DIMENSIONS DES GRANDEURS PHYSIQUES

1. GRANDEUR MESURABLE

Soit une grandeur physique qui caractérise un objet ou un phénomène.
Cette grandeur est *mesurable* si on sait lui appliquer les opérations élémentaires : addition, soustraction, rapport, multiplication et division par un nombre réel.

2. UNITÉS

Pour faire correspondre une valeur numérique à une grandeur X, on choisit arbitrairement une grandeur unité X_u de même espèce. La valeur numérique de X est alors égale à $x = X / X_u$.
Par exemple, si un phénomène périodique possède une période T_0, toute durée peut s'exprimer sous la forme $\tau = \lambda T_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Si on choisit de prendre cette période comme durée unité, la valeur numérique de la durée τ est égale à λ. Plus généralement, si X_1 et X_2 sont deux grandeurs de même espèce (par exemple deux masses), $x_1 = X_1 / X_u$, $x_2 = X_2 / X_u$ d'où $x_2 / x_1 = X_2 / X_1$.

Le rapport de deux grandeurs de même espèce est indépendant de l'unité choisie pour exprimer ces deux grandeurs.

Dans le cas du calcul d'un rapport de températures, il faut obligatoirement exprimer ces températures en kelvin et pas en degrés Celsius. En effet, si T est la température en K et θ en °C, on a $\theta = T - 273{,}15$: les deux échelles ne sont pas proportionnelles.
Le rapport de deux températures exprimées en kelvin a un sens physique (par exemple, pour un gaz parfait maintenu à pression constante, c'est un rapport de volume), pas avec des températures en °C.

3. CHOIX DES UNITÉS / SYSTÈME INTERNATIONAL

Les problèmes liés à l'existence de systèmes d'unités propres à chaque pays, voire à chaque région ont conduit à l'adoption d'un système international d'unités simplifiant les échanges scientifiques (et commerciaux ...) et les communications.
Il existe sept unités de base, indépendantes, les autres s'en déduisent par des relations entre les grandeurs correspondantes.

(i) unité de **temps** : la **seconde** (**s**). Symbole dimensionnel : **T**
(ii) unité de **longueur** : le **mètre** (**m**). Symbole dimensionnel : **L**
(iii) unité de **masse** : le **kilogramme** (**kg**). Symbole dimensionnel : **M**
(iv) unité d'**intensité de courant électrique** : l'**ampère** (**A**). Symbole dimensionnel : **I**
(v) unité de **température thermodynamique** : le **kelvin** (**K**). Symbole dimensionnel : Θ
(vi) unité de **quantité de matière** : la **mole** (**mol**). Symbole dimensionnel : **N**
(vii) unité d'**intensité lumineuse** : la **candela** (**cd**). Symbole dimensionnel : **J**

Ces unités sont définies en fixant la valeur numérique de certaines constantes fondamentales :

La fréquence de transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, $\Delta\nu_{Cs}$, est égale à 9 192 631 770 Hz. La **seconde** est donc définie comme la durée pendant laquelle il y a exactement 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à cette transition.
La vitesse c de la lumière dans le vide est égale à $299\,792\,458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Le **mètre** est donc défini comme la longueur du trajet que parcourt la lumière dans le vide pendant une durée de $1/299\,792\,458\ \mathrm{s}$.
La constante de Planck h est égale à $h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$. Comme $1\ \mathrm{J \cdot s} = 1\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$, le **kilogramme** est donc défini en fixant la valeur de h.
La charge élémentaire e est égale à $e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$. Comme $1\ \mathrm{C} = 1\ \mathrm{A \cdot s}$, l'**ampère** est donc défini en fixant la valeur de e.
La constante de Boltzmann k_B est égale à $k_B = 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$. Comme $1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$, le **kelvin** est défini en fixant la valeur de k_B.
La constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A$ est égale à $\mathcal{N}_A = 6{,}022\,140\,76 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$. La **mole** est donc définie en fixant la valeur de $\mathcal{N}_A$.
La **candela** est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12}\ \mathrm{Hz}$ et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de $\frac{1}{683}$ watt par stéradian. Le stéradian est l'unité d'angle solide (c'est l'équivalent dans l'espace d'un angle dans le plan). *L'intensité lumineuse caractérise la sensation visuelle humaine*. Cette dernière est maximale pour une longueur d'onde de 555 nm (soit une fréquence de l'onde électromagnétique de 540 THz). Deux objets lumineux ponctuels émettant la même puissance et regardés sous le même angle solide, mais à des longueurs d'onde différentes, ne correspondent pas à la même intensité lumineuse.

La dernière modification des définitions des unités fondamentales est entrée en vigueur le 20 mai 2019.
À chaque changement correspond une précision accrue : le critère retenu dans le choix des unités de base est celui de l'exactitude maximale avec laquelle une unité peut être réalisée expérimentalement.
Par exemple, pour définir une unité de temps, il faut une horloge (système évoluant périodiquement). La seconde était avant 1960 définie comme la fraction $1/86\,164{,}090\,55$ de la durée de la rotation propre de la Terre. Or, la Terre tournant de moins en moins vite autour de son axe de rotation, il a fallu trouver une meilleure horloge. C'est le cas des horloges atomiques permettant la nouvelle définition et dont on peut penser que la période est une vraie période (invariable dans le temps). Des résultats d'observations sont alors utilisables en tout temps.
Il est à noter que l'utilisateur courant ne doit pas être perturbé par le changement : la « taille » de l'unité reste la même.

La définition du mètre revient à fixer la vitesse de la lumière dans le vide à $299\,792\,458\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. La définition initiale de 1798 posait 1km = longueur d'un méridien terrestre / 40000 (actuellement cette longueur vaut 40008,08 km).

La nouvelle définition du kilogramme obéit à la même logique. L'ancienne définition était la suivante : « le kilogramme est la masse de l'étalon prototype en platine iridié à 10% réalisé en 1889 sous la forme d'un cylindre dont le diamètre est égal à la hauteur ». Cette définition manquait d'universalité (l'étalon était conservé à Sèvres) et surtout de constance dans le temps (la masse de l'étalon variait dans le temps). La nouvelle définition permet, grâce à des expériences menées avec une balance de Kibble (ou balance de Watt), de mesurer des masses avec une meilleure précision que celle obtenue par comparaison avec l'étalon. Cette expérience a permis de mesurer la constante de Planck avec une incertitude relative de $5{,}7\cdot10^{-8}$.

4. ANALYSE DIMENSIONNELLE

Toute grandeur peut s'exprimer en fonction des grandeurs de base

En mécanique par exemple, toute grandeur s'exprimera en fonction d'un temps T, d'une longueur L et d'une masse M.
La norme d'une force est d'après $m\vec{a}=\sum\vec{F}_{\mathrm{ext}}$ le produit d'une masse et d'une longueur et de l'inverse d'un temps au carré et ceci indépendamment du système d'unités dans lequel on l'exprime : on dit qu'une force est homogène à $\mathrm{M\cdot L\cdot T^{-2}}$ ou bien on écrit $[F]=\mathrm{M\cdot L\cdot T^{-2}}$ où $[F]$ est la dimension de F. Dans le SI l'unité de F est le newton (N), unité dérivée valant $1\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}}$.

On ne peut faire la somme (ou la différence) de deux termes que s'ils ont même dimension, on ne peut appliquer les fonctions sinus, cosinus, tangente, logarithme, exponentielle, etc., qu'à une grandeur sans dimension. Ces règles permettent de vérifier l'homogénéité d'une formule (une formule non homogène est incorrecte, la réciproque est bien entendu fausse).

Prenons quelques exemples :

— équation différentielle dans un circuit électrique : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{u}{(RC)^2}=0$.

RC étant homogène à un temps, l'équation est homogène car tous les termes de la somme sont homogènes à une tension divisée par un temps au carré :

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\right]=\left[\frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right]=\left[\frac{u}{(RC)^2}\right]=\frac{[u]}{\mathrm{T}^2}$$

Il n'est pas nécessaire de revenir aux grandeurs de base pour vérifier l'homogénéité

— équation différentielle du pendule pesant : $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{g}{\ell}\sin\theta=0$.

Comme $[g]=\mathrm{L\cdot T^{-2}}$ et $[\ell]=\mathrm{L}$, l'équation est homogène car tous les termes de la somme sont homogènes à $\mathrm{T^{-2}}$ (un angle est par définition un rapport entre deux longueurs donc une grandeur sans dimension).

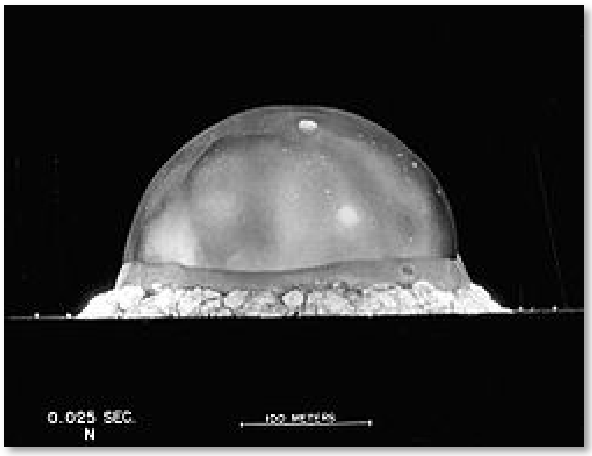
— pression de l'atmosphère de température uniforme : $p(z) = p_0 \exp\left(-\dfrac{Mgz}{RT}\right)$ où M est la masse molaire de l'air. Mgz est homogène à une énergie par mole puisque mgz est une énergie potentielle de pesanteur : $[Mgz] = \dfrac{[E]}{\mathrm{N}}$. Le terme RT est également homogène à une énergie par mole. En effet $\left[\dfrac{pV}{n}\right] = [RT]$, or une pression est par définition homogène à une force divisée par une surface, soit $[p] = \dfrac{[F]}{\mathrm{L}^2}$ d'où $[pV] = [F]\mathrm{L} = [E]$.

Le terme $-\dfrac{Mgz}{RT}$ est bien sans dimension, on peut prendre son exponentielle (également sans dimension) et on a donc de part et d'autre de l'égalité deux termes homogènes à une pression.

5. ÉQUATION AUX DIMENSIONS

Une simple analyse dimensionnelle peut parfois permettre de trouver une loi physique.

Projet Manhattan, explosion de Gadget



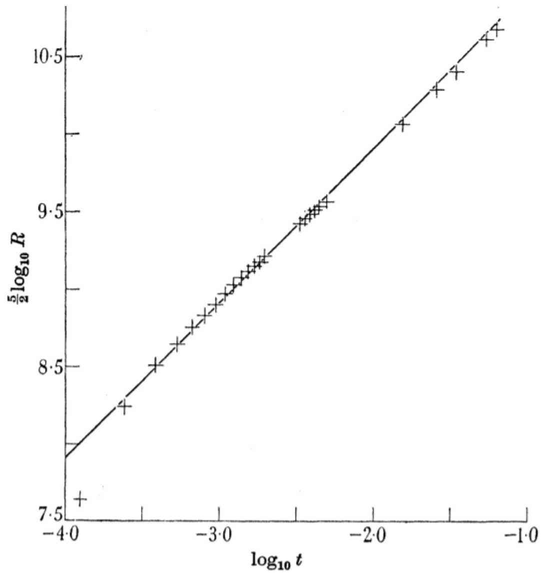
Le physicien G.I. Taylor estima correctement l'ordre de grandeur de l'énergie dégagée par le premier essai d'explosion atomique, Trinity, le 16 juillet 1945 dans le désert du Nouveau-Mexique, simplement à l'aide de séries de photos de cette explosion, comme celle-ci-contre. Il mena pour cela une étude physique détaillée de l'explosion, faisant l'objet de deux articles, que la légende résume à une simple analyse dimensionnelle…

L'explosion commence à $t = 0$. Dans notre approche simplifiée, l'onde de choc générée au point O où la bombe a explosé est sphérique. Elle sépare l'air extérieur de l'air intérieur, fortement comprimé et porté à de grandes températures. Le point délicat est de trouver les grandeurs physiques dont dépend le rayon R du nuage à la date t : l'énergie E dégagée quasi-instantanément, la date t, la masse volumique ρ de l'air extérieur. Il n'est pas évident que l'état de l'air dans le nuage n'intervienne pas, mais c'est une bonne approximation, discutée dans les travaux de Taylor. Ces grandeurs sont donc liées par $f(R, E, t, \rho) = 0$.

L'analyse dimensionnelle commence par former des nombres $N_k^* = E^\alpha t^\beta \rho^\gamma R^\delta$ sans dimension à partir de ces 4 grandeurs, soit : $\left(\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-2}\right)^\alpha \mathrm{T}^\beta \left(\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3}\right)^\gamma \mathrm{L}^\delta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 3\gamma + \delta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\alpha \\ \beta = 2\alpha \\ \delta = -5\alpha \end{cases}$, la valeur de α étant quelconque. On en déduit qu'on ne peut former qu'un seul nombre :

$N_1^* = \left(Et^2\rho^{-1}R^{-5}\right)^\alpha$ qui est une constante numérique puisqu'il est solution d'une équation $F(N_1^*) = 0$. On a donc $Et^2\rho^{-1}R^{-5} = N_1^{*\frac{1}{\alpha}} = Cte$ d'où $R(t) = K\left(\dfrac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}} \propto t^{\frac{2}{5}}$.

D'après la photo ci-dessus, on estime la valeur du rayon $R = 140$ m au bout de $t = 0{,}025$ s. En prenant $\rho = 1{,}25 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, et en supposant que la constante numérique K est de l'ordre de 1, l'énergie dégagée $E \simeq \rho R^5 / t^2$ est de l'ordre de $1{,}1\cdot 10^{14}$ J, très proche de la valeur $8{,}4\cdot 10^{13}$ J obtenue par les physiciens ayant travaillé sur l'élaboration de la bombe, d'après les données de l'explosion. Si l'étude théorique de G.I Taylor présentait en réalité plusieurs modèles permettant d'encadrer cette valeur, l'analyse dimensionnelle, moyennant certaines hypothèses sur les grandeurs physiques pertinentes, permet parfois, *sans étude théorique*, et donc sans mise en équation du problème, de trouver la relation entre ces grandeurs. C'est le cas quand on ne peut former qu'*un seul* nombre sans dimension comme dans l'exemple précédent. Pour l'explosion atomique, l'analyse de la série de photos montre (figure ci-contre issue des articles de G.I Taylor) que $R^{5/2}$ est bien proportionnel à *t*. Pour en déduire une valeur numérique, comme l'énergie dégagée, il faut faire une hypothèse sur la valeur numérique du nombre adimensionné intervenant, ou le déterminer expérimentalement. Lorsqu'on peut former plus de deux nombres sans dimension, on peut réduire l'étude expérimentale à l'établissement de la relation $F(N_1^*,\ldots,N_p^*) = 0$ entre ces nombres.



Célérité d'une onde transversale le long d'une corde vibrante

Prenons un autre exemple. La célérité de l'onde le long d'une corde ne dépend que de sa tension T_0 et de sa masse linéique μ : on a une relation $f(c, T_0, \mu) = 0$.

Ces 3 grandeurs font intervenir 3 dimensions (M, L et T).

Cherchons à former des nombres sans dimension à partir de ces grandeurs : $N_k^* = c^\alpha T_0^\beta \mu^\gamma$.

On en déduit $\left(\text{L}\cdot\text{T}^{-1}\right)^\alpha \left(\text{M}\cdot\text{L}\cdot\text{T}^{-2}\right)^\beta \left(\text{M}\cdot\text{L}^{-1}\right)^\gamma = 1 \Rightarrow \begin{cases} \beta+\gamma=0 & (1) \\ \alpha+\beta-\gamma=0 & (2) \\ -\alpha-2\beta=0 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta+\gamma=0 & (1) \\ \alpha+2\beta=0 & (1)+(2) \\ \alpha+2\beta=0 & (3) \end{cases}$.

On n'a ici que $r = 2$ équations indépendantes : on peut par exemple fixer la valeur de α, et on a alors : $\begin{cases} \beta = -\alpha/2 \\ \gamma = \alpha/2 \end{cases}$.

On peut former $p = N - r = 3 - 2 = 1$ nombre sans dimension. Ce nombre unique N_1^* est une constante numérique puisqu'il est solution d'une équation $F(N_1^*) = 0$.

On a donc $N_1^* = \left[c\sqrt{\dfrac{\mu}{T_0}}\right]^\alpha = Cte \Leftrightarrow c = N_1^{*\frac{1}{\alpha}}\sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}} = K\sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$.

La constante numérique sans dimension K vaut 1, mais on ne peut pas le montrer à partir de l'analyse dimensionnelle.

6. INTÉRÊT DE L'ADIMENSIONNALISATION / FACTEUR D'ÉCHELLE

Prenons maintenant l'exemple de l'équation $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$ de diffusion thermique à une dimension : la température $T(x,t)$ ne varie que selon l'abscisse x et le temps t. Le coefficient a est appelé diffusivité thermique.

On peut à l'aide de grandeurs caractéristiques du problème : amplitude T_0 des variations de température, longueur L, durée τ, définir des grandeurs sans dimension $T^* = T / T_0$, $x^* = x / L$, $t^* = t / \tau$. En effectuant les changements de variables $T \to T^*$, $x \to x^*$ et $t \to t^*$, on obtient : $\frac{T_0}{L^2}\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{a}\frac{T_0}{\tau}\frac{\partial T^*}{\partial t^*}$, soit $\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} = \frac{L^2}{a\tau}\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = N^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*}$ $(*)$, qui est l'équation adimensionnée, avec $N^* = \frac{L^2}{a\tau}$ nombre sans dimension.

Dans notre exemple, pour N^* fixé, notons $T^*_{N^*}(x^*, t^*)$ la solution de (*) correspondant à certaines *conditions initiales* (T^* connu à $t^* = 0$) et certaines *conditions aux limites* (par exemple T^* connu à tout instant sur les frontières du domaine des valeurs de x^*). La solution recherchée est $T(x,t) = T_0 \cdot T^*_{N^*}\left(\frac{x}{L}, \frac{aN^*}{L^2}t\right)$ puisqu'il suffit, pour obtenir la solution du problème, de multiplier T^* par T_0, x^* par L et t^* par $\tau = \frac{L^2}{aN^*}$, c'est-à-dire d'appliquer des facteurs d'échelle. Pour une longueur L fixée, on peut définir la durée caractéristique de la diffusion par $N^* = 1$: $\tau = L^2 / a$.

Supposons un problème défini par :

— Une équation différentielle aux dérivées partielles régissant une grandeur $g(x,y,z,t)$ et contenant des paramètres $(p_1,...,p_N)$.

— Des conditions initiales.

— Des conditions aux limites.

On peut adimensionner l'équation différentielle en faisant intervenir des grandeurs caractéristiques (G_0 pour g, longueur L, temps τ) : on pose $g^* = g / G_0$, $x^* = x / L$, $y^* = y / L$, $z^* = z / L$, $t^* = t / \tau$ (grandeurs réduites). L'équation sans dimension régissant $g^*(x^*, y^*, z^*, t^*)$ fait alors intervenir des nombres sans dimension $(N_1^*,...,N_p^*)$ qui sont fonction de $p_1,...,p_N$, G_0, L et τ.

Les solutions du problème correspondant à la même géométrie réduite, les mêmes conditions initiales réduites, les mêmes conditions aux limites réduites, et à la même valeur des nombres sans dimension, se déduisent toutes de la solution de l'équation adimensionnée, en appliquant des facteurs d'échelle.

Les lois d'échelle (ou de similitude) étant connues, on peut expérimenter sur un modèle réduit et en déduire les grandeurs en situation réelle. D'autre part, la recherche d'une solution numérique est largement facilitée par une adimensionnalisation préalable des équations.