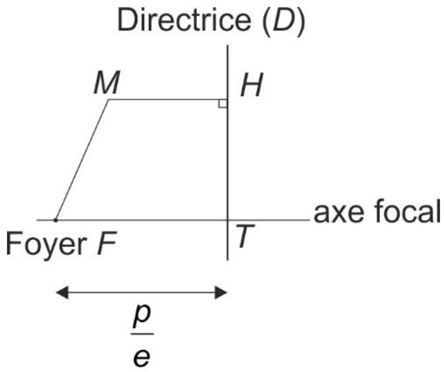
LES CONIQUES

1. DÉFINITION

Une conique est une courbe plane reliant les points M tels que la distance de M à un point fixe (appelé **foyer** de la conique) soit égale à e fois (avec $e > 0$, appelé **excentricité** de la conique) la distance de M à une droite fixe (D) (appelée **directrice** de la conique) :
$(C) = \{M / FM = eHM\}$.

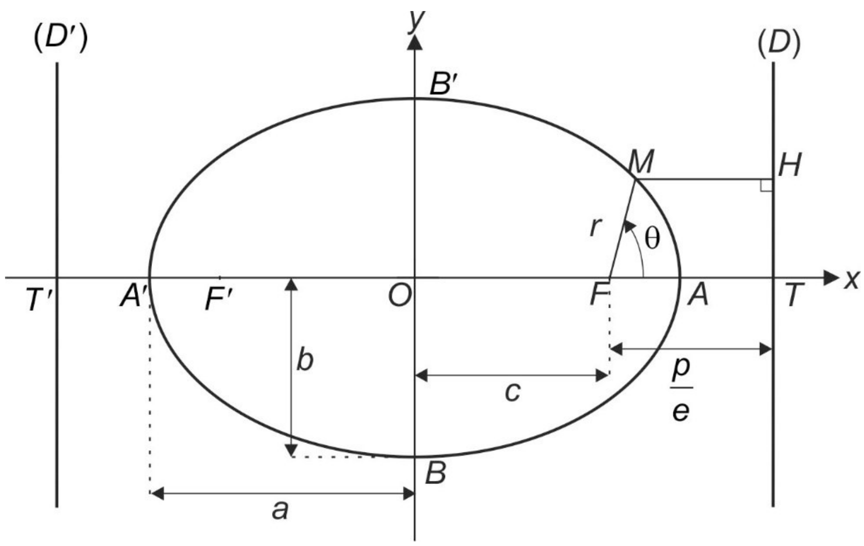


— Si $0 \leq e < 1$, la conique est une ellipse.
— Si $e = 1$, la conique est une parabole.
— Si $e > 1$, la conique est une hyperbole.

On définit également le **paramètre** p de la conique comme e fois la distance du foyer à la directrice, c'est à dire du foyer à son projeté orthogonal T sur la directrice : $FT = \frac{p}{e}$.

L'axe orthogonal à la directrice passant par le foyer est appelé **axe focal**.

2. ELLIPSE



Propriétés. L'ellipse est une conique à centre. Elle est symétrique par rapport à son centre O. Elle possède deux foyers symétriques par rapport à O : F, associé à la directrice (D), et F', associé à (D'). Elle est plus étirée selon un de ses deux axes de symétrie, qu'on appelle grand axe. L'autre axe de symétrie est appelé petit axe.

Soient A et A' ses sommets sur le grand axe, B et B' ses sommets sur le petit axe, on note :
$a = OA = OA'$, a est appelé demi grand axe de l'ellipse.
$b = OB = OB'$, b est appelé demi petit axe de l'ellipse.
$c = OF = OF'$.

On a alors les relations suivantes :

$a^2 = b^2 + c^2$	$e = \frac{c}{a}$	$p = \frac{b^2}{a} = a(1-e^2)$

● **Équation cartésienne**

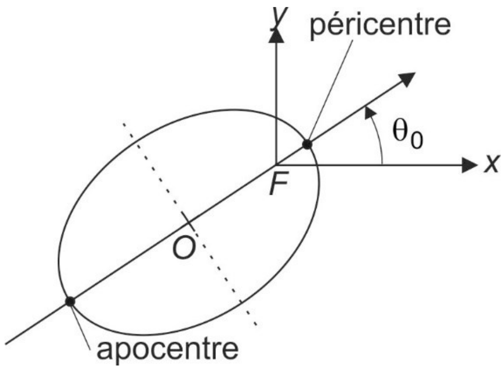
Dans le repère orthonormé (Oxy), l'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Remarquons que si $a = b$, on retrouve l'équation d'un cercle de centre O et de rayon a. Les relations précédentes donnent $c = 0 \Rightarrow e = 0$ et $\frac{p}{e} \to \infty$: un cercle est une ellipse d'excentricité nulle, dont les foyers sont confondus avec le centre et les directrices rejetées à l'infini.

● **Équation polaire avec origine au foyer *F*.**

Par définition de la conique, on a $FM = eHM \Leftrightarrow r = e\left(\frac{p}{e} - r\cos\theta\right)$, d'où l'équation polaire de l'ellipse : $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$: équation polaire d'une ellipse avec origine au foyer F, l'axe polaire étant confondu avec l'axe focal et orienté de F vers le point de l'ellipse le plus proche de F.

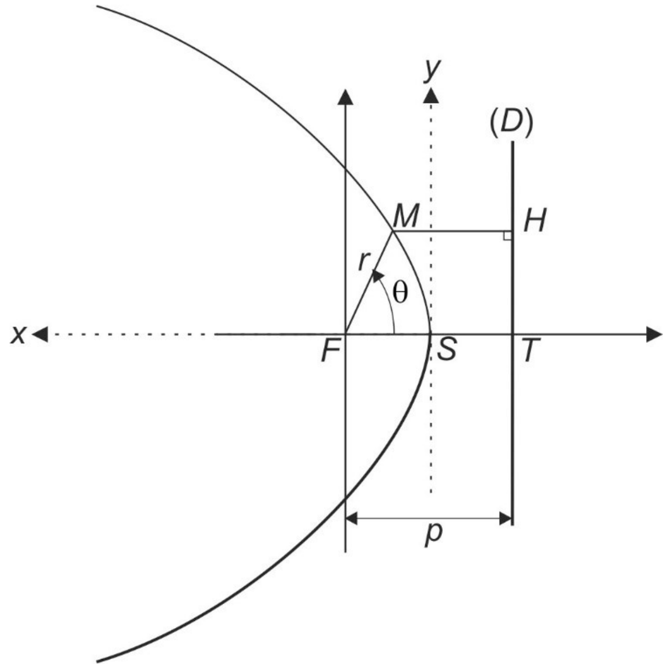
Plus généralement, si on prend un axe polaire quelconque, l'équation polaire de l'ellipse est :
$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$.



Le point le plus proche du foyer est appelé péricentre de l'ellipse (relativement au foyer F), il correspond à la distance minimale $r_{min} = \frac{p}{1+e} = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e) = a - c$, obtenue pour $\theta = \theta_0$. Dans le cas où le foyer est le Soleil, on parle de périhélie. Si le foyer est la Terre, on parle de périgée.
Le point le plus éloigné du foyer est appelé apocentre de l'ellipse (relativement au foyer F), il correspond à la distance maximale :
$r_{max} = \frac{p}{1-e} = \frac{a(1-e^2)}{1-e} = a(1+e) = a + c$, obtenu pour $\theta = \theta_0 + \pi$. Dans le cas où le foyer est le Soleil, on parle d'aphélie. Si le foyer est la Terre, on parle d'apogée.

Retenons enfin l'expression de la **surface d'une ellipse** : $S = \pi ab$.

3. PARABOLE



Propriétés. La parabole n'est pas une conique à centre, elle ne possède qu'un seul foyer *F* et qu'une seule directrice (*D*).
Le sommet *S* de la parabole est tel que $FS = TS$.
Il en résulte que ***S* est le milieu de** $[FT]$.

La distance du foyer à la directrice vaut *p*, puisque $e = 1$. On a donc : $FS = ST = \dfrac{p}{2}$.

● Équation cartésienne

En prenant un repère orthonormé *Sxy*, avec *Sx* axe focal orienté de manière à ca que la parabole corresponde à $x \geq 0$, l'équation de la parabole est : $\boldsymbol{y^2 = 2px}$

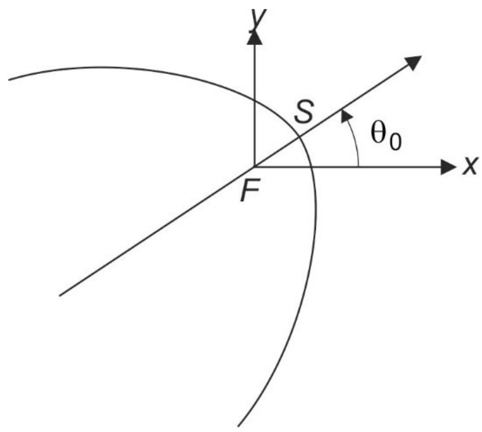
● Équation polaire avec origine au foyer *F*.

On obtient par le même calcul que pour une ellipse : $\boldsymbol{r = \dfrac{p}{1+\cos\theta}}$: équation polaire d'une parabole avec origine au foyer *F*, l'axe polaire étant confondu avec l'axe focal et orienté de *F* vers le sommet de la parabole.

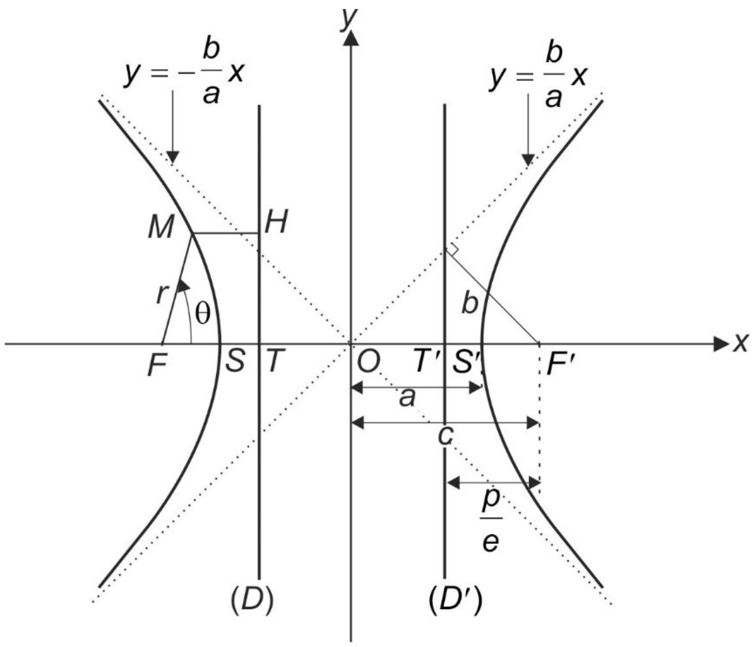
Plus généralement, si on prend un axe polaire quelconque, l'équation polaire de la parabole est $\boldsymbol{r = \dfrac{p}{1+\cos(\theta-\theta_0)}}$.

Le point le plus proche du foyer est le sommet *S*, il correspond à la distance minimale $r_{\min} = \dfrac{p}{2}$, obtenue pour $\theta = \theta_0$.

On trouve, en partant de *F* des points de la parabole dans toutes les directions, sauf pour $\theta = \theta_0 + \pi$, car alors $r \to \infty$.



4. HYPERBOLE



Propriétés. L'hyperbole est une conique à centre. Elle est symétrique par rapport à son centre O. Elle possède deux foyers symétriques par rapport à O : F, associé à la directrice (D), et F', associé à (D'). Elle est constituée de deux branches coupant l'axe focal aux sommets S et S', on note :

$a = OS = OS'$,

$c = OF = OF'$.

On définit le nombre positif b tel que $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$.

On a alors les relations suivantes :

$e = \frac{c}{a}$	$p = \frac{b^2}{a} = a(e^2 - 1)$

● Équation cartésienne

Dans le repère orthonormé Oxy, l'équation de l'hyperbole est : $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Remarquons que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1$. Si $x \to +\infty$, alors $y \to \pm\infty$. Pour $x \to +\infty$ et $y \to +\infty$, le premier terme du produit est infini, le produit ne peut être fini que si le second terme tend vers 0, on a donc une asymptote $y = \frac{b}{a}x$, et, en raisonnant de même pour $x \to +\infty$ et $y \to -\infty$, une asymptote $y = -\frac{b}{a}x$: **une hyperbole possède deux asymptotes**.

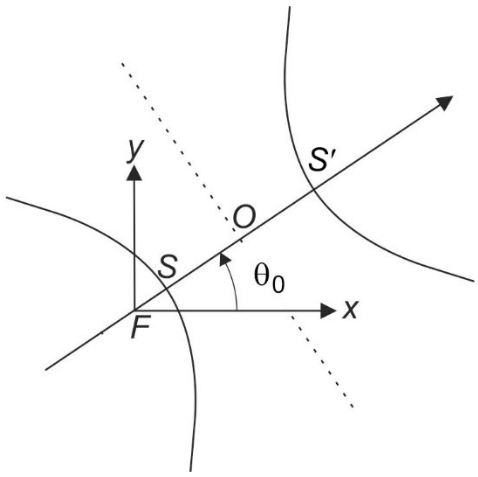
● **Équation polaire avec origine au foyer *F*.**

Attention : l'équation n'est plus la même selon que l'on décrit la branche qui se trouve du même côté de l'axe *Oy* que le foyer ou que l'on décrit l'autre branche :

— Pour celle qui se trouve du même côté : $r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$: équation polaire de la branche d'hyperbole qui se trouve du même côté que le foyer *F*, avec origine au foyer *F*, l'axe polaire étant confondu avec l'axe focal et orienté de *F* vers le sommet de la branche.

— Pour celle qui se trouve de l'autre côté : $r = \dfrac{-p}{1-e\cos\theta}$: équation polaire de la branche d'hyperbole qui se trouve du côté opposé au foyer *F*, avec origine au foyer *F*, l'axe polaire étant confondu avec l'axe focal et orienté de *F* vers le sommet de la branche.

Plus généralement, si on prend un axe polaire quelconque, l'équation polaire de la branche d'hyperbole du même côté que *F* est $\boldsymbol{r = \dfrac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}}$, et celle de la branche qui se trouve du côté opposé : $\boldsymbol{r = \dfrac{-p}{1-e\cos(\theta-\theta_0)}}$.



Dans le premier cas, le point le plus proche du foyer est le sommet *S*, il correspond à la distance minimale :

$r_{\min} = \dfrac{p}{1+e} = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e) = a-c$, distance obtenue pour $\theta = \theta_0$. On ne trouve plus de point de la branche considérée dès que θ devient supérieur en valeur absolue à $\theta_{\lim} = \theta_0 + \arccos\left(-\dfrac{1}{e}\right)$, valeur pour laquelle le dénominateur s'annule et *r* tend vers l'infini.

Dans le deuxième cas, le point le plus proche du foyer est le sommet S', il correspond à la distance minimale :

$r_{\min} = \dfrac{p}{e-1} = \dfrac{a(e^2-1)}{e-1} = a(1+e) = a+c$, distance obtenue pour $\theta = \theta_0$.

On ne trouve plus de point de la branche considérée dès que θ devient supérieur en valeur absolue à $\theta_{\lim} = \theta_0 + \arccos\left(\dfrac{1}{e}\right)$, valeur pour laquelle le dénominateur s'annule et *r* tend vers l'infini.

Notons enfin que le paramètre *b* possède une signification géométrique : ***b* est la distance entre un foyer et une asymptote**.