1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Pour *f* fonction complexe à variable réelle telle que $f(t) = 0 \ \forall t < 0$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) \mathrm{d}t$$

F(*p*) transformée de Laplace, fonction complexe de la variable complexe *p*, notée :

$$F(p) = \mathrm{L}[f(t)]$$

« image » de *f*

« original » de *F*

Propriétés :

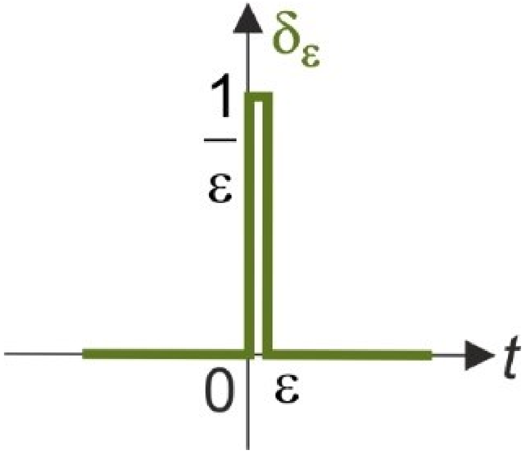
- unicité
- linéarité $\mathbf{L}[\lambda f(t)+\mu g(t)]=\lambda \mathbf{L}[f(t)]+\mu \mathbf{L}[g(t)]$
- $F(p)$ existe $\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} e^{-pt}f(t)=0$

En pratique on fait le choix: $\boxed{F(p)=\int_{0^-}^{+\infty} e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t}$

ce qui ne change le résultat que si *f* est infinie en 0, comme pour la distribution de Dirac « dérivée » d'un échelon

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow \delta(t)=\begin{cases}0 \text{ pour } t\neq 0\\ +\infty \text{ pour } t=0\end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$



: impulsion idéale

avec cette définition :

$$\int_{0^-}^{+\infty} e^{-pt}\delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

alors que $\displaystyle \int_{0^+}^{+\infty} e^{-pt}\delta(t)\mathrm{d}t = 0$

• transformée de Laplace de la dérivée et d'une primitive

$$\boxed{\mathrm{L}[f'(t)] = pF(p)}$$

$g(t) = \displaystyle\int_{0^-}^{t} f(t')\mathrm{d}t'$ primitive de f nulle en 0^-. Sa transformée de Laplace $G(p)$ vaut :

$$\boxed{G(p) = \frac{F(p)}{p}}$$

dérivation $\xrightarrow{\text{TL}}$ multiplication par p

intégration $\xrightarrow{\text{TL}}$ division par p

équations différentielles $\xrightarrow{\text{TL}}$ équations algébriques

Tableau de transformées de Laplace

exemple de calcul pour : $f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t) \cdot u(t)$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t\left[(p+\frac{1}{\tau})-i\omega\right]} dt = \left[- \frac{e^{-t\left[(p+\frac{1}{\tau})-i\omega\right]}}{(p+\frac{1}{\tau}) - i\omega} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{(p+\frac{1}{\tau}) - i\omega}$$

finalement : $F(p) = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(p+\frac{1}{\tau}) - i\omega} - \frac{1}{(p+\frac{1}{\tau}) + i\omega} \right] = \frac{\omega}{(p+\frac{1}{\tau})^2 + \omega^2}$

f original	*F* image
distribution de Dirac δ	1
échelon unité u	$p \mapsto 1/p$
rampe $t \mapsto t \cdot u(t)$	$p \mapsto 1/p^2$
$t \mapsto e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{p+\frac{1}{\tau}}$
$t \mapsto \sin(\omega t) \cdot u(t)$	$p \mapsto \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$t \mapsto e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t) \cdot u(t)$	$p \mapsto \dfrac{\omega}{(p+\frac{1}{\tau})^2+\omega^2}$
$t \mapsto \cos(\omega t) \cdot u(t)$	$p \mapsto \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$t \mapsto e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t) \cdot u(t)$	$p \mapsto \dfrac{p+\frac{1}{\tau}}{(p+\frac{1}{\tau})^2+\omega^2}$
$t \mapsto te^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{(p+\frac{1}{\tau})^2}$
$t \mapsto t^n e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$	$p \mapsto \dfrac{n!}{(p+\frac{1}{\tau})^{n+1}}$
retard : $t \mapsto f(t-\tau)$	$p \mapsto e^{-\tau p} F(p)$

2. APPLICATION À LA RÉPONSE TEMPORELLE

2.1 Réponse temporelle d'un système linéaire à une excitation quelconque

$s(t)$ sortie du système liée à $e(t)$ par $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k s}{dt^k} = \sum_{l=0}^{m} b_l \frac{d^l e}{dt^l}$

$$\Big\downarrow \text{TL}$$

$$\left[\sum_{k=0}^{n} a_k p^k\right] S(p) = \left[\sum_{l=0}^{m} b_l p^l\right] E(p)$$

On reconnaît la fonction de transfert du système : $H(j\omega) = \dfrac{\displaystyle\sum_{l=0}^{m} b_l (j\omega)^l}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k}$

avec la notation de Laplace : $H(p) = \dfrac{\displaystyle\sum_{l=0}^{m} b_l p^l}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k p^k}$

On a : $\boxed{S(p) = H(p) \cdot E(p)}$

$S(p)$ connu $\longrightarrow$ décomposition en éléments simple $\longrightarrow$ original $s(t)$

On trouve ainsi la réponse temporelle à l'excitation quelconque e(*t*), pour

$\boldsymbol{t > 0}$ sans avoir à chercher $\boldsymbol{s(0^+)\ , \dfrac{ds}{dt}(0^+),\ldots}$

Exemple

réponse d'un passe-bas du premier ordre à un échelon $\boldsymbol{e(t) = E_0 \cdot u(t)}$

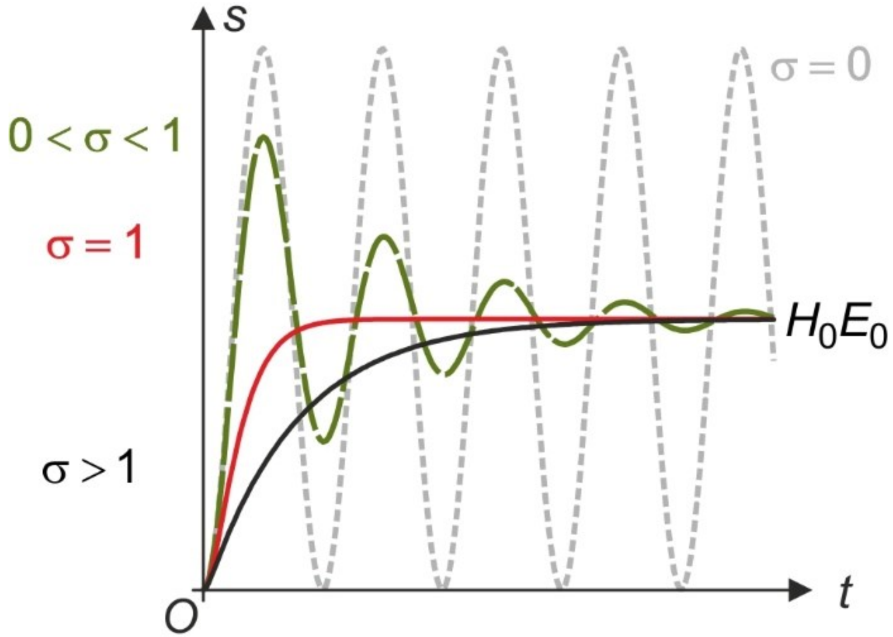
$$H(p) = \frac{H_0}{1+\tau p} \quad \text{et} \quad S(p) = H(p)\cdot E(p) = \frac{H_0}{1+\tau p}\cdot\frac{E_0}{p} = H_0 E_0\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}\right]$$

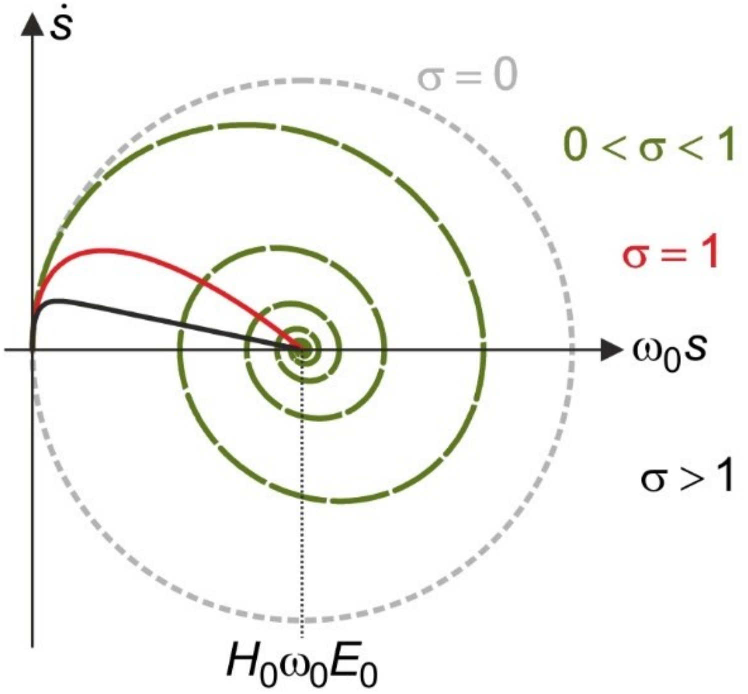
$$\Rightarrow \boxed{s(t) = H_0 E_0 \cdot u(t)\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]}$$

2.2 Temps de réponse à 5% d'un passe-bas du second ordre $H(p) = \dfrac{H_0}{1 + \dfrac{2\sigma p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$

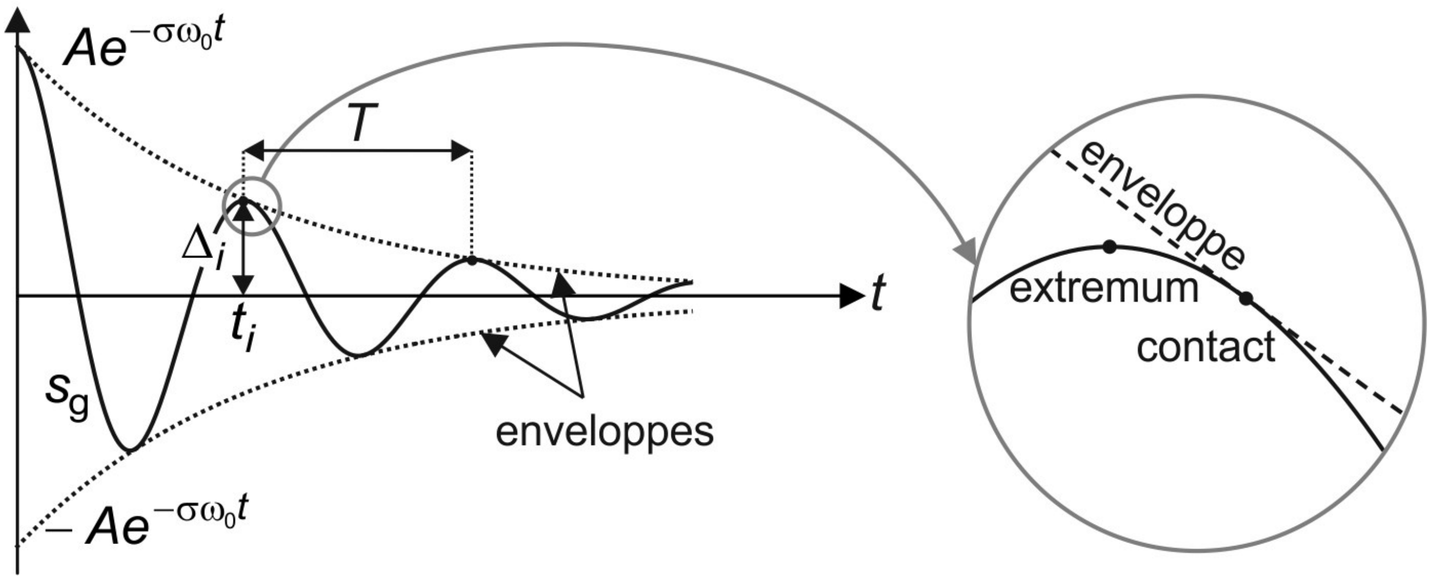
- si $\sigma < 1$ $\quad s(t) = H_0 E_0 u(t)\left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} e^{-\sigma\omega_0 t} \cos\left[\omega_0 t\sqrt{1-\sigma^2} + \psi\right]\right]$

avec $\tan\psi = -\dfrac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}$ $\qquad s(t) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} H_0E_0$





$$s_g(t) = s(t) - H_0E_0 = Ae^{-\sigma\omega_0 t}\cos(\Omega t + \psi)$$



Le calcul des dépassements donne accès au décrément logarithmique :

$$\boxed{\Lambda = \ln\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} = \frac{2\sigma\pi}{\sqrt{1-\sigma^2}} \Rightarrow \sigma = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + 4\pi^2}}}$$

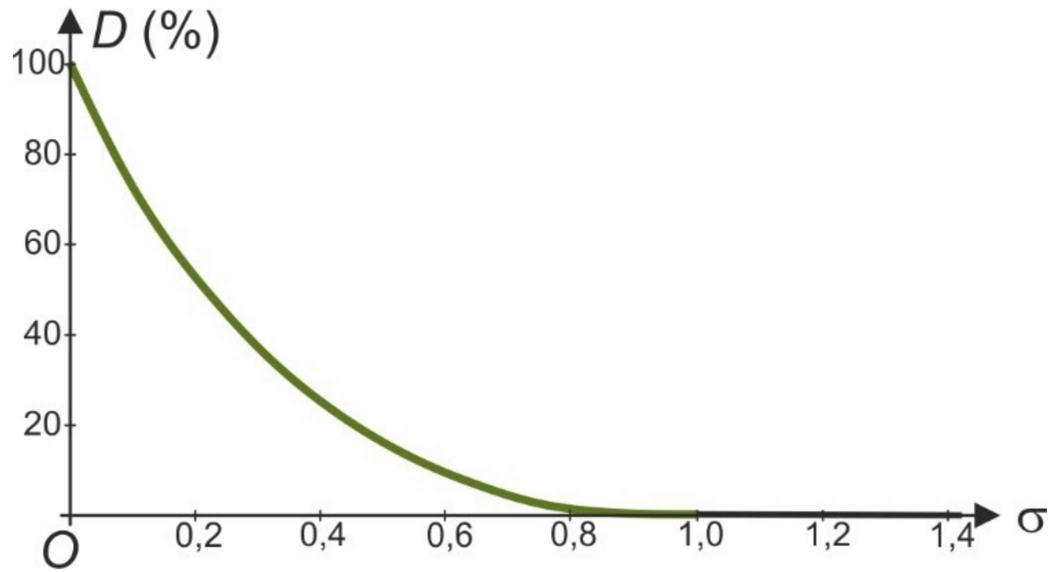
• si $\sigma = 1$

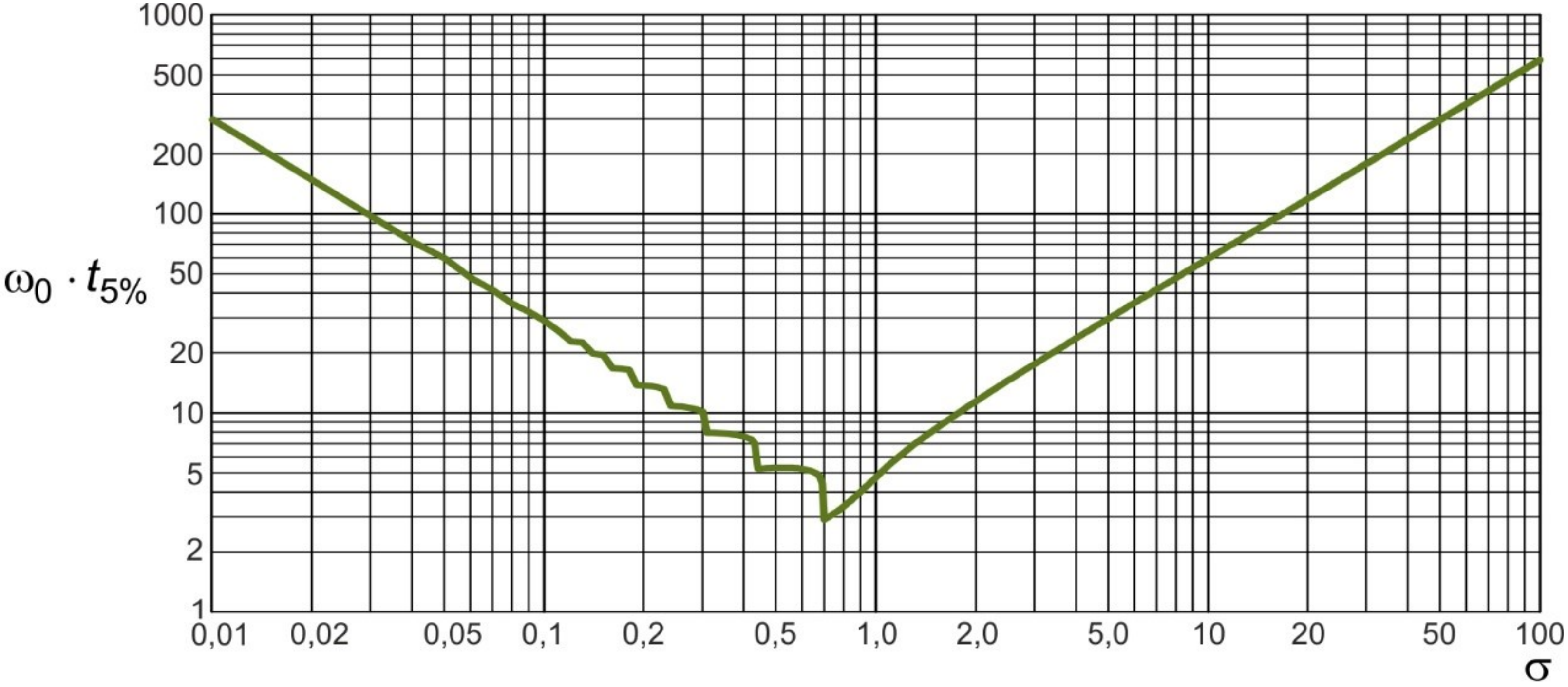
$$s(t) = H_0 E_0 u(t)\left[1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right]$$

• si $\sigma > 1$

$$s(t) = H_0 E_0\left[1 + \frac{(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1})e^{-\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}\right)\omega_0 t} - (\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1})e^{-\left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1}\right)\omega_0 t}}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}}\right]$$

Dépassement





Le temps de réponse à 5% est minimal pour $\sigma = 0{,}69$, valeur pour laquelle le système oscille

Si on veut qu'il n'y ait pas de dépassement, il faut prendre alors $\sigma = 1$ pour avoir la réponse la plus rapide