RECUEIL DE TD

OUTILS MATHÉMATIQUES

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

1. Calculs de transformées de Laplace

Calculer les transformées de Laplace :

1) Échelon unité $u(t)$;

2) Rampe $t \cdot u(t)$;

3) $e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$

4) $e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t) \cdot u(t)$

réponses : 1) $\dfrac{1}{p}$ 2) $\dfrac{1}{p^2}$ 3) $\dfrac{1}{p+\frac{1}{\tau}}$ 4) $\dfrac{p+\frac{1}{\tau}}{(p+\frac{1}{\tau})^2+\omega^2}$

2. Réponses indicielles

1) Déterminer et tracer la réponse indicielle d'un passe-haut du premier ordre en utilisant les transformées de Laplace.

2) Déterminer et tracer la réponse temporelle d'un passe-bas du premier ordre de constante de temps τ à un signal d'entrée $e(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$

réponses : 1) $s(t) = H_0 E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$ 2) $s(t) = H_0 E_0 \dfrac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$

3. Modèle de Broïda

Certains systèmes linéaires sont bien décrits par le modèle de Broïda dans lequel leur fonction de transfert s'écrit $\dfrac{H_0}{1+\tau p} e^{-T_0 p}$.

1) Déterminer l'équation différentielle reliant le signal de sortie $s(t)$ à celui d'entrée $e(t)$. En déduire le sens des constantes τ et T_0.

2) Calculer et tracer la réponse indicielle $s(t)$. Expliquer comment mesurer les constantes H_0, τ et T_0 à l'oscilloscope si l'on étudie un transfert de tensions.

3) Retrouver la réponse indicielle $s(t)$ en utilisant les transformées de Laplace.

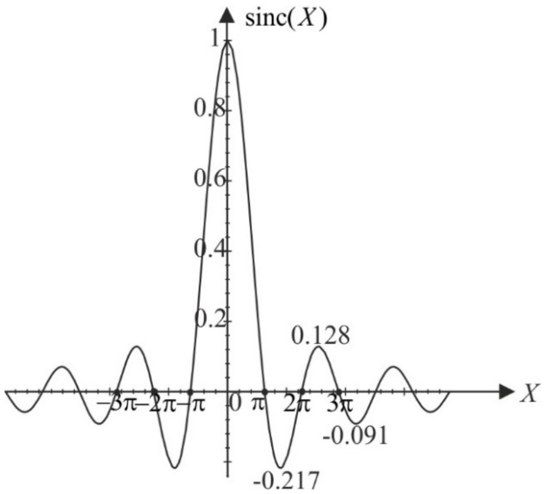
réponses : 3) $s(t) = H_0 E_0 \left[1 - e^{-\frac{t-T_0}{\tau}}\right] \cdot u(t-T_0)$

ANALYSE DE FOURIER

1. Fonction sinus cardinal

1) Étudier la fonction $\text{sinc}(X) = \dfrac{\sin X}{X}$: « sinus cardinal », qui intervient fréquemment en Physique (parité, prolongement par continuité en $X = 0$, enveloppes, variations, obtention de la valeur approchée des premiers extrema et de leur abscisse).

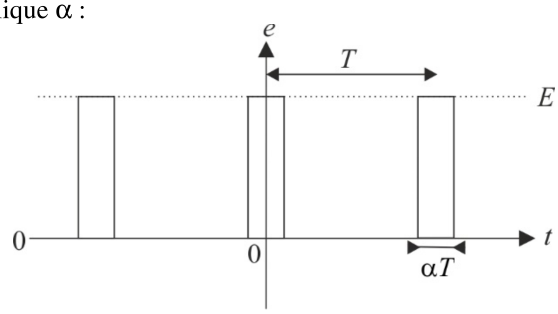
réponses : 1)



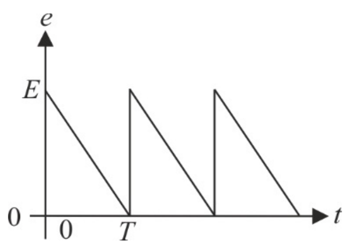
2. Calculs de séries de Fourier

Calculer la série de Fourier et commenter les dépendances des coefficients avec l'ordre des harmoniques. Tracer les spectres correspondants.

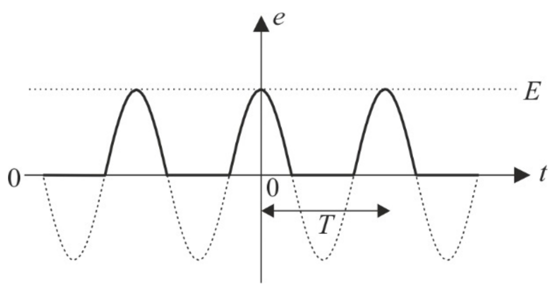
1) Signal en créneaux de rapport cyclique α :



2) Signal en rampe :



3) Signal sinusoïdal redressé :



réponses : 1) $e(t)=\alpha E+2\alpha E\sum_{n=1}^{\infty}\text{sinc}(n\pi\alpha)\cos(n\Omega t)$ 2) $e(t)=\frac{E}{2}+\frac{E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[n\Omega t]}{n}$

3) $e(t)=\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\cos(\Omega t)+\frac{2E}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}\cos[2p\Omega t]$

3. Transformée de Fourier d'un train d'onde

Un atome émet en train d'onde dont le champ électrique est $f(t)=e^{-\beta t^2}\cos(2\pi\nu_0 t)$

1) Déterminer une durée caractéristique τ du train d'onde (supposée très supérieure à la période $T_0=\frac{1}{\nu_0}$).

2) Déterminer la transformée de Fourier $\tilde{f}(\nu)$. On donne $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$.

3) Tracer le spectre du signal et le comparer au cas d'une onde monochromatique.

réponses : 2) $\tilde{f}(\nu)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left[e^{-\frac{\pi^2(\nu+\nu_0)^2}{\beta}}+e^{-\frac{\pi^2(\nu-\nu_0)^2}{\beta}}\right]$

4. Transformée de Fourier d'une réponse impulsionnelle

On considère un filtre RC passe-bas du premier ordre. On pose $\omega_0=\frac{1}{RC}$.

1) Déterminer l'équation différentielle reliant le signal de sortie $u_s(t)$ à celui d'entrée $u_e(t)$.

$u_e(t)$ est une impulsion : $u_e(t)=E\cdot\tau\cdot\delta(t)$ avec $\delta(t)$ distribution de Dirac et τ homogène à un temps.
On a alors $u_s(t)=E\cdot\tau\cdot R(t)$ où $R(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre.

2) Pour déterminer $R(0^+)$, intégrer l'équation différentielle entre $-\varepsilon$ et ε puis faire $\varepsilon\to 0$. En déduire $R(t)$.

3) Calculer la transformée de Fourier de $R(t)$. Commenter le résultat obtenu.

4) Donner les caractéristiques d'un signal d'entrée expérimental constitué par un peigne d'impulsions et permettant à l'aide d'un analyseur de spectre d'obtenir la courbe $|H(j\omega)|$ en fonction de ω.

5) Relier la rapidité d'un appareil de mesure à sa bande passante.

réponses : 2) $R(0^+)=\omega_0$ 3) $\tilde{R}(\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}=H(j\omega)$ 4) si τ est la durée d'une impulsion et T la période du peigne, il faut $\tau \ll RC \ll T$ 5) appareil de mesure d'autant plus rapide que sa bande passante est large

DIFFÉRENTIELLES ET FORMES DIFFÉRENTIELLES

1. Théorème de Poincarré

1) Existe-t-il une fonction $f(r,\theta)$ telle que $\delta W = \mathrm{d}f$ pour les formes différentielles suivantes ? :

a) $\delta W = 2r(2\sin^2\theta - 1)\mathrm{d}r + 4r^2 \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$;

b) $\delta W = 3r\sin\theta\mathrm{d}r - r^2\cos\theta\mathrm{d}\theta$.

Si oui, déterminer les fonctions *f* solutions du problème.

2) On considère dans le plan xOy deux chemins pour aller de $O(0,0)$ à $A(1,1)$:

γ_1 est constitué du segment $[OI]$ puis du segment $[IA]$ avec $I(1,0)$; γ_2 est le segment $[OA]$

Calculer $W_{O\to A}^{\gamma_1}$ et $W_{O\to A}^{\gamma_2}$ pour les deux formes différentielles suivantes :

a) $\delta W = y^2\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y$;

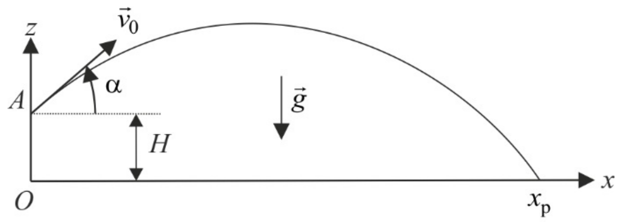
b) $\delta W = y\mathrm{d}x$.

Justifier les résultats obtenus.

réponses : 1) a) oui : $f(r,\theta) = r^2\left[2\sin^2\theta - 1\right] + Cte$; b) non 2) a) $W_{O\to A}^{\gamma_1} = W_{O\to A}^{\gamma_2} = 1$; b) $W_{O\to A}^{\gamma_1} = 0$ et $W_{O\to A}^{\gamma_2} = \dfrac{1}{2}$.

2. Portée maximale d'un obus, fonction implicite

On lance un obus avec une vitesse donnée v_0 et un angle α par rapport à l'horizontale que l'on peut ajuster. Le canon est placé à une hauteur H au dessus d'un plateau où se trouve la cible. On cherche à déterminer la portée maximale du tir.



1) On pose $\beta = \tan\alpha$. Montrer que la portée x_p et β sont liés par une relation $F(x_\mathrm{p},\beta) = 0$

2) On obtient la portée maximale $x_{\mathrm{p\,max}}$ pour une valeur α_c de α et donc une valeur β_c de β.

Montrer que l'on a $\dfrac{\partial F}{\partial \beta}(x_{\mathrm{p\,max}},\beta_\mathrm{c}) = 0$.

En déduire l'expression de $x_{\mathrm{p\,max}}$ en fonction de β_c.

3) Calculer β_c et $x_{\mathrm{p\,max}}$. Commenter

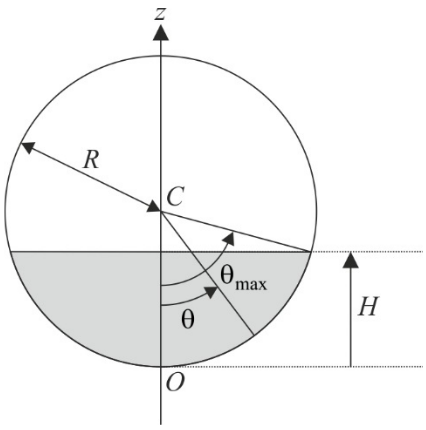
réponses : 3) $x_{\mathrm{p\,max}} = \dfrac{{v_0}^2}{g}\sqrt{1 + \dfrac{2gh}{{v_0}^2}}$.

3. Calcul d'un volume

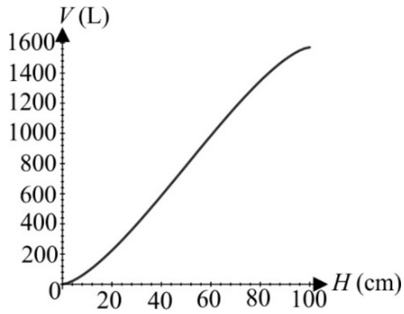
Une cuve cylindrique de rayon R et de longueur L contient du fuel sur une hauteur H.

1) Déterminer la relation entre le volume V de fuel et l'angle θ_{max} défini sur la figure.

2) Tracer la courbe V (L) en fonction de H (cm) pour $L = 2$ m et $R = 50$ cm



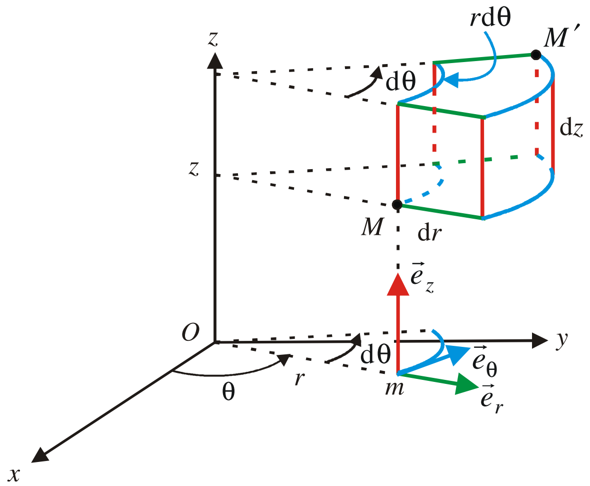
réponses : 1) $V = LR^2\left[\theta_{max} - \frac{1}{2}\sin(2\theta_{max})\right]$ 2) cf. figure ci-dessous.



CHAMPS ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

1. Divergence, rotationnel et laplacien en coordonnées cylindriques

1) Déterminer en utilisant les déplacements élémentaires de la figure ci-dessous l'expression de la composante selon $\vec{e}_z$ de $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}$ en coordonnées cylindriques.



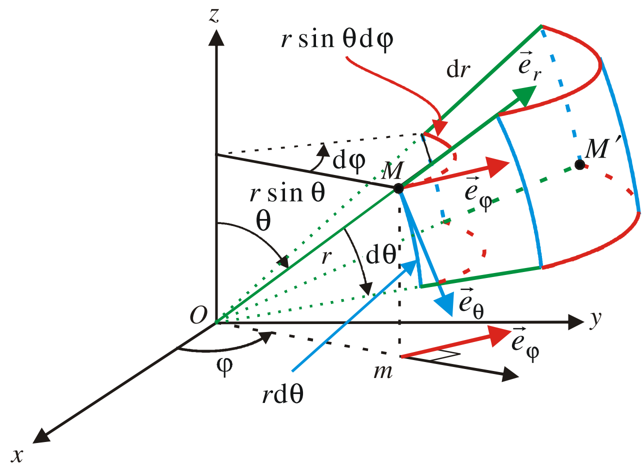
2) Déterminer en utilisant les déplacements élémentaires de la figure ci-contre l'expression de $\text{div}\,\vec{A}$ en coordonnées cylindriques.
3) Déterminer à partir de sa définition intrinsèque l'expression du laplacien scalaire en coordonnées cylindriques.

réponses : 1) $\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}\right)\cdot\vec{e}_z = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}[rA_\theta] - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]$ 2) $\text{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

3) $\Delta V = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial V}{\partial r}\right] + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

2. Divergence, rotationnel et laplacien en coordonnées sphériques

1) Déterminer en utilisant les déplacements élémentaires de la figure ci-dessous l'expression de la composante radiale de $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}$ en coordonnées sphériques.



2) Déterminer en utilisant les déplacements élémentaires de la figure ci-contre l'expression de $\text{div}\,\vec{A}$ en coordonnées sphériques.
3) Déterminer à partir de sa définition intrinsèque l'expression du laplacien scalaire en coordonnées sphériques.

réponses : 1) $\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}\right)\cdot\vec{e}_r = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]$ 2) $\text{div}\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r^2 A_r\right] + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[A_\theta\sin\theta\right] + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

3. Formules d'analyse vectorielle

1) Démontrer $\oint_\gamma V\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \iint_{\mathscr{S}(\gamma)} \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}\wedge\overrightarrow{\text{grad}}\,V$

2) Démontrer $\oiint_{\mathscr{S}} \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}\wedge\vec{A} = \iiint_{\mathscr{V}\text{ dans }\mathscr{S}} \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}\cdot\mathrm{d}^3\mathscr{V}$

4. Champ à circulation conservative

1) Un champ est à circulation conservative si et seulement si sa circulation entre deux points M_1 et M_2 est indépendante du chemin γ suivi entre M_1 et M_2. En déduire que le rotationnel d'un tel champ est nul en tout point.

Un point matériel est astreint à se déplacer dans le plan *xOy*. Il est soumis à une force dont l'expression en fonction des coordonnées *x* et *y* du point matériel est $\vec{F} = \alpha\left(y^2\vec{e}_x - x^2\vec{e}_y\right)$

2) Cette force est-elle conservative ? Déterminer le cas échéant l'énergie potentielle associée.

3) Le point matériel se déplace du point *A* de coordonnées $(0, a>0)$ au point *B* de coordonnées $(b>0\ ,0)$. Calculer le travail de la force $\vec{F}$ lors du déplacement :

a) en suivant la droite (*AB*) : chemin γ_1,

b) en suivant les deux segments de droite (*AO*) puis (*OB*) : chemin γ_2.

4) La force est maintenant $\vec{F} = \beta(y-x)(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$. Reprendre les questions 2) et 3)

réponses : 2) non 3) a) $W_{\gamma_1} = \alpha\dfrac{ab}{3}(a+b)$; b) $W_{\gamma_2} = 0$ 4) force conservative, $E_\mathrm{p}(x,y) = \dfrac{1}{2}\beta(x-y)^2$, $W = \dfrac{1}{2}\beta(a^2-b^2)$

5. Équivalent volumique des forces de pression

Un système quelconque Σ de volume $\mathscr{V}$ à l'intérieur d'une surface fermée $\mathscr{S}$ est placé dans un fluide.

1) Donner l'expression de la résultante $\vec{F}_p$ des actions de pression qu'exerce le fluide sur Σ.

2) Montrer en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski que l'on peut écrire cette résultante à l'aide d'une intégrale volumique.

3) En déduire l'équation locale traduisant dans un référentiel galiléen l'équilibre d'un fluide de masse volumique ρ placé dans un champ de pesanteur uniforme.

réponses : 1) $\vec{F}_p = -\oiint_{M\in\mathscr{S}} p(M)\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$ 2) $\vec{F}_p = -\iiint_{M\in\mathscr{V}} \overrightarrow{\text{grad}}\,p\,\mathrm{d}^3\mathscr{V}$ 3) $\overrightarrow{\text{grad}}\,p = \rho\vec{g}$

6. Détermination d'un champ vectoriel

On considère un champ $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$ stationnaire à symétrie sphérique dans un système de coordonnées sphériques de centre *O*. Dans le domaine de l'espace D compris entre deux sphères de centre *O* et de rayons R_1 et $R_2 > R_1$ on a $\text{div}\vec{E} = 0$.

1) Quelles sont les propriétés intégrales d'un tel champ ? Montrer qu'il existe un potentiel *V*(*M*) tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$.

2) On a comme conditions aux limites : $V(R_1) = V_1$ et $V(R_2) = V_2$. Il y a-t-il unicité de $\vec{E}$ dans D ? Calculer $\vec{E}$ et *V* dans D.

réponses : 1) $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \exists V\ /\ \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ 2) unicité d'après le théorème de Helmholtz ; $\vec{E} = \dfrac{R_1R_2}{R_2-R_1}\cdot(V_1-V_2)\cdot\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}$