écartent beaucoup de \bar{x} .
forte erreur systématique: \bar{x} est très éloigné de x_{vrai} .



faibles erreurs aléatoires
forte erreur systématique



fortes erreurs aléatoires
faible erreur systématique



faibles erreurs aléatoires
faible erreur systématique

On peut s'affranchir de l'erreur systématique grâce à de bonnes connaissances en Physique et la construction soignée d'appareils de mesure, alors que l'erreur aléatoire est inévitable. **Dans toute la suite, on suppose qu'il n'y a pas d'erreur systématique.**

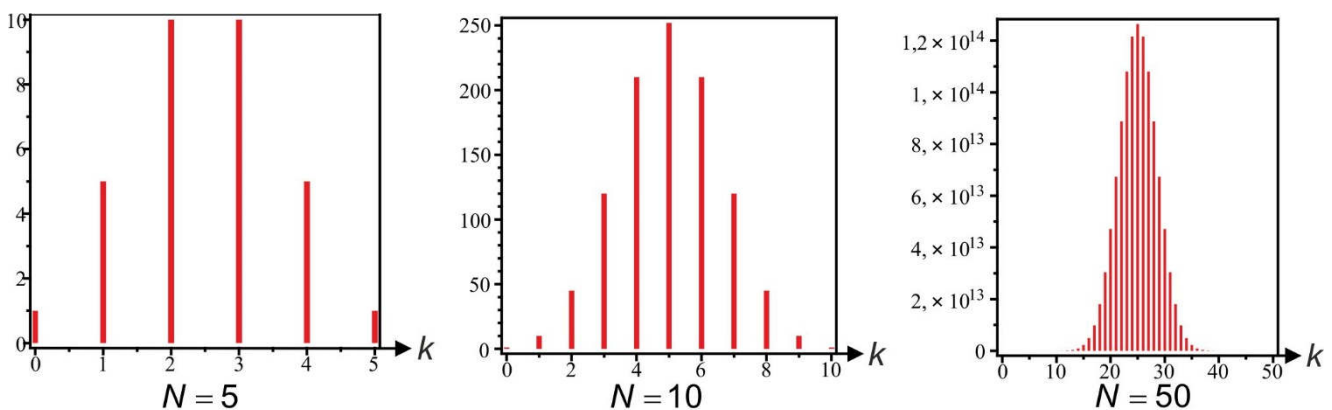
1.2 Exemple : mesure d'une longueur

On cherche à mesurer une longueur L de tissus avec une règle de longueur ℓ connue. L'erreur commise lors de la mesure vient du fait que L (par exemple 15 m) est plus grande que ℓ (par exemple 1m). On doit alors décaler la règle N fois (14 dans notre exemple) pour faire la mesure. On suppose pour simplifier qu'à chaque déplacement de règle, on fait toujours la même erreur $\Delta\ell$ (par exemple 1 cm), par excès ou par défaut, de façon équiprobable.

On peut procéder à une première évaluation par majoration de l'erreur ΔL qui en résulte sur la longueur de tissus mesurée : si à chaque report on se trompe de $+\Delta\ell$, on commettra une erreur $\Delta L = +N\Delta\ell$; si à chaque report on se trompe de $-\Delta\ell$, on commettra une erreur $\Delta L = -N\Delta\ell$. Néanmoins, cette estimation de l'erreur est très exagérée, et cela d'autant plus que N est grand. En effet, les erreurs de $+\Delta\ell$ ont tendance à se compenser avec les erreurs de $-\Delta\ell$, et la probabilité de commettre 15 fois une erreur de $+1$ cm est très faible.

On peut, dans ce cas simple, déterminer la probabilité $\mathcal{P}(k)$ de faire k erreurs par excès et $N-k$ erreurs par défaut, ce qui correspondra à une erreur $\Delta L = (2k - N)\Delta\ell$: il y a $\Omega(k) = \binom{N}{k}$ façons de réaliser k fois l'erreur « $+\Delta\ell$ » sur N mesures, et 2^N possibilités en tout, donc une probabilité $\mathcal{P}(k) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{k}$, proportionnelle à $\Omega(k)$.

Représentons à N fixé $\Omega(k) = \binom{N}{k}$ en fonction de k :



On constate que la probabilité est maximale au voisinage de $k = \frac{N}{2}$ (ce qui correspond à une erreur nulle sur L) puis décroît rapidement selon une courbe en cloche dont on peut démontrer qu'elle se rapproche d'une « gaussienne » quand N est grand.

On en conclut à ce stade que donner des erreurs maximales n'est pas une information utile, puisque la probabilité de commettre ces erreurs maximales est souvent excessivement faible, mais qu'il convient plutôt de donner un intervalle dans lequel on a une certaine probabilité de trouver la valeur vraie du mesurande. Cet intervalle définit l'incertitude de la mesure et non pas l'erreur commise (qui est inconnue).

1.3 Loi normale

Le cas le plus fréquent est celui où l'erreur aléatoire suit la loi normale (gaussienne) :

La probabilité d'obtenir un résultat dans l'intervalle $[x, x + dx]$ vaut $dp = f(x)dx$, avec

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad \text{densité de probabilité}$$

$\bar{x} = x_{\text{vrai}}$ est la valeur moyenne de x

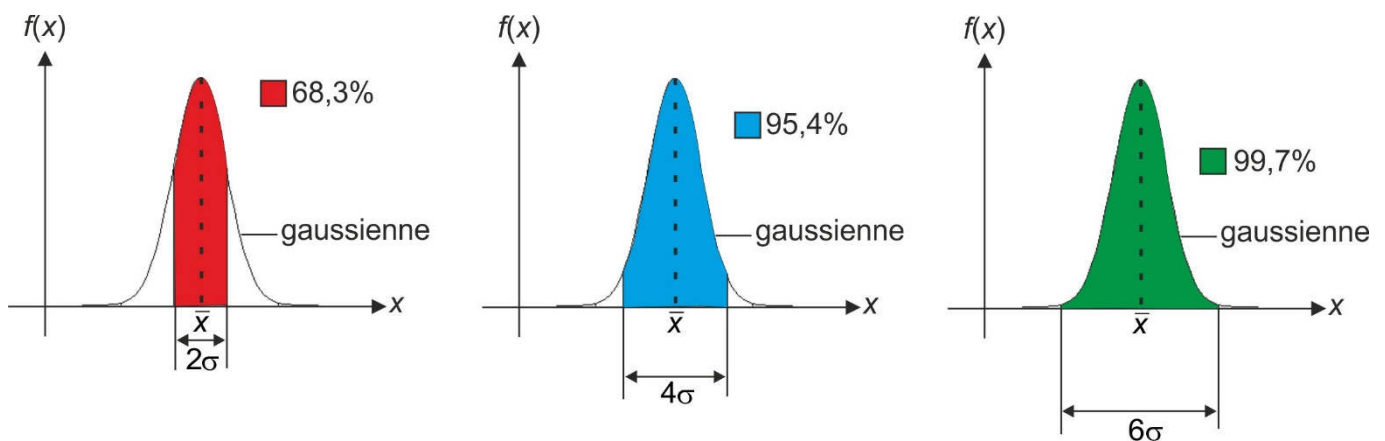
σ l'écart type de la distribution : $\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2}$, mesurant la dispersion des résultats autour de la moyenne

La probabilité que le résultat de la mesure soit compris entre les valeurs x_1 et x_2 vaut :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx \quad (\text{elle vaut évidemment 1 si } x_1 = -\infty \text{ et } x_2 = +\infty)$$

C'est le cas quand l'incertitude sur la grandeur X est la somme de nombreuses petites contributions indépendantes.

Remarque : La fonction **gaussienne** $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$ décroît suffisamment rapidement lorsque x s'écarte de \bar{x} pour que l'on étende les bornes d'intégration de $-\infty$ à $+\infty$ même si la grandeur X est par exemple une grandeur positive.



La probabilité (aire sous la courbe) que le résultat de la mesure soit compris dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ vaut 0,683, elle vaut **0,954** pour l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$ et 0,997 pour $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$.

2. ÉVALUATION DES INCERTITUDES PAR DES MÉTHODES STATISTIQUES (DE TYPE A)

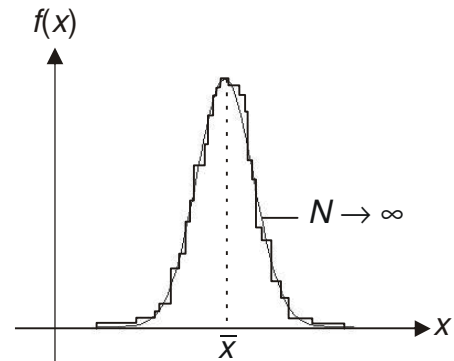
La gaussienne tracée au 1.3 est une courbe continue. En réalité :

- le nombre N de mesures que l'on effectue sur une grandeur donnée est nécessairement fini ;
- un appareil de mesure donne un résultat avec un nombre fini de chiffres significatifs.

La courbe obtenue est donc un histogramme où l'on reporte le nombre de mesures donnant un résultat compris entre x_j et $x_{j+1} = x_j + \Delta x$.

La gaussienne est la limite de ces histogrammes lorsque le nombre N de mesures tend vers l'infini et $\Delta x \rightarrow 0$.

En conséquence la valeur vraie $\bar{x} = x_{\text{vrai}}$ n'est jamais connue : différentes **séries de mesures portant sur la même grandeur vont donner des valeurs moyennes différentes** (réparties autour de la valeur moyenne \bar{x} de la distribution) et des écarts types différents répartis autour de σ .



On montre que l'écart-type σ_{x^*} sur la moyenne est lié à l'écart-type σ de la distribution par la formule $\sigma_{x^*} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$.

On retrouve ainsi $\sigma_{x^*} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$: on n'aurait aucune incertitude sur la valeur vraie $\bar{x} = x_{\text{vrai}}$ avec un nombre infini de mesures. Dans la pratique, il faudrait énormément de mesures pour rendre σ_{x^*} très petit (décroissance lente avec N). On se contente de quelques mesures (une dizaine) en accompagnant le résultat d'un intervalle de confiance tenant compte du nombre de mesures effectuées (d'autant plus grand que N est faible).

Dans le cas où l'on a réalisé N mesures de la même grandeur donnant des résultats x_i , $i \in [1, N]$, on montre que les meilleurs estimateurs de \bar{x} et de σ sont respectivement :

$$x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{et} \quad \sigma^* = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - x^*)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right]}$$

On connaîtrait pour $N \rightarrow \infty$ la valeur moyenne $\bar{x} = x_{\text{vrai}}$ (et l'écart type σ) sans aucune incertitude, x^* et σ^* s'identifiant alors à \bar{x} et σ .

Dans la pratique, on ne peut réaliser qu'un nombre restreint de mesures et la valeur moyenne \bar{x} cherchée est entachée d'une incertitude.

La **loi de répartition de Student** (à $N-1$ degrés de liberté) permet de déterminer la largeur de l'intervalle autour de x^* tel que l'on ait une grande probabilité β (par exemple 95%, ou 99%) de

trouver \bar{x} dans cet intervalle. L'intervalle sera de la forme $\left[x^* - t_{\beta, N} \frac{\sigma^*}{\sqrt{N}}, x^* + t_{\beta, N} \frac{\sigma^*}{\sqrt{N}} \right]$, où les

coefficients de Student $t_{\beta, N}$ sont donnés dans la table de Student suivante :

$\beta \setminus N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
95%	12,7	4,30	3,18	2,77	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23	2,20	2,18	2,16
99%	63,7	9,92	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,17	3,11	3,06	3,01
$\beta \setminus N$	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	∞
95%	2,14	2,13	2,12	2,11	2,10	2,09	2,09	2,08	2,07	2,07	2,06	2,06	1,96
99%	2,98	2,95	2,92	2,90	2,88	2,86	2,84	2,83	2,82	2,81	2,80	2,79	2,58

On remarque pour $\beta = 95\%$ que $t_{\beta,N}$ décroît bien sûr avec N et tend vers $1,96 \approx 2$ qui correspond à l'élargissement de l'intervalle de confiance pour x^* de 68,3% à 95%.

La réalisation de N mesures indépendantes de la même grandeur permet de présenter le résultat de la mesure sous la forme d'un intervalle de confiance à 95% :

$$[x^* - \Delta x, x^* + \Delta x]$$

Il ne faut pas interpréter Δx comme la valeur maximale de l'incertitude mais comme une donnée probabiliste : on a une probabilité de 95 % que le résultat de la mesure de la grandeur X se trouve dans l'intervalle $[x^* - \Delta x, x^* + \Delta x]$

Exemple : Le dosage en ions Fe^{2+} d'une même solution est réalisé simultanément par 9 groupes d'élèves, avec les résultats suivants (en $10^{-2} \cdot \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) pour $c = [\text{Fe}^{2+}]$:

groupe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
résultat	1,024	1,028	0,975	1,031	0,854	1,100	0,921	0,945	0,821

On calcule :

$$c^* = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 c_i = 0,9666 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad \sigma^* = \sqrt{\frac{1}{8} \left[\sum_{i=1}^9 c_i^2 - \frac{1}{9} \left(\sum_{i=1}^9 c_i \right)^2 \right]} = 0,0905 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

L'intervalle de confiance à 95% est donc : $\left[c^* - t_{95\%,9} \frac{\sigma^*}{\sqrt{9}}, c^* + t_{95\%,9} \frac{\sigma^*}{\sqrt{9}} \right]$.

Dans la table de Student donnée au 2.2 on lit $t_{95\%,9} = 2,31$, d'où l'incertitude $\Delta c = 0,0697 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Le résultat se présente donc sous la forme $c = (0,97 \pm 0,07) \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ (niveau de confiance de 95%)

3. ÉVALUATION DES INCERTITUDES PAR D'AUTRES MÉTHODES (DE TYPE B, SOUVENT CELLE DES T.P)

Les méthodes statistiques nécessitent beaucoup de mesures. Bien souvent, on se contente d'une seule mesure de X qui fournit la valeur numérique x_0 . On s'appuie alors sur toutes les informations disponibles... et le bon sens, pour déterminer l'incertitude de la mesure.

Quelques règles simples permettent de donner **les incertitudes-type** $\Delta x = \sigma$ de la mesure (incertitude exprimée sous la forme d'un écart-type).

— (1) Appareil de mesure

Le plus souvent, **le constructeur fournit sans autre information une incertitude « constructeur »** $\Delta_{\text{constructeur}}$.

(1.1) Cas (peu fréquent désormais...) d'un appareil analogique à aiguille.

La classe d'un appareil (à ne pas confondre avec la classe d'isolation) donne l'incertitude relative « constructeur » pour une mesure égale au calibre. Il faut lui rajouter l'incertitude de lecture que l'on prend égale à une graduation.

(1.2) **Cas d'un appareil numérique à affichage digital.**

La précision d'un appareil donne l'incertitude relative « constructeur ». Attention : elle dépend du calibre (lire la notice). Il faut lui rajouter l'incertitude de quelques « digits », c'est-à-dire de quelques unités correspondant au dernier chiffre affiché.

Il est malheureusement très rare que le constructeur donne le taux de confiance (ou le type de densité de probabilité) accompagnant l'incertitude calculée par la formule qu'il propose... N'ayant aucune information spécifique sur la densité de probabilité, on suppose qu'elle est rectangulaire, c'est-à-dire qu'il y a équiprobabilité de trouver la valeur vraie dans l'intervalle :

[valeur mesurée $- \Delta_{\text{constructeur}}$, valeur mesurée $+ \Delta_{\text{constructeur}}$], et une probabilité quasi-nulle hors

de cet intervalle. Pour une telle loi, **on a une incertitude-type** $\sigma = \frac{\Delta_{\text{constructeur}}}{\sqrt{3}}$ dont on considère qu'elle est celle de la distribution réelle (souvent gaussienne).

— (2) **Plage de valeurs** $[x_{\min}, x_{\max}]$ **correspondant aux critères de l'expérimentateur** (par exemple, une plage de positions d'une lentille sur un banc optique telle que l'image d'un objet sur un écran à une distance fixe de l'objet soit vue nette. Comme précédemment, on suppose la densité de probabilité rectangulaire :

$$\text{on prend } x_0 = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} \text{ et } \Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2\sqrt{3}}$$

La même méthode s'applique chaque fois que l'on « borne » l'erreur commise (une graduation pour la valeur lue sur un vernier, épaisseur de la trace sur un écran d'oscilloscope,...)

Pour proposer une **incertitude élargie**, on considère généralement que les erreurs aléatoires sont en réalité distribuées selon une loi normale. En conséquence, on multiplie par un facteur d'élargissement $k = 2$ pour passer de l'incertitude-type à l'incertitude élargie à 95%.

Pour les évaluations de type B, nous nous contenterons des incertitudes-type.

Exemple 1 : on lit sur un conducteur ohmique la couleur des bagues : marron (1), noir (0), rouge (2), or (5%).

On en déduit $R = (10 \times 1 + 0) \cdot 10^2 \Omega = 1 \text{ k}\Omega$ et $\Delta R = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{5}{100} \times 1000 = 28,9 \Omega$. On verra plus loin comment présenter le résultat.

Exemple 2 : Un constructeur indique uniquement une **résolution** de température de $0,01^\circ\text{C}$ (les indications en $^\circ\text{C}$ se font avec deux chiffres après la virgule) pour son thermomètre. On en déduit dans la gamme de température indiquée que $\Delta T = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 0,01 = 5,77 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$.

Exemple 3 : On lit sur un vernier un angle compris entre $152^\circ 27'$ et $152^\circ 28'$. On a donc $\theta = 152^\circ 27,5'$ et $\Delta\theta = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,29'$

Exemple 4 : Un ampèremètre de classe 1 fournit une indication $I = 126,2 \text{ mA}$ sur le calibre 200 mA. On en déduit $\Delta I = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{100} \times 200 = 1,15 \text{ mA}$. On voit ici que la résolution de $0,1 \text{ mA}$ est sans intérêt pour cette mesure puisque l'incertitude est beaucoup plus grande.

Exemple 5 : une source lumineuse étant à l'infini, un élève mesure la distance focale d'une lentille convergente en cherchant à quelle distance il faut placer un écran de la lentille pour trouver une image nette. Il considère que l'image est nette sur l'intervalle de distances **[9,8 cm ; 11,0 cm]**. On a donc $f' = \frac{9,8 + 11,0}{2} = 10,4 \text{ cm}$ et $\Delta f' = \frac{11,0 - 9,8}{2\sqrt{3}} = 0,35 \text{ cm}$.

Exemple 6 : On mesure avec un multimètre TTI 1906 (incertitudes extraites de la notice en annexe) une tension efficace de **1,54297 V** pour une fréquence de 7 kHz sur le calibre 2V. On lit l'incertitude « constructeur » :

$\frac{0,2}{100} \times 1,54297 + 250 \times 0,00001 = 0,00309 + 0,00250 = 0,00559 \text{ V}$ donc une incertitude-type :

$\Delta = \frac{0,00559}{\sqrt{3}} = 3,23 \cdot 10^{-3} \text{ V}$.

4. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

Chiffres significatifs

— Ce sont tous les chiffres présents dans le nombre présenté. Les zéros placés en tête du nombre ne sont pas significatifs. Exemples :

350 : 3 chiffres significatifs

3,5 · 10² : 2 chiffres significatifs

0,35 · 10³ : 2 chiffres significatifs

0,350 · 10³ : 3 chiffres significatifs

— Chiffres significatifs et précision. Si les incertitudes ne sont pas données, on considère par convention que le dernier chiffre significatif est connu à ±0,5. Exemple :

$U = 3,5 \cdot 10^2 \text{ V}$ signifie que $345 \text{ V} < U < 355 \text{ V}$

— lorsque l'on présente le résultat d'un calcul, il faut prendre en compte le nombre de chiffres significatifs des données : (règles simplifiées)

pour une addition (ou une soustraction), le résultat ne peut pas avoir plus de décimales que la donnée qui en a le moins. Exemple :

$1498,95 - 2,153 = 1496,80$ et pas $1496,797$

pour une multiplication (ou une division), le résultat ne peut pas avoir plus de chiffres significatifs que la donnée qui en a le moins. Exemple :

$1498,95 \times 2,153 = 3227$ et pas $3227,23935$

Arrondi

La méthode privilégiée est celle de l'**arrondi arithmétique** :

1. Choisir le dernier chiffre (à droite) à conserver ;
2. Augmenter ce chiffre d'une unité si le chiffre suivant vaut au moins 5 ou conserver ce chiffre si le suivant est strictement inférieur à 5.

Exemples :

Si l'on ne garde que 2 chiffres significatifs, 3,4912 devient 3,5 alors que 3,4499 devient 3,4.

Présentation des résultats

Les incertitudes étant elles-mêmes entachées d'incertitudes : (règles simplifiées)

On ne conservera sauf cas particulier qu'un seul chiffre significatif pour l'incertitude-type Δx .

Pour l'estimation de la grandeur mesurée, on prendra comme dernier chiffre significatif, celui de même position que celui de l'incertitude.

Si l'on reprend les exemples précédents :

Exemple 1 : $R = (1,00 \pm 0,03) \text{ k}\Omega$

Exemple 2 : $T = (121,875 \pm 0,006) \text{ }^\circ\text{C}$

Exemple 3 : $\theta = 152^\circ 27,5' \pm 0,3'$

Exemple 4 : $I = (126 \pm 1) \text{ mA}$

Exemple 5 : $f' = (10,4 \pm 0,4) \text{ cm}$

Exemple 6 : $U = (1,543 \pm 0,003) \text{ V}$

5. PROPAGATION DES INCERTITUDES

La mesure d'une grandeur X fournit un résultat \bar{x} avec une incertitude $\sigma = \Delta x$.

Supposons que la grandeur X ne soit pas directement accessible par la mesure mais liée à des mesures **indépendantes** de **deux grandeurs elles-mêmes indépendantes** X_1 et X_2 dont les valeurs mesurées sont \bar{x}_1 (avec un écart-type σ_1) et \bar{x}_2 (avec un écart-type σ_2) :

$$X = f(X_1, X_2)$$

Si les incertitudes sont supposées petites, on peut effectuer un développement limité à l'ordre 1 de la fonction f autour du point (\bar{x}_1, \bar{x}_2) :

$$x = f(x_1, x_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + (x_1 - \bar{x}_1) \frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + (x_2 - \bar{x}_2) \frac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

où $\frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ et $\frac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ sont les dérivées partielles de X par rapport à X_1 et X_2 , calculées au point (\bar{x}_1, \bar{x}_2) .

Prenons la valeur moyenne de cette expression :

$$\bar{x} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \overline{(x_1 - \bar{x}_1)} \frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \overline{(x_2 - \bar{x}_2)} \frac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \text{ puisque :}$$

$\overline{(x_1 - \bar{x}_1)} = \bar{x}_1 - \bar{x}_1 = 0$ et $\overline{(x_2 - \bar{x}_2)} = \bar{x}_2 - \bar{x}_2 = 0$, les valeurs mesurées étant par définition les valeurs moyennes.

On obtient donc le résultat intuitif :

$$\boxed{\bar{x} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}$$

Il reste à déterminer l'incertitude sur x (due aux incertitudes sur x_1 et x_2).

Par définition de l'écart type, on a $\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{[x - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)]^2}$ d'où :

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \overline{(x_1 - \bar{x}_1)^2} \left[\frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right]^2 + \overline{(x_2 - \bar{x}_2)^2} \left[\frac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right]^2 \\ + 2 \overline{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)} \frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \frac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{aligned}$$

Les variables X_1 et X_2 étant indépendantes, on a $\overline{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)} = 0$ (corrélation nulle) et, par définition $\overline{(x_1 - \bar{x}_1)^2} = \sigma_1^2$ et $\overline{(x_2 - \bar{x}_2)^2} = \sigma_2^2$.

On obtient la **relation fondamentale permettant de calculer l'incertitude sur X** :

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_1)^2 \left[\frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right]^2 + (\Delta x_2)^2 \left[\frac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right]^2}$$

Cette relation peut se généraliser au cas où X dépend de plus de deux variables.

Appliquons cette relation à des cas simples :

$$X = X_1 \pm X_2 \Rightarrow \Delta x = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$$

$$X = X_1^\alpha X_2^\beta \Rightarrow \Delta x = x \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2}$$

On peut parfois se contenter d'une **majoration de l'incertitude** :

$$\Delta x \leq \Delta x_1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right| + \Delta x_2 \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right|.$$

Bien que grossière, cette évaluation de l'incertitude est très répandue car elle permet des calculs rapides.

Par exemple, en prenant la différentielle logarithmique de $X = X_1^\alpha X_2^\beta$ on obtient :

$$\frac{dX}{X} = \alpha \frac{dX_1}{X_1} + \beta \frac{dX_2}{X_2} \text{ qui entraîne en majorant l'incertitude :}$$

$$\frac{\Delta x}{|x|} \leq \left| \frac{\alpha}{x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\beta}{x_2} \right| \Delta x_2. \quad \frac{\Delta x}{|x|} \text{ est l'incertitude relative sur } X.$$

À titre d'exemple, calculons l'incertitude relative sur le facteur de qualité Q et sur la pulsation propre ω_0 d'un circuit RLC série, R , L et C étant connus avec une incertitude relative de 0,5% :

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} = 0,61\%,$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} = 0,35\%$$

Une majoration s'obtient en prenant d'abord la différentielle logarithmique de Q et de ω_0 :

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dR}{R} + \frac{1}{2} \frac{dL}{L} - \frac{1}{2} \frac{dC}{C} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} \leq \frac{\Delta R}{R} + \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} = 1\%$$

$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \frac{dL}{L} - \frac{1}{2} \frac{dC}{C} \Rightarrow \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} = 0,5\%.$$

Comme le facteur de qualité s'écrit également $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ on peut penser à utiliser

$$\text{l'incertitude sur } \omega_0 \text{ qui a été calculée : } \frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2} = 0,87\%.$$

Ce résultat, différent du précédent, est faux car surévalué. En effet, les trois variables L , ω_0 et R ne sont pas indépendantes du point de vue des incertitudes.

6. COMPARAISON DE LA THÉORIE AVEC L'EXPÉRIENCE / RÉGRESSION LINÉAIRE

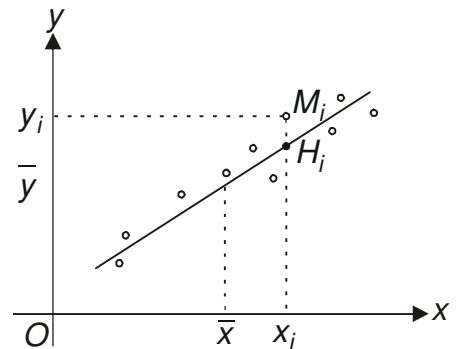
Il ne s'agit ici que de montrer sur un exemple simple comment on peut vérifier expérimentalement que deux grandeurs physiques X et Y sont bien liées par une loi théorique $Y = f(X)$. Certains logiciels de modélisation permettent de traiter des cas plus complexes.

3.1 Vérification d'une loi affine, méthode des moindres carrés

Plaçons nous dans le cas où deux grandeurs physiques X et Y sont liées théoriquement par une relation affine du type $Y = aX + b = f(X)$.

On réalise une série de N mesures indépendantes de ces grandeurs : $(x_i, y_i) \ i \in [1, N]$ et on se pose le problème suivant :

La relation $Y = aX + b$ est-elle bien vérifiée ? Quelles sont alors les valeurs expérimentales de a et b ? Les incertitudes sur ces coefficients ?



Même si la relation théorique est affine, les points de coordonnées $(x_i, y_i) \ i \in [1, N]$ ne sont pas parfaitement alignés du fait des incertitudes de mesure.

Supposons (cas fréquent) l'incertitude relative sur X négligeable devant celle sur Y , les incertitudes $\Delta y_1 = \Delta y_2 = \dots = \Delta y_N = \Delta y = 2\sigma$ sur les $(Y_i) \ i \in [1, N]$ étant toutes identiques. On peut montrer la proposition suivante (principe du maximum de vraisemblance) :

La droite recherchée est telle que la grandeur $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i)]^2 = \frac{S}{\sigma^2}$ est minimale

Graphiquement, S représente la somme des carrés des distances $H_i M_i$, où M_i est le point de coordonnées (x_i, y_i) et H_i le projeté de M_i sur la droite d'équation $Y = aX + b = f(X)$ selon la direction Oy . Cette méthode porte en conséquence le nom de **méthode des moindres carrés**.

La fonction $S(a, b) = \sum_{i=1}^N [y_i - ax_i - b]^2$ passe par un minimum si $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ et $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$, soit :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N [ax_i^2 - x_i y_i + bx_i] = 0 \\ \sum_{i=1}^N [b - y_i + ax_i] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \sum_{i=1}^N x_i^2 + b \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^N x_i + Nb = \sum_{i=1}^N y_i \end{cases}$$

En divisant ces deux dernières relations par N , on obtient $\begin{cases} a\overline{x^2} + b\overline{x} = \overline{xy} \\ a\overline{x} + b = \overline{y} \end{cases}$ en notant avec

une barre les grandeurs moyennes expérimentales.

On a finalement $a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$. L'équation de la droite recherchée (droite de régression de y en x) est donc $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$. Elle passe par le point moyen (\bar{x}, \bar{y}) du nuage de points.

On montre de plus que les écarts-type sur a et b valent :

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\sqrt{N[\overline{x^2} - \bar{x}^2]}} \text{ et } \sigma_b = \sigma \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{N[\overline{x^2} - \bar{x}^2]}}$$

Si σ est connu (données d'un constructeur ou étude statistique sur la mesure de Y), un test appelé test du « χ^2 » (khi-deux) permet de dire si les mesures vérifient bien une loi affine.

Bien entendu, tous ces calculs étant fastidieux, ils sont effectués à l'aide des fonctions statistiques d'une calculatrice ou à l'aide de logiciels qui donnent directement a , b et les incertitudes correspondantes.

3.2 Loi affine supposée vérifiée

Si σ n'est pas connu (il est rarement donné dans les exercices), on peut le déduire des N mesures, **en supposant la loi affine** : on montre que σ est estimé par $\sigma = \sqrt{\frac{S}{N-2}}$. On a alors :

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{S}{N(N-2)[\overline{x^2} - \bar{x}^2]}} \text{ et } \sigma_b = \sqrt{\frac{S\bar{x}^2}{N(N-2)[\overline{x^2} - \bar{x}^2]}}$$

C'est ce que font les logiciels de modélisation.

Aucun test de conformité ne peut alors être appliqué puisque l'on a supposé *a priori* la loi vérifiée (des points qui ne semblent pas du tout alignés traduiront quand même une loi affine, mais avec une grande incertitude σ).

Les valeurs Δa , Δb , sont comme σ , des incertitudes expérimentales, déduites d'un nombre fini de mesures. Pour pouvoir donner les intervalles de confiance tels que l'on ait la probabilité β d'y trouver les coefficients a et b , il faut utiliser la loi de Student à $N-2$ degrés de liberté :

$$\left[a - t_{\beta, N-1} \frac{\sigma_a}{\sqrt{N}}, a + t_{\beta, N-1} \frac{\sigma_a}{\sqrt{N}} \right] ; \left[b - t_{\beta, N-1} \frac{\sigma_b}{\sqrt{N}}, b + t_{\beta, N-1} \frac{\sigma_b}{\sqrt{N}} \right]$$

Quand dans un problème de concours, on demande aux étudiants de vérifier qu'une loi est affine à l'aide de résultats expérimentaux et que les incertitudes de mesures ne sont pas données, cette vérification est en réalité impossible.

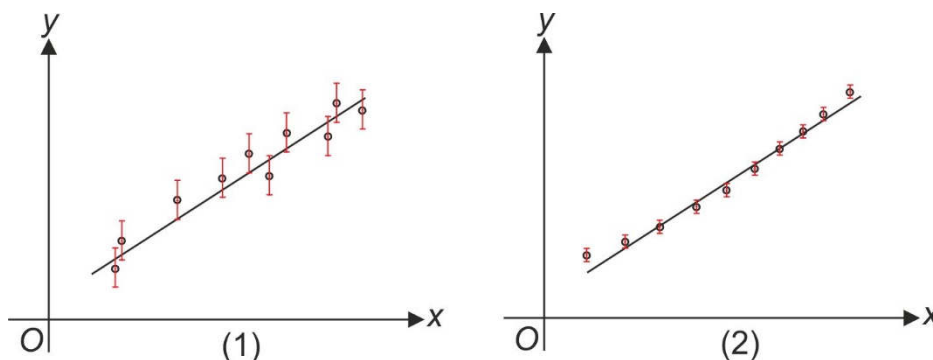
On postule alors que la loi affine théorique est bien vérifiée par l'expérience si le coefficient de corrélation linéaire :

$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}}$ ($-1 \leq r \leq 1$) est en valeur absolue très proche de 1, par exemple

$r^2 > 0,99$. En rentrant les valeurs $(x_i, y_i) i \in [1, N]$ dans le tableur d'une calculatrice (menu statistique), on obtient la valeur de r , de a et de b .

Cette démarche n'a pas de réels fondements théoriques, En effet, ce coefficient ne prend pas en compte les incertitudes de mesure ; il est excellent dès qu'il y a une corrélation, même non linéaire entre Y et X , ce qui est pratiquement toujours le cas dans les sciences expérimentales.

Prenons un exemple :



Bien que les points soient en moyenne plus éloignés de la droite de régression dans le cas (1) que dans le cas (2) : coefficient de corrélation linéaire $|r_1| < |r_2|$, une loi affine entre X et Y est en accord avec l'expérience (1), mais pas avec la (2). En effet, la droite de régression du cas (1) « passe » par les bâtonnets (qui représentent l'incertitude-type ou élargie sur chaque mesure). Simplement, les incertitudes étant grandes, il n'est pas étonnant que les points soient assez dispersés par rapport à cette droite.

Bien que les points soient plus proches en moyenne de la droite de régression dans le cas (2), cette dernière est assez éloignée de certains bâtonnets, ce qui ne permet pas de valider une loi affine. Comme les incertitudes sont plus faibles dans le cas (2), il faudrait que les points soient en moyenne encore plus proches de la droite de régression pour valider une loi affine. On peut remarquer que dans le cas (2), Y et X sont fortement corrélés, mais par une loi non affine.

Pour en savoir plus, quelques annexes

Meilleur estimateur de \bar{x}

Montrons que le meilleur estimateur de \bar{x} lorsque la densité de probabilité est une gaussienne est $x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$.

On a réalisé N mesures de X donnant les valeurs x_i . La probabilité d'obtenir la valeur x_i (à dx près) effectivement obtenue lors de la i^{me} mesure est proportionnelle à $e^{-\frac{(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}}$. La probabilité P d'obtenir l'ensemble des valeurs x_i

(événements indépendants) est donc proportionnelle à :
$$\prod_{i=1}^N e^{-\frac{(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}} = \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right]$$

On applique alors le **principe du maximum de vraisemblance** : la valeur cherchée \bar{x} (inconnue) est estimée en cherchant, parmi toutes les valeurs possibles de \bar{x} , celle x^* qui rend la probabilité P d'obtenir l'ensemble des valeurs x_i maximale.

En effet, la probabilité d'avoir cet ensemble de mesures est un produit de lois gaussiennes : il y a beaucoup de combinaisons possibles, donc beaucoup de résultats expérimentaux possibles, mais tous correspondent pratiquement à la probabilité maximale, et ce d'autant plus que N est grand.

Ceci entraîne $\frac{d}{d\bar{x}} \left[\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right] = -2 \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0$ soit $\bar{x} = x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

Écart-type d'une densité de probabilité rectangulaire.

La densité de probabilité est supposée uniforme, égale à a , entre x_1 et x_2 , et nulle hors de cet intervalle. On a donc

$\int_{x_1}^{x_2} a dx = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{x_2 - x_1}$. On en déduit la valeur moyenne $x_0 = \int_{x_1}^{x_2} ax dx = \frac{a}{2} (x_2^2 - x_1^2) = \frac{x_1 + x_2}{2}$ et l'écart-type :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{x_1}^{x_2} a(x - \bar{x})^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} ax^2 dx - \bar{x}^2 = \frac{a}{3} (x_2^3 - x_1^3) - \bar{x}^2 = \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{3} - \frac{x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2}{4} = \frac{x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2}{12} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)^2}{12} \end{aligned}$$

D'où $\sigma = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{12}}$

Justification de $\sigma_{x^*} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Réalisons une série de N mesures indépendantes de la grandeur X : elle fournit des résultats x_i avec $i \in [1, N]$. On

en déduit la valeur moyenne $x^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$. Les mesures x_i sont distribuées selon une loi normale dont l'écart-type est σ .

La formule de propagation des incertitudes fournit $\sigma_{x^*} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma^2}}{N} = \frac{\sigma\sqrt{N}}{N} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$.

Plus on réalise de mesures, plus l'incertitude sur la valeur moyenne est faible.

Justification de σ^* = $\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - x^*)^2}$ (ou : pourquoi $N-1$ et pas N au dénominateur ?)

On peut recommencer un très grand nombre de fois (en théorie une infinité) des séries de N mesures $x_{i,k}$: pour la

k ième série, on obtient $x_k^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_{i,k}}{N}$. Soit $A_k = \sum_{i=1}^N (x_{i,k} - x_k^*)^2$. On veut donc montrer que $A = \overline{A_k} = (N-1)\sigma^2$

Or $A_k = \sum_{i=1}^N x_{i,k}^2 - 2 \sum_{i=1}^N x_{i,k} x_k^* + \sum_{i=1}^N x_k^{*2} = \sum_{i=1}^N x_{i,k}^2 - 2N x_k^{*2} + N x_k^{*2}$ soit :

$$A_k = \sum_{i=1}^N x_{i,k}^2 - N x_k^{*2} = \sum_{i=1}^N x_{i,k}^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N x_{i,k} \right]^2 = \sum_{i=1}^N x_{i,k}^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N x_{i,k} \right] \left[\sum_{j=1}^N x_{j,k} \right]$$

$$A_k = \sum_{i=1}^N x_{i,k}^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N x_{i,k}^2 \right] - \frac{1}{N} \left[\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} x_{i,k} x_{j,k} \right]$$

$$\text{d'où } \overline{A_k} = \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^N \overline{x_{i,k}^2} - \frac{1}{N} \left[\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \overline{x_{i,k} x_{j,k}} \right] \text{ Or } \sigma^2 = \overline{(x_i - \bar{x})^2} = \overline{x_i^2} - \bar{x}^2 \Rightarrow \overline{x_{i,k}^2} = \overline{x_i^2} = \sigma^2 + \bar{x}^2$$

D'autre part, les mesures étant indépendantes, $(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow (x_i x_j - x_i \bar{x} - x_j \bar{x} + \bar{x}^2) = 0$

soit $\overline{x_i x_j} - \bar{x}^2 - \bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \overline{x_i x_j} - \bar{x}^2 = 0$ d'où $\overline{x_{i,k} x_{j,k}} = \overline{x_i x_j} = \bar{x}^2$

On a finalement bien $A = \frac{N-1}{N} N(\sigma^2 + \bar{x}^2) - \frac{1}{N} N(N-1)\bar{x}^2$, soit $A = (N-1)(\sigma^2 + \bar{x}^2) - (N-1)\bar{x}^2 = (N-1)\sigma^2$

Extrait de la notice du multimètre TTI 1906

ACCURACY			
Accuracies apply for 1 year 18°C to 26°C. Temperature coefficient outside these limits is <0.1% quoted range accuracy per °C. Warm-up time to rated accuracy is 1 hour.			
DC VOLTS			
Range	Accuracy(±)	Res.	Max Input
200mV	0.017% + 3d	1µV	1kV DC or AC Peak any range
2V	0.012% + 3d	10µV	
20V	0.019% + 3d	100µV	
200V	0.019% + 3d	1mV	
1000V	0.019% + 3d	10mV	
RESISTANCE (OHMS)			
Range	Accuracy(±)	Resolution	Max. Input
200	0.025% + 4d	1mΩ	300V DC or RMS continuous any Ohms input any range
2k	0.019% + 3d	10mΩ	
20k	0.019% + 3d	100mΩ	
200k	0.019% + 3d	1Ω	
2M	0.022% + 3d	10Ω	
20M	0.07% + 3d	100Ω	
Max. open circuit voltage 3.5V. Diode Test on 2k range. Audible continuity check available on all ranges.			
AC VOLTS (True RMS)			
Range	Accuracy(±)	Resolution	Max. Input
45Hz - 5kHz	5kHz - 10kHz	10kHz - 20kHz	20kHz - 50kHz
200mV	0.2% + 150d	0.2% + 250d	3% + 500d
2V	0.2% + 150d	0.2% + 250d	0.5% + 300d
20V	0.2% + 150d	0.2% + 250d	0.5% + 300d
200V	0.2% + 150d	0.2% + 250d	0.5% + 500d
750V	0.2% + 150d	-	-
Additional error at crest factor=3 typically 0.7%. Input impedance 1MΩ / <100 pF any range. Max input 750V rms, 1kV peak, any range. Accuracies apply from 10% to 100% of full scale.			
DC AMPS			
Range	Accuracy(±)	Resolution	Max. Input
200µA	0.08% + 12d	1nA	300mV max
2mA	0.08% + 12d	10nA	1A, 300V fuse protected
20mA	0.08% + 12d	100nA	
200mA	0.08% + 12d	1µA	
10A	<2000mA	0.08% + 12d	650mV max
	>2000mA	0.12% + 12d	10A, 300V fused
AC AMPS (True RMS)			
Range	Accuracy(±)	Resolution	Max. Input
Accuracy(±) 45 Hz - 1 kHz			
200µA	0.37% + 100d	300mV max	1A, 300V fuse protected
2mA	0.37% + 100d		
20mA	0.37% + 100d		
200mA	0.37% + 100d		
10A	<2000mA	0.37% + 100d	650mV max
	>2000mA	0.4% + 100d	10A, 300V fuse protected
Additional error at crest factor=3 typically 0.7%. Accuracies apply from 10% to 100% of full scale.			

Bibliographie sommaire :

BIPM (Bureau International des Poids et Mesures), *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure*, [en ligne]. Disponible

<http://www.bipm.org/fr/publications/guides/gum.html>

TAYLOR John, *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques*, Dunod, 2000, 318 p.

BELORIZKY Elie, *Probabilités et statistiques dans les sciences expérimentales*, Nathan Université, collection 128, 1998, 130 p.

VENTZEL Hélène, *Théorie des probabilités*, Editions Mir, 1982, 572 p.

MOREAU René, *Mesures, erreurs et incertitudes en Physique-Chimie*, Université d'Angers [en ligne]. Disponible (et également sur d'autres sites)

http://ead.univ-angers.fr/~capespc/physique/generalites/mesureserreursincertitudes_moreau2.pdf

Groupe des Sciences physiques et chimiques de l'IGEN, *Nombres, mesures et incertitudes en sciences physiques et chimiques*, EDUSCOL [en ligne]. Disponible

http://media.eduscol.education.fr/file/PC/66/3/Ressources_PC_nombres_mesures_incertainces_144663.pdf