1. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1.1 Dérivées partielles

$(x,y)\overset{f}{\mapsto} f(x,y)$ de classe C^1

$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ dérivée de *f* par rapport à la variable *x*, l'autre variable *y* étant fixée

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ si pas d'ambiguïté mais attention !

$$(T,V)\overset{S}{\mapsto} S(T,V)$$

$$(T,p)\overset{S}{\mapsto} S(T,p)$$

entropie dans les deux cas, même notation (en physique) mais pas la même fonction !

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \neq \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

1.2 Théorème de Schwarz

si $\begin{array}{l} (x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{array}$ de classe C^1 , on peut former : $\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \end{array}$

Schwarz : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

2. DIFFÉRENTIELLES

2.1 Fonction d'une seule variable

développement de Taylor : $f(x+\delta x) = f(x) + \delta x \cdot f'(x) + \dfrac{(\delta x)^2}{2!} \cdot f''(x) + O\left[(\delta x)^3\right]$

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x) + \frac{\delta x}{2!} \cdot f''(x) + O\left[(\delta x)^2\right]$$

on note dx un accroissement δx **infiniment petit**

$\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$ **différentielle** de f en x

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

pas de $(\mathrm{d}x)^2$, $(\mathrm{d}x)^3$ dans df car :

$$A\mathrm{d}x + B(\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}x\left[A + B\mathrm{d}x\right] = \mathrm{d}x \cdot \lim_{\delta x \to 0}\left[A + B\delta x\right] = A\mathrm{d}x$$

un infiniment petit du premier ordre dx est infiniment plus grand qu'un infiniment petit du second ordre $(\mathrm{d}x)^2$, qui n'intervient que si $A = 0$

exemple : $F(x) = \exp(2\sqrt{x}) = \exp\left[g(x)\right] = f\left[g(x)\right]$ avec $g(x) = 2\sqrt{x}$

$$\Rightarrow \mathrm{d}F = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \exp\left[g(x)\right] \cdot g'(x) \cdot \mathrm{d}x = \frac{\exp(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

2.1 Fonction de plusieurs variables

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + \delta x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \delta y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left[(\delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\delta x \cdot \delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (\delta y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$

à des termes d'ordre 3 près

$$\mathbf{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{d}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\mathbf{d}\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\mathbf{d}\boldsymbol{x} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\mathbf{d}\boldsymbol{y}$$ **différentielle** de f en (x,y)

c'est la variation *infinitésimale* de f au voisinage de (x,y) quand x varie de $\mathrm{d}x$ et y de $\mathrm{d}y$

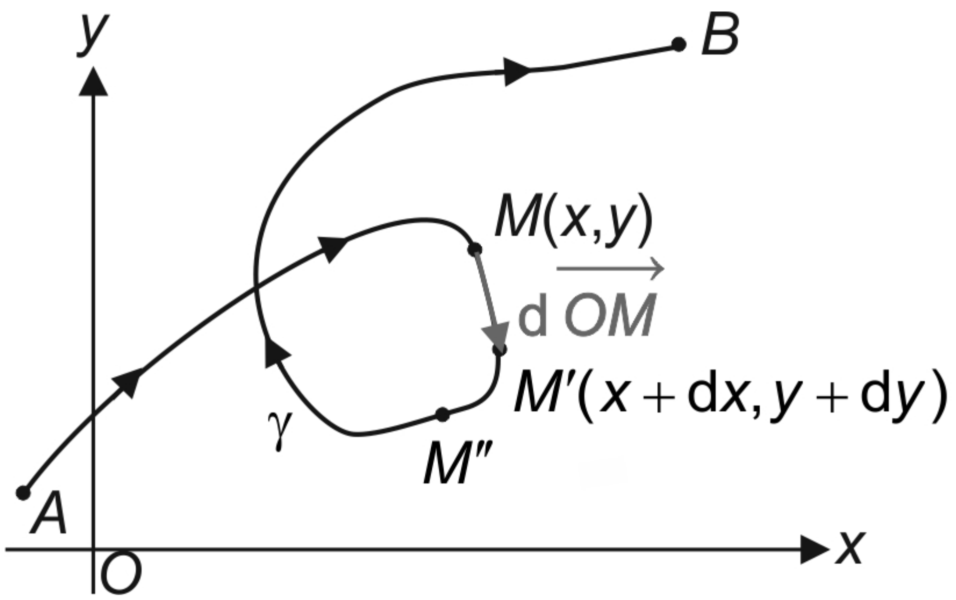
exemple : $(x,y) \overset{f}{\mapsto} x^2 \ln(y) \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = 2x\ln(y)\mathrm{d}x + \frac{x^2}{y}\mathrm{d}y$

remarque : différentielle logarithmique

$pV^\gamma = Cte \Rightarrow \ln(pV^\gamma) = \ln(Cte) \Rightarrow \ln p + \gamma \ln V = \ln(Cte)$ à entropie S constante

on différencie : $\quad \frac{\mathrm{d}p}{p} + \gamma\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S (p_0, V_0) = -\gamma\frac{p_0}{V_0}$

2.2 Intégration



exemple d'une fonction de deux variables :

$\displaystyle\int_{A(x_A,y_A)}^{B(x_B,y_B)} \mathrm{d}f$ est la somme, le long d'un chemin

γ menant de *A* à *B*, des différences :

$$\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y)$$

entre des points $M(x,y)$ et $M'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$ infiniment proche de M

comme $[f(M'') - f(M')] - [f(M') - f(M)] = f(M'') - f(M)$

$\displaystyle\int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$ est indépendant du chemin γ suivi

3. FORMES DIFFÉRENTIELLES

3.1 Définition

Pour un système décrit par deux variables *x* et *y*, une ***forme différentielle*** s'écrit : $\delta \boldsymbol{W} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathbf{d}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathbf{d}\boldsymbol{y}$

exemple : champ de force $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{e}_x + Q(x,y)\vec{e}_y$

une particule se déplaçant de $\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y$ entre t et $t + \mathrm{d}t$

reçoit un travail élémentaire $\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

Une forme différentielle est donc définie pour une *transformation infinitésimale* correspondant à une variation d*x* de *x* et d*y* de *y* au voisinage de (*x*,*y*)

si on somme les formes différentielles le long d'un chemin γ :

$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}}^{\gamma} = \int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \delta \boldsymbol{W}$ **dépend *a priori* du chemin γ suivi entre *A* et *B***

3.2 Théorème de Poincarré

$W_{A\to B}^{\gamma}$ ne dépend que de A et B, et donc pas de γ

$$\Leftrightarrow \exists\, f:(x,y)\mapsto f(x,y)\ /\ W_{A\to B}^{\gamma}=f(B)-f(A) \Leftrightarrow \delta W = f(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)-f(x,y)=\mathrm{d}f$$

$$\Leftrightarrow \exists\, f\ /\ \delta W = P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\Leftrightarrow \exists\, f\ /\ \begin{cases} P(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ Q(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\boxed{\exists\, f:(x,y)\mapsto f(x,y)\ /\ \delta W=\mathrm{d}f \ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}}$$ **théorème de Poincarré**

exemple 1 : $\delta W = y\mathrm{d}x$ n'est pas une différentielle car : $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$

$\Rightarrow W_{A\to B}^{\gamma}$ dépend de γ

exemple 2 : $\delta W = 2x\sin(y)\mathrm{d}x + \left[x^2\cos(y) - 1\right]\mathrm{d}y$ peut être une différentielle car

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos(y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\delta W = \mathrm{d}f \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(y) \quad (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos(y) - 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow f(x,y) = x^2\sin(y) + \varphi(y)$$

Attention ! On a intégré à *y* constant, donc φ *n'est pas une constante*, mais n'importe quelle fonction ne dépendant que de *y*

$f(x,y) = x^2\sin(y) + \varphi(y)$ dans (2)

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos(y) + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} \underset{\text{aussi}}{=} x^2\cos(y) - 1 \Rightarrow \varphi(y) = -y + Cte$$

finalement $\delta W = \mathrm{d}f$ avec $f(x,y) = x^2\sin(y) - y + Cte$

notations :

transformation élémentaire	δW **forme différentielle**	$\mathrm{d}f$ **différentielle**
transformation finie (intégrale)	$W^{\gamma}_{A\to B} = \int_A^B \delta W$	$\Delta f = \int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$

4. APPLICATIONS

4.1 Fonctions implicites

soient x, y et z liées par $f(x,y,z) = 0$ $(*)$, par exemple $f(x,y,z) = yx^3 + z\ln(x) + 1 = 0$

$\Rightarrow (y,z) \overset{x}{\mapsto} x(y,z)$ fonction *implicite* en différenciant $(*)$: $\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \mathrm{d}z = 0$

car f est une constante

si on maintient z constant ($\mathrm{d}z = 0$), on a $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \mathrm{d}y = 0$ à $z = Cte$

$$\boxed{\Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}}}$$

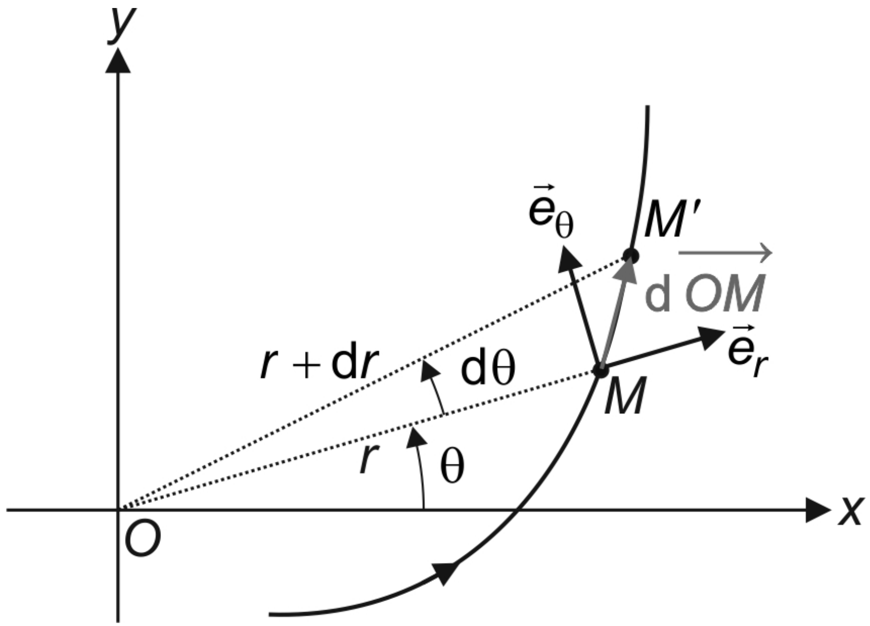
et de même : $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}}$

et $\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1}$

on obtient ainsi des relations entre les dérivées partielles

4.2 Calculs intégraux

(i) courbe d'équation polaire $r(\theta)$



$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$$

car $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = \vec{e}_\theta$

longueur élémentaire $\mathrm{d}L = \left\|\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}\right\| = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\| = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2} = \mathrm{d}\theta\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}$

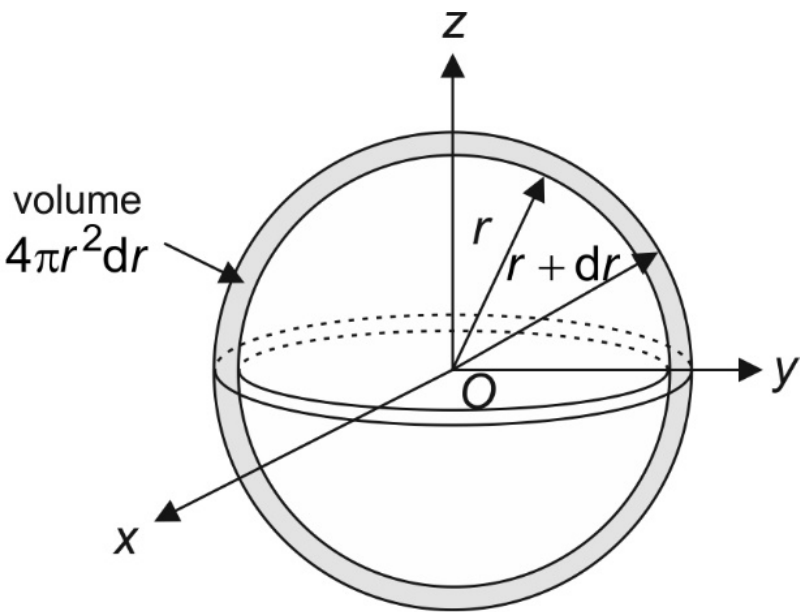
(en prenant $\mathrm{d}\theta > 0$)

longueur entre θ_{min} et θ_{max} : $\boxed{L = \displaystyle\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \left\|\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}\right\| = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta}$

(ii) charge d'une sphère de centre O et de rayon R

si la charge volumique ρ ne dépend que de r (symétrie sphérique), on peut découper la sphère en volumes élémentaires compris entre deux sphères de rayons r et $r+\mathrm{d}r$ (coquille sphérique)

$$\mathrm{d}\mathscr{V} = \mathscr{V}(r+\mathrm{d}r) - \mathscr{V}(r) \text{ avec } \mathscr{V}(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

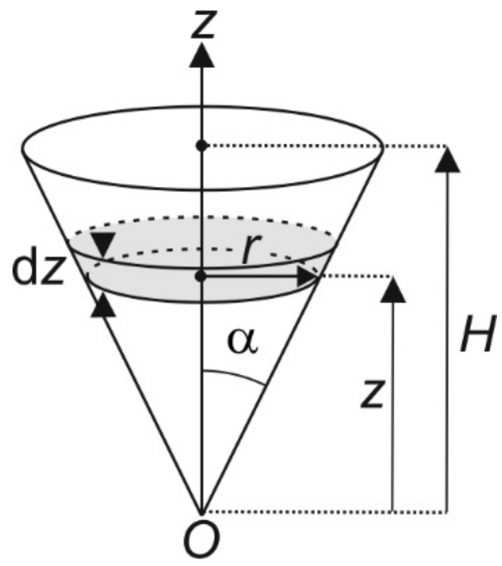


$$\Rightarrow \mathrm{d}\mathscr{V} = 4\pi r^2\mathrm{d}r \text{ et } \boxed{Q = \int_{r=0}^{R} \rho(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r}$$

si δr petit accroissement fini , on aurait :

$$\delta\mathscr{V} = \mathscr{V}(r+\delta r) - \mathscr{V}(r) = \frac{4}{3}\pi\left[(r+\delta r)^3 - r^3\right] = \frac{4}{3}\pi\left[3r^2\delta r + 3r(\delta r)^2 + (\delta r)^3\right] \neq 4\pi r^2 \delta r$$

(iii) volume d'un cône



$\mathrm{d}\mathscr{V} = \pi r^2 \mathrm{d}z$ volume d'une tranche entre z et $z + \mathrm{d}z$

(rigoureux car l'écart entre le volume d'une hauteur dz de cylindre et de cône est du second ordre):

$$\Rightarrow \mathscr{V} = \int_{z=0}^{H} \pi r^2 \mathrm{d}z = \int_{z=0}^{H} \pi \tan^2\alpha \cdot z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{3}\pi \tan^2\alpha \cdot H^3$$

(iv) énergie reçue par un conducteur ohmique

travail reçu entre t et $t + \Delta t$

puissance moyenne reçue à t : $P = \dfrac{W}{\Delta t}$

travail (élémentaire) reçu entre t et $t + \mathrm{d}t$

puissance instantanée reçue : $p(t) = Ri^2(t) = \dfrac{\delta W}{\mathrm{d}t}$

attention : δW est une forme différentielle et pas une différentielle

$$\Rightarrow p(t) = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$$ n'est **pas** une dérivée ($W(t)$ n'a pas de sens)

travail reçu entre t_1 et t_2 (fini) :

$$\boxed{W = \int_{t_1}^{t_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} R i^2(t)\mathrm{d}t}$$