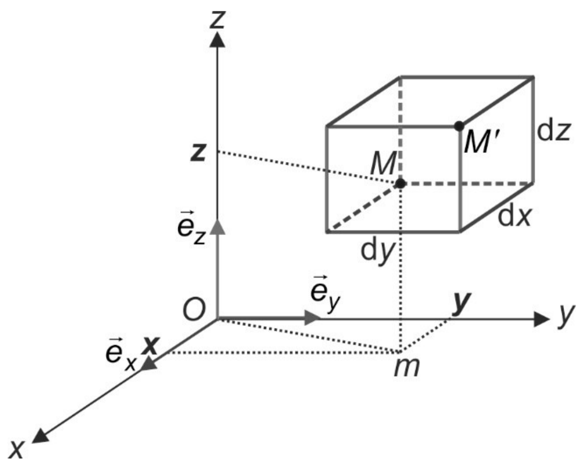
SYSTÈMES DE COORDONNÉES

1. COORDONNÉES CARTÉSIENNES

1.1 Définition



On définit le repère orthonormé *direct* $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$: $\vec{e}_z$ est orienté dans le sens de déplacement d'un tire-bouchon quand on tourne de $\vec{e}_x$ vers $\vec{e}_y$.

x (abscisse), *y* (ordonnée) et *z* (cote) sont les coordonnées cartésiennes du point *M*. Le vecteur position s'écrit $\boldsymbol{\vec{r}} = \boldsymbol{\overrightarrow{OM}} = \boldsymbol{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}$

1.2 Déplacement, volume et surfaces élémentaires

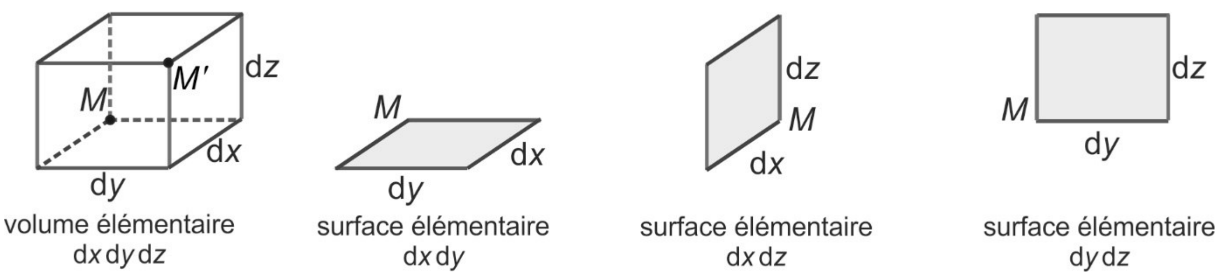
Si *x* varie de d*x*, le point se déplace de d*x* selon le vecteur $\vec{e}_x$.

Si *y* varie de d*y*, le point se déplace de d*y* selon le vecteur $\vec{e}_y$.

Si *z* varie de dz, le point se déplace de dz selon le vecteur $\vec{e}_z$.

Sous l'effet d'une variation infinitésimale d*x*, d*y*, dz de ses coordonnées *x*, *y*, *z*, le vecteur position varie de $\mathbf{d}\boldsymbol{\vec{r}} = \mathbf{d}\boldsymbol{x\vec{e}_x} + \mathbf{d}\boldsymbol{y\vec{e}_y} + \mathbf{d}\boldsymbol{z\vec{e}_z}$

$\mathrm{d}\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$ est le *déplacement élémentaire* entre un point *M* et un point *M′* infiniment proche.



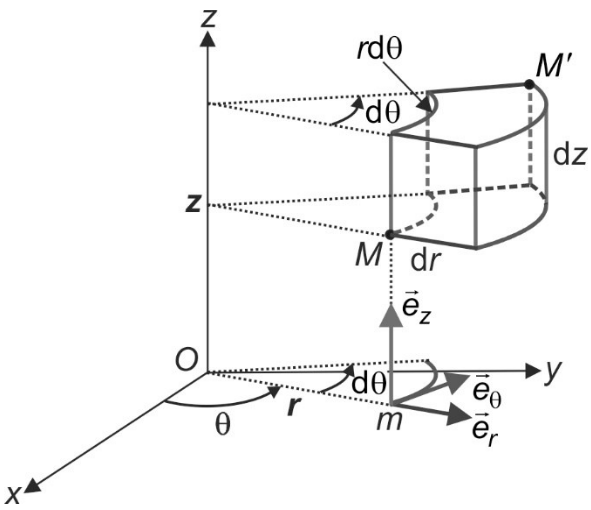
Le parallélépipède représenté sur la figure ci-dessus permet de calculer l'élément différentiel de volume en coordonnées cartésiennes : $\mathbf{d^3\mathscr{V} = dxdydz}$.

Le volume d'un domaine compact (D) de l'espace est $\mathscr{V} = \iiint\limits_{P\in(D)} \mathbf{d^3\mathscr{V}} = \iiint\limits_{P\in(D)} \mathbf{dxdydz}$.

On balaie l'espace entier en prenant $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Les différentes surfaces élémentaires se déduisent aussi de la figure.

2. COORDONNÉES CYLINDRIQUES

2.1 Définition



Soit un repère orthonormé direct cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On définit la base *mobile* (elle dépend du point *M*) $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, orthonormée et directe, ainsi que les coordonnées cylindriques de *M*, de la manière suivante :

— Soit *m* est le projeté orthogonal de *M* sur le plan *xOy*. Le vecteur unitaire radial $\vec{e}_r$ est :

$\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{Om}}{r}$, avec $r = \left\| \overrightarrow{Om} \right\|$.

— θ est l'angle *orienté* $(\vec{e}_x, \vec{e}_r)$ dans le plan *xOy* : cet angle est positif si un tire-bouchon se déplace dans le sens du vecteur $\vec{e}_z$ quand on tourne de $\vec{e}_x$ vers $\vec{e}_r$.

— Le vecteur unitaire orthoradial $\vec{e}_\theta$ se déduit de $\vec{e}_r$ par une rotation de $+\dfrac{\pi}{2}$ autour de *Oz*.

— Le vecteur unitaire $\vec{e}_z$ complète ainsi le trièdre direct.

r (rayon polaire), θ (angle polaire) et *z* (cote) sont les coordonnées cylindriques de *M*. Le vecteur position s'écrit $\boldsymbol{\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z}$ (attention : *r* n'est pas ici la norme du vecteur position).

2.2 Déplacement, volume et surfaces élémentaires

Si r varie de dr, le point se déplace de dr selon le vecteur $\vec{e}_r$.

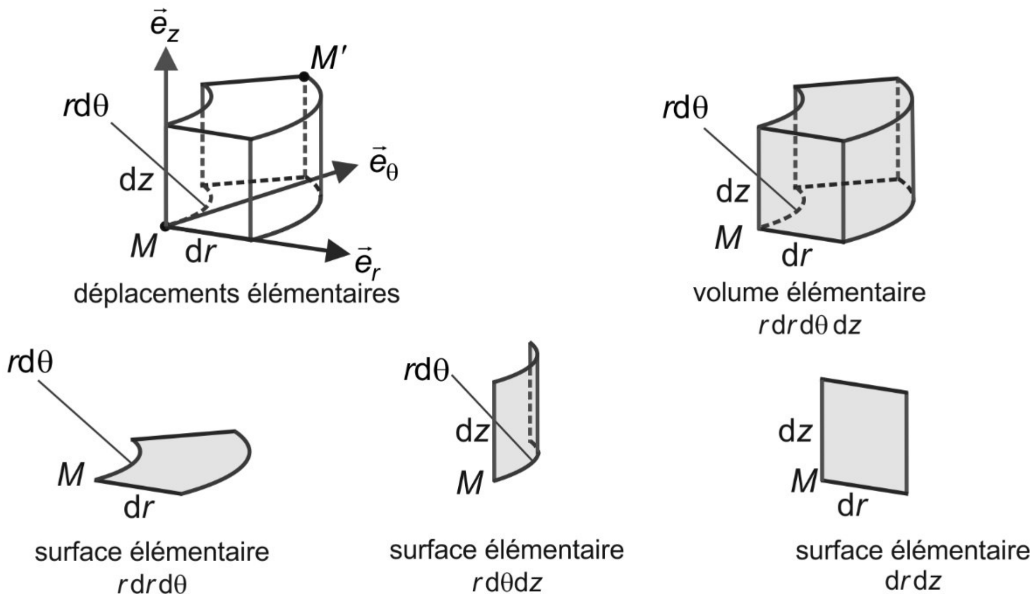
Si θ varie de dθ, le point se déplace de r dθ selon le vecteur $\vec{e}_\theta$.

Si z varie de dz, le point se déplace de dz selon le vecteur $\vec{e}_z$.

Remarquons que dθ étant infiniment petit, l'arc de cercle de longueur r dθ se confond avec un segment rectiligne (ce qu'on ne peut pas représenter sur une figure où les déplacements sont nécessairement finis).

Sous l'effet d'une variation infinitésimale dr, dθ, dz de ses coordonnées r, θ, z, le vecteur position varie de $\mathbf{d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z}$

$\mathrm{d}\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$ est le *déplacement élémentaire* entre un point M et un point M' infiniment proche.



Le parallélépipède représenté sur la figure précédente permet de calculer l'élément différentiel de volume en coordonnées cylindriques : $\mathbf{d^3\mathscr{V} = r\,dr\,d\theta\,dz}$.

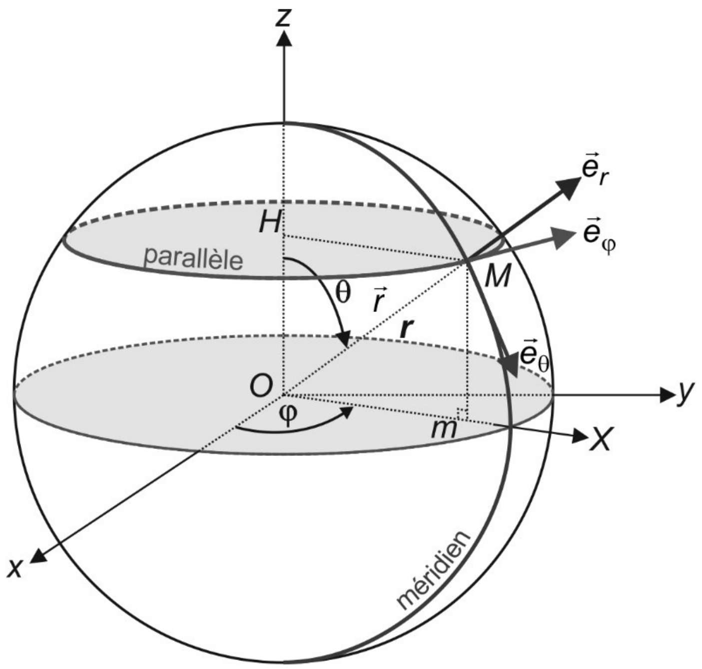
Le volume d'un domaine compact (D) de l'espace est $\mathscr{V} = \iiint_{P\in(D)} d^3\mathscr{V} = \iiint_{P\in(D)} r\,dr\,d\theta\,dz$.

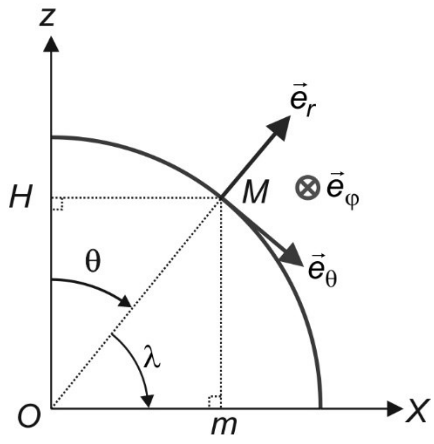
On balaie l'espace entier en prenant par exemple $r \in [0,+\infty[$, $\theta \in [0,2\pi[$, $z \in \mathbb{R}$.

Les différentes surfaces élémentaires se déduisent aussi de la figure.

3. COORDONNÉES SPHÉRIQUES

3.1 Définition





Soit un repère orthonormé direct cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On définit la base *mobile* (elle dépend du point *M*) $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, orthonormée et directe, ainsi que les coordonnées sphériques de *M*, de la manière suivante :

— Le vecteur unitaire radial $\vec{e}_r$ est $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$, avec $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \|\vec{r}\|$.

— $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle $(\vec{e}_z, \vec{e}_r)$. Lorsque $\theta = 0$, le point *M* se trouve sur l'axe *Oz* du côté des *z* positifs ; lorsque $\theta = \pi$, le point *M* se trouve sur l'axe *Oz* du côté des *z* négatifs.

— Le vecteur unitaire orthoradial $\vec{e}_\theta$ est un vecteur du plan vectoriel $(\vec{e}_z, \vec{e}_r)$ se déduisant de $\vec{e}_r$ par une rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ dans le sens des θ croissants.

— Soit *m* est le projeté orthogonal de *M* sur le plan *xOy*. L'angle φ est l'angle *orienté* $(\vec{e}_x, \overrightarrow{Om})$ dans le plan *xOy* : cet angle est positif si un tire-bouchon se déplace dans le sens du vecteur $\vec{e}_z$ quand on tourne de $\vec{e}_x$ vers $\overrightarrow{Om}$.

— Le vecteur unitaire $\vec{e}_\varphi$ complète le trièdre direct. C'est un vecteur du plan vectoriel $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ car il est orthogonal à $\vec{e}_z$.

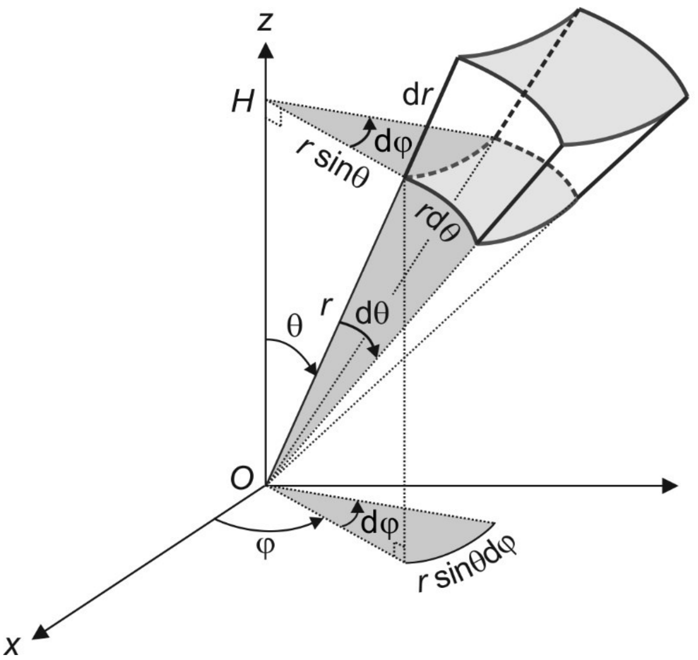
r (rayon), θ (colatitude) et φ (azimut) sont les coordonnées sphériques de *M*. Le vecteur position s'écrit $\boldsymbol{\vec{r}} = \boldsymbol{\overrightarrow{OM}} = \boldsymbol{r\vec{e}_r}$ (*r* est bien ici la norme du vecteur position).

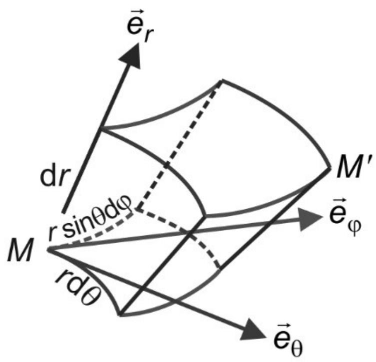
Pour visualiser les directions de $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$, on peut tracer la sphère de centre *O* et de rayon *r*. $\vec{e}_\theta$ est alors porté par un méridien et $\vec{e}_\varphi$ par un parallèle.

Ces références au repérage d'un point à la surface de la Terre sont précisément à l'origine du nom colatitude porté par l'angle θ.

La latitude λ est l'angle ($\vec{e}_r$, $\overrightarrow{Om}$). On a donc $\theta + \lambda = \frac{\pi}{2}$, comme on peut le voir sur la figure dans le plan méridien.

3.2 Déplacement, volume et surfaces élémentaires





déplacements élémentaires

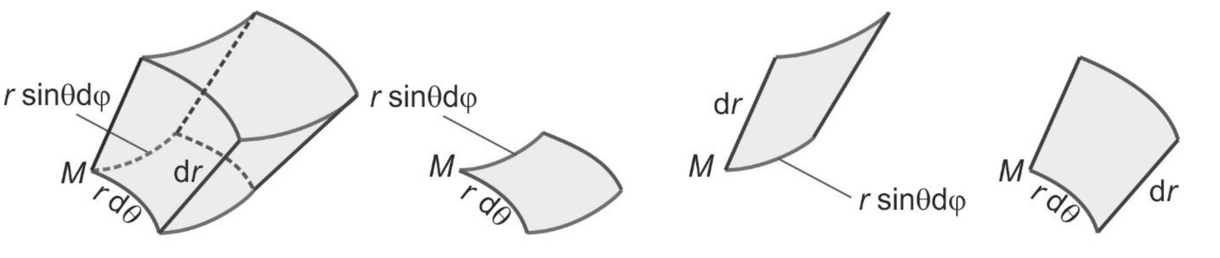
Si *r* varie de d*r*, le point se déplace de d*r* selon le vecteur $\vec{e}_r$.

Si θ varie de $\mathrm{d}\theta$, le point se déplace de $r\,\mathrm{d}\theta$ selon le vecteur $\vec{e}_\theta$.

Si φ varie de $\mathrm{d}\varphi$, le point se déplace de $r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$ selon le vecteur $\vec{e}_\varphi$.

Sous l'effet d'une variation infinitésimale d*r*, $\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}\varphi$ de ses coordonnées *r*, θ, φ, le vecteur position varie de $\mathbf{d}\vec{r} = \mathbf{d}r\vec{e}_r + r\,\mathbf{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathbf{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$

$\mathrm{d}\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$ est le *déplacement élémentaire* entre un point *M* et un point *M′* infiniment proche.



volume élémentaire $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ — surface élémentaire $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ — surface élémentaire $r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$ — surface élémentaire $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

Le parallélépipède représenté sur la figure ci-avant permet de calculer l'élément différentiel de volume en coordonnées sphériques : $\mathbf{d^3\mathscr{V} = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}$.

Le volume d'un domaine compact (D) de l'espace est $\mathscr{V} = \iiint\limits_{P\in(D)} d^3\mathscr{V} = \iiint\limits_{P\in(D)} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$.

On balaie l'espace entier en prenant :
$\boldsymbol{r \in [0,+\infty[\ ,\theta \in [0,\pi]\,,\varphi \in [0,2\pi[}$. Ainsi l'élément de volume $d^3\mathscr{V}$ est positif.
On aurait également pu choisir $r \in [0,+\infty[\ ,\theta \in [0,2\pi[\,,\ \varphi \in [0,\pi]$, mais il aurait fallu, pour garder un élément de volume positif, prendre $d^3\mathscr{V} = r^2 |\sin\theta|\, dr\, d\theta\, d\varphi$.
Les différentes surfaces élémentaires se déduisent aussi de la figure.