TRANSFORMÉE DE LAPLACE

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

1.1 Définition

Soit *f* fonction d'une variable réelle, à valeurs complexes, telle que $f(t)=0\ \forall t<0$.

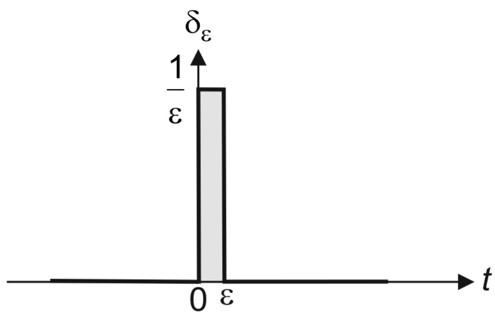
La transformée de Laplace de *f*, quand elle existe, est une fonction complexe *F* de la variable complexe *p*, définie par $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$.

On note $F=\mathrm{L}(f)$ la transformée de Laplace de *f*.

F est appelée « image » de *f*. *f* est appelée « original » de *F*.

1.2 Distribution de Dirac

On obtient cette distribution en prenant la limite des fonctions δ_ε vérifiant : $\begin{cases}\delta_\varepsilon(t)=0\ \forall t\notin\left]0,\varepsilon\right[\\ \delta_\varepsilon(t)=\dfrac{1}{\varepsilon}\ \forall t\in\left]0,\varepsilon\right[\end{cases}$, lorsque $\varepsilon\to 0$.



Ces fonctions vérifient toutes $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)\mathrm{d}t=\varepsilon\cdot\dfrac{1}{\varepsilon}=1$.

$\delta=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon$ correspond donc à une impulsion idéale :

$$\delta(t)=\begin{cases}0 \text{ pour } t\neq 0\\ +\infty \text{ pour } t=0\end{cases},\ \text{et vérifie } \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1.$$

La distribution de Dirac n'est pas une fonction (pour une fonction *f* nulle partout sauf en $t=0$, on aurait $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=0$, alors que $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$).

1.3 Définition plus précise

Dans le cas de la distribution de Dirac, *F*(*p*) n'a pas la même valeur selon que l'intégrale qui la définit a pour borne inférieure 0^+ ou 0^- :

$\int_{0^-}^{+\infty}e^{-pt}\delta(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0^-}^{\varepsilon}e^{-pt}\dfrac{1}{\varepsilon}\mathrm{d}t=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}-\dfrac{1}{\varepsilon p}\left[e^{-pt}\right]_{0^-}^{\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}-\dfrac{1}{\varepsilon p}\left[e^{-p\varepsilon}-1\right]=1$, alors que $\int_{0^+}^{+\infty}e^{-pt}\delta(t)\mathrm{d}t=0$.

Par la suite, on fait le choix de définir la transformée de Laplace par :

$$F(p)=\int_{0^-}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$$

L'avantage est que les valeurs en 0^- des fonctions considérées et de leurs dérivées temporelles sont toutes nulles.

1.4 Propriétés, théorème de la valeur finale et de la valeur initiale

— L est *linéaire* : $\mathrm{L}(\lambda f+\mu g)=\lambda \mathrm{L}(f)+\mu \mathrm{L}(g)$.

— $\mathrm{L}[f'](p)=pF(p)$.

— De même, si $t \mapsto g(t)=\int_{0^-}^{t} f(t')\mathrm{d}t'$ est la primitive de *f* nulle en 0^-, on a $g'(t)=f(t)$ et donc $\mathrm{L}[g'](p)=pG(p)$ où *G* est l'image de *g*, soit $G(p)=\dfrac{F(p)}{p}$.

La transformée de Laplace permet de remplacer la dérivation par une multiplication par *p*, et l'intégration par une division par *p*, donc les équations différentielles par des équations algébriques. C'est ce qui en fait tout son intérêt.

— Théorème de la valeur initiale. On montre que $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p)=f(0^+)$.

— Théorème de la valeur finale. On a $\lim\limits_{p\to 0} pF(p)=f(+\infty)$.

1.5 Tableau de transformées de Laplace

f original	*F* image
distribution de Dirac δ	1
échelon unité *u*	$p \mapsto \dfrac{1}{p}$
rampe $t \mapsto t \cdot u(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{p^2}$
$t \mapsto e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{p+\frac{1}{\tau}}$
$t \mapsto \sin(\omega t)\cdot u(t)$	$p \mapsto \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$t \mapsto e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t)\cdot u(t)$	$p \mapsto \dfrac{\omega}{(p+\frac{1}{\tau})^2+\omega^2}$
$t \mapsto \cos(\omega t)\cdot u(t)$	$p \mapsto \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

$t \mapsto e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t) \cdot u(t)$	$p \mapsto \dfrac{p+\frac{1}{\tau}}{(p+\frac{1}{\tau})^2+\omega^2}$
$t \mapsto t e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{(p+\frac{1}{\tau})^2}$
$t \mapsto t^n e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$	$p \mapsto \dfrac{n!}{(p+\frac{1}{\tau})^{n+1}}$
retard : $t \mapsto f(t-\tau)$	$p \mapsto e^{-\tau p} F(p)$

Dans le tableau précédent, p est un réel strictement positif, ce qui assure l'existence de la transformée de Laplace.

2. APPLICATION À LA RÉPONSE TEMPORELLE

2.1 Réponse temporelle d'un système linéaire à une excitation quelconque

Supposons la sortie s du système liée à l'entrée e par l'équation différentielle linéaire suivante : $\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k s}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell \frac{\mathrm{d}^\ell e}{\mathrm{d}t^\ell}$.

Prenons sa transformée de Laplace, et notons $E = \mathrm{L}(e)$ et $S = \mathrm{L}(s)$ les transformées de Laplace de e et s.

On obtient, en utilisant la linéarité, ainsi que la relation $\mathrm{L}[f'](p) = pF(p)$:

$$\left[\sum_{k=0}^{n} a_k p^k\right] S(p) = \left[\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell p^\ell\right] E(p).$$

La fonction de transfert du système étant $H(p) = \dfrac{\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell p^\ell}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k}$, on aboutit donc à la relation très simple $S(p) = H(p) \cdot E(p)$.

Une fois calculé $S(p) = H(p) \cdot E(p)$, il suffit, en utilisant le tableau précédent, de revenir à l'original $t \mapsto s(t)$ de $p \mapsto H(p) \cdot E(p)$ (souvent après une décomposition en éléments simples).

On trouve ainsi la réponse temporelle à l'excitation quelconque $t \mapsto e(t)$, pour $t > 0$.

Remarquons qu'avec cette méthode, on n'a plus besoin de chercher les valeurs initiales $s(0^+)$, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)$, etc., éventuellement non nulles à cause des discontinuités en $t = 0$.

Exemple : déterminons la réponse du filtre de fonction de transfert $p \mapsto H(p) = \dfrac{H_0}{1+\tau p}$ à un échelon de tension $t \mapsto e(t) = E_0 \cdot u(t)$.

On a $S(p) = H(p) \cdot E(p) = \dfrac{H_0}{1+\tau p} \cdot \dfrac{E_0}{p} = H_0 E_0 \left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right]$ en décomposant en éléments simples. On en déduit en utilisant le tableau que $s(t) = H_0 E_0 \cdot u(t) \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$, soit :

$$s(t) = H_0 E_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \text{, pour } t > 0.$$

On a continuité de s : $s(0^+) = 0$, mais pas de sa dérivée : $\dfrac{ds}{dt}(0^+) = \dfrac{H_0 E_0}{\tau}$.

2.1 Temps de réponse à 5% d'un passe-bas du second ordre

La fonction de transfert est : $H(p) = \dfrac{H_0}{1 + \dfrac{2\sigma p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0{}^2}}$. On l'écrit sous la forme :

$H(p) = \dfrac{H_0 \omega_0{}^2}{p^2 + 2\sigma\omega_0 p + \omega_0{}^2} = \dfrac{H_0 \omega_0{}^2}{[p + \sigma\omega_0]^2 + \omega_0{}^2 (1-\sigma^2)}$. La réponse à un échelon de tension est donc

$S(p) = \dfrac{\omega_0{}^2}{[p + \sigma\omega_0]^2 + \omega_0{}^2 (1-\sigma^2)} \dfrac{H_0 E_0}{p}$.

— Cas où $\sigma < 1$.

On obtient après décomposition en éléments simples :

$$S(p) = H_0 E_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{p + \sigma\omega_0}{[p + \sigma\omega_0]^2 + \omega_0{}^2 (1-\sigma^2)} - \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} \frac{\omega_0 \sqrt{1-\sigma^2}}{[p + \sigma\omega_0]^2 + \omega_0{}^2 (1-\sigma^2)} \right].$$

On revient à l'original en utilisant le tableau des transformées de Laplace :

$s(t) = H_0 E_0 u(t) \left[1 - e^{-\sigma\omega_0 t} \cos\left[\omega_0 t \sqrt{1-\sigma^2} \right] - \dfrac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} e^{-\sigma\omega_0 t} \sin\left[\omega_0 t \sqrt{1-\sigma^2} \right] \right]$, soit :

$s(t) = H_0 E_0 u(t) \left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} e^{-\sigma\omega_0 t} \cos\left[\omega_0 t \sqrt{1-\sigma^2} + \psi \right] \right]$ (relaxation *pseudo-périodique*), où l'on a posé $\cos\psi = \sqrt{1-\sigma^2}$, $\sin\psi = -\sigma$ et $\tan\psi = -\dfrac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}$.

— Cas où $\sigma = 1$.

On a $S(p) = \dfrac{\omega_0{}^2}{[p + \omega_0]^2} \dfrac{H_0 E_0}{p}$, dont la décomposition en éléments simples est :

$$S(p) = H_0 E_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \omega_0} - \frac{\omega_0}{[p + \omega_0]^2} \right].$$

On revient à l'original en utilisant le tableau des transformées de Laplace :

$s(t) = H_0 E_0 u(t)\left[1 - e^{-\sigma\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t}\right]$, soit $s(t) = H_0 E_0 u(t)\left[1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right]$ (relaxation *critique*).

— Cas où $\sigma > 1$.

On obtient après décomposition en éléments simples :

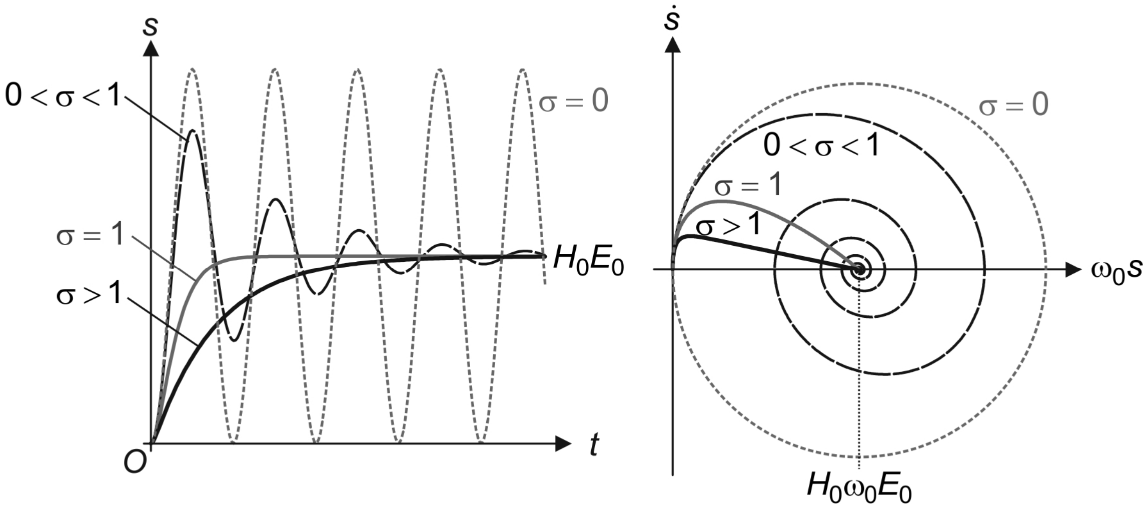
$$S(p) = H_0 E_0 \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1}}{p + \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}\right)\omega_0} - \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}}{p + \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1}\right)\omega_0}\right].$$

On revient à l'original en utilisant le tableau des transformées de Laplace :

$$s(t) = H_0 E_0 u(t)\left[1 + \frac{(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1})e^{-\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}\right)\omega_0 t} - (\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})e^{-\left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1}\right)\omega_0 t}}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}}\right]$$ (relaxation *apériodique*).

Finalement $s(t) \underset{t \to \infty}{\to} H_0 E_0$, sauf dans le cas limite $\sigma = 0$ où il n'y a plus d'amortissement. On a alors $s(t) = H_0 E_0 u(t)[1 - \cos(\omega_0 t)]$: le système est un oscillateur sinusoïdal. On en déduit la signification de ω_0 : c'est la pulsation des oscillations *non* amorties.

— Donnons l'allure des solutions dans les trois cas, ainsi que celle du portrait de phase :



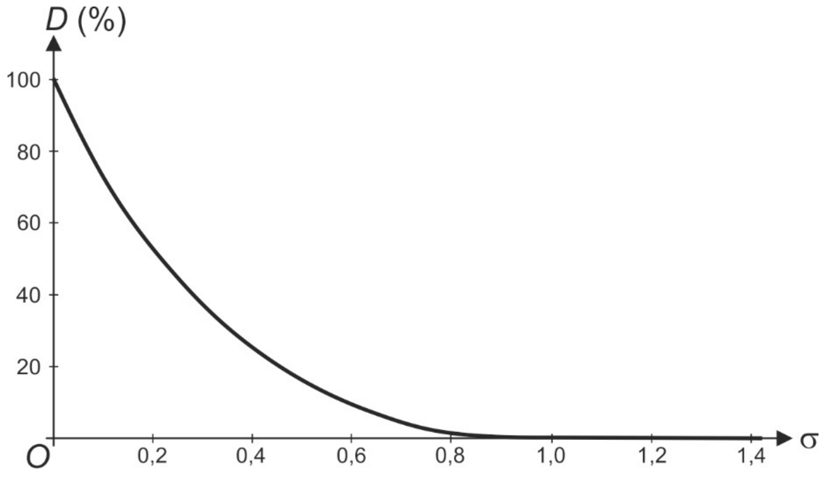
passe-bas du second ordre

La relaxation critique correspond au retour le plus rapide du système, sans oscillations, vers la position d'équilibre $(s = H_0 E_0, \dot{s} = 0)$, qui constitue un attracteur du système dans le portrait de phase.

D'autre part, les courbes restent, pour $\sigma \geq 1$, dans le demi-plan $\dot{s} > 0$: il n'y a pas d'oscillations. En revanche, la trajectoire du régime pseudo-périodique traverse une infinité de fois l'axe $\dot{s} = 0$: il y a donc une infinité d'oscillations, d'amplitudes décroissantes.

— Il n'y a dépassement que si $\sigma < 1$.

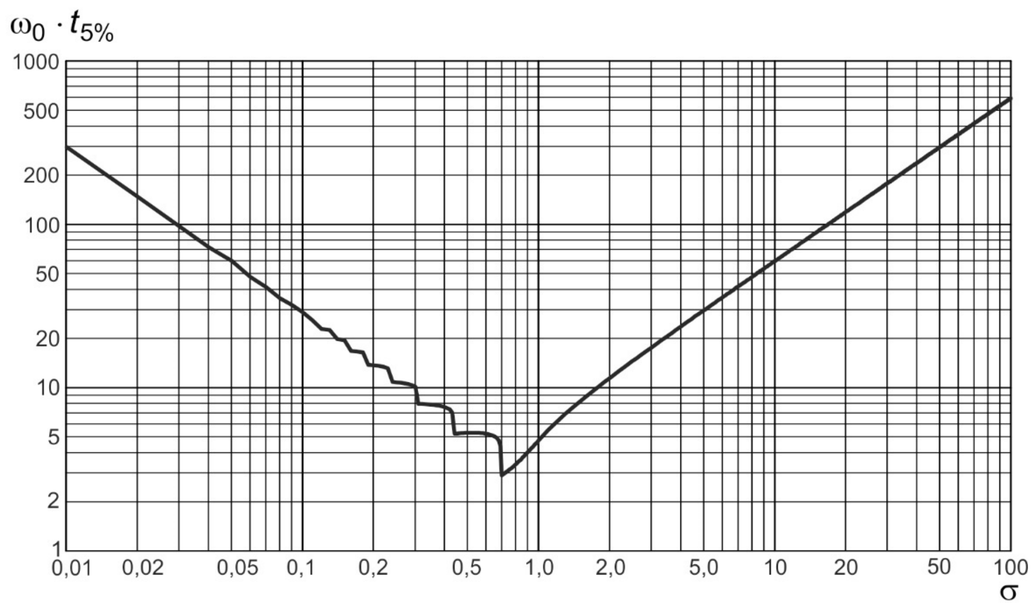
Voici la courbe donnant le dépassement en fonction de σ :



Pour $\sigma = 0$, la sortie vaut $s(t) = H_0 E_0 [1 - \cos(\omega_0 t)]$, ce qui correspond à un dépassement de 100%.

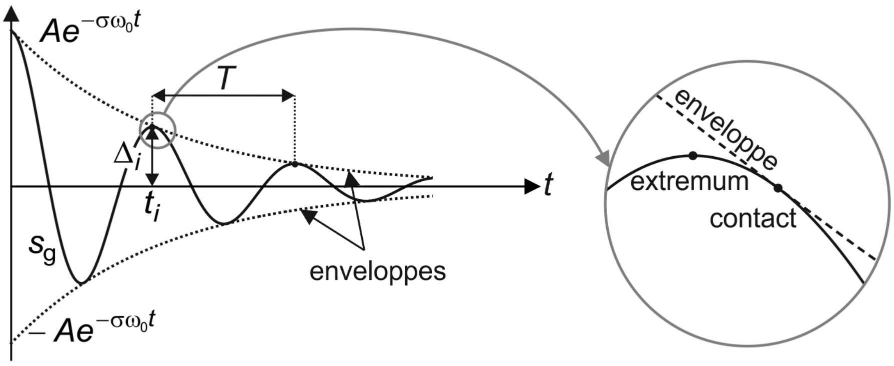
Le temps de réponse à 5% est minimal pour $\sigma = 0{,}69$, valeur pour laquelle le système oscille. Pour une réponse rapide sans dépassement, il faut choisir $\sigma = 1$.

Le diagramme ci-dessous est logarithmique. On y porte σ en abscisses et le temps réduit $\omega_0 t_{5\%}$ (sans dimension) en ordonnées.



Détaillons le cas $0 < \sigma < 1$ qui correspond à :

$s_g(t) = s(t) - H_0 E_0 = A e^{-\sigma\omega_0 t} \cos(\Omega t + \psi)$ avec $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2}$. s_g est le produit d'une fonction exponentielle décroissante $t \mapsto A e^{-\sigma\omega_0 t}$ par une fonction sinusoïdale $t \mapsto \cos(\Omega t + \varphi)$, comprise entre les valeurs -1 et 1. La courbe correspondante se trouve donc entre les courbes représentatives des fonctions $t \mapsto \pm A e^{-\sigma\omega_0 t}$: courbes *enveloppes*.



s_g passe par un maximum toutes les périodes T, et sa courbe représentative rencontre l'enveloppe supérieure (en des points proches mais distincts) avec la même périodicité.

Il est plus aisé expérimentalement de déterminer les valeurs maximales de s_g : dépassements successifs $\Delta_1, \ldots, \Delta_i, \Delta_{i+1}, \ldots$ du même côté de l'asymptote, et de mesurer le décrément logarithmique, défini ainsi :

$\Lambda = \ln\left[\dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}\right] = \ln\left[\dfrac{s_g(t_i)}{s_g(t_i+T)}\right]$ (il est défini de manière à être positif).

Comme $\dfrac{s_g(t_i)}{s_g(t_i+T)} = e^{\sigma\omega_0 T} = e^{\sigma\omega_0 \frac{2\pi}{\Omega}} = e^{\sigma\frac{2\pi}{\sqrt{1-\sigma^2}}}$ on a $\Lambda = \dfrac{2\pi\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}$.

De la valeur expérimentale de Λ on tire le coefficient d'amortissement : $\sigma = \dfrac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2+\Lambda^2}}$.

Les grandes valeurs du facteur de qualité ($Q >> 1$) correspondent à des régimes faiblement amortis pour lesquels $\Omega \approx \omega_0$.

Q fournit d'ailleurs un bon ordre de grandeur du nombre d'oscillations « détectables ».