RECUEIL DE TD

PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT

STATIQUE DES FLUIDES

1. Barrage-voûte

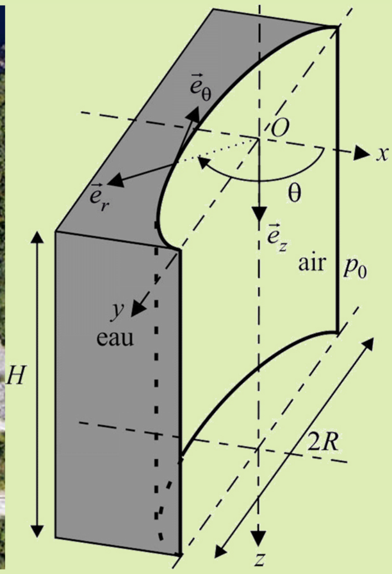
Sa forme permet de faire porter une grande partie des efforts de poussée de l'eau sur les flancs de la vallée.
Le barrage est constitué par un demi-cylindre à base circulaire de rayon R, de génératrice verticale. L'eau de masse volumique ρ se trouve du côté opposé à la concavité du barrage ; elle a une hauteur H. La pression de l'air p_0 est uniforme. On note g l'intensité du champ de pesanteur.

1) Déterminer la loi de pression $p(z)$ de l'eau, avec Oz verticale descendante, O se trouvant à l'altitude de l'interface eau-air.

2) Calculer la force de pression totale s'exerçant sur un élément de surface $\mathrm{d}^2\mathscr{S} = R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ du barrage.

3) Montrer que la force de pression totale qui s'exerce sur le barrage est portée par l'axe Ox. En déduire l'expression de cette force $\vec{F}_p$ en fonction de ρ, g, R et H.

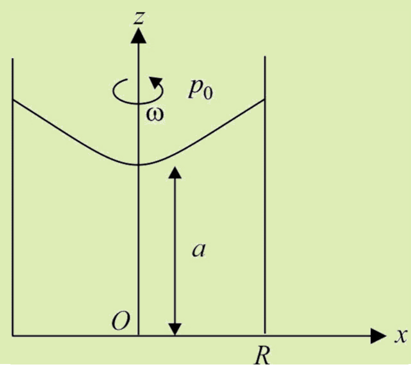
4) Comparer à la force qui s'exercerait sur le barrage s'il était plan, de largeur $2R$.



réponses : 3) $\vec{F}_p = \rho g R H^2 \vec{e}_x$

2. Statique d'un liquide dans un référentiel en rotation uniforme

Un liquide de masse volumique ρ est placé dans un récipient cylindrique. Ce récipient possède un axe Oz de symétrie de révolution : sa section droite est circulaire, de rayon R. Initialement, l'ensemble est au repos dans le référentiel du laboratoire et la hauteur du liquide est H. On pose le récipient sur un plateau tournant à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz. La pression de l'air est p_0.



1) Déterminer la forme de la surface libre du liquide à l'équilibre relatif dans le référentiel *Oxyz* lié au récipient. On donnera l'équation $z(x)$ de sa trace dans un plan méridien.
2) Calculer la hauteur minimale a du liquide (supposée non nulle).

réponses : 1) $z = a + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2$ 2) $a = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$

3. Équilibre d'une sphère plongée dans un liquidee

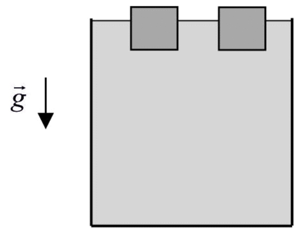
On considère une sphère de rayon R et de masse volumique ρ partiellement immergé dans un liquide de masse volumique ρ_0. On néglige la poussée d'Archimède due à l'air. On pose $\lambda = \frac{\rho}{\rho_0}$ et on suppose $\lambda < 1$.

1) Déterminer l'équation régissant la hauteur H de sphère immergée à l'équilibre. A.N : calculer $\xi = \frac{H}{R}$ si $\lambda = 0{,}5$.

2) On perturbe l'équilibre. On repère la position du centre d'inertie de la sphère par rapport à la position d'équilibre par $\varepsilon = z_G - z_{G\acute{e}q}$ où l'axe Oz est vertical descendant. Déterminer l'équation différentielle régissant l'infiniment petit ε. Montrer que l'équilibre est stable et calculer la pulsation ω_0 et la période T_0 des petites oscillations si $\lambda = 0{,}5$ en prenant $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $R = 10\ \mathrm{cm}$.

réponses : 1) $\xi^3 - 3\xi^2 + 4\lambda = 0$ 2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{4\lambda R^2}(2-\xi)}$; $T_0 = 0{,}16\ \mathrm{s}$

4. Fonte de la banquise



1) On considère un verre rempli à ras bord d'eau liquide sur laquelle flottent des glaçons. Le verre va-t-il déborder quand les glaçons auront fondu ?
2) On entend dire qu'une augmentation de la température moyenne terrestre au cours du siècle va provoquer la fonte de la banquise et l'inondation d'une partie des continents. Est-ce vrai ? Il y a-t-il un danger ?

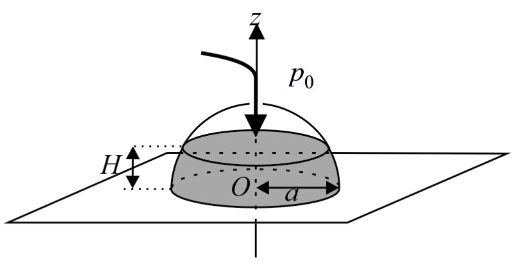
réponses : 1) pas de changement du niveau de la surface libre

5. Les hémisphères de Magdebourg

Otto Von Guericke, bourgmestre de Magdebourg, avait joint deux hémisphères métalliques de 28 cm de rayon et réalisé le vide à l'intérieur du dispositif à l'aide d'une pompe à vide de son invention. Lors de la première expérience le 6 mai 1654 devant l'Empereur Ferdinand II à Ratisbonne, deux attelages de 15 chevaux n'ont pas pu séparer les deux hémisphères tant que le vide a été maintenu.
1) Quelle force aurait-il fallu exercer de chaque côté pour séparer les hémisphères ?

réponses : 1) 25 000 N

6. Décollage d'une demi-sphère qui se remplit de liquide



Une cloche hémisphérique de masse m et de rayon a est posée sur un plan horizontal. On la remplit par un orifice situé à son sommet d'un liquide de masse volumique ρ. Un joint posé sur sa base empêche le liquide de fuir.

1) Montrer que pour une certaine hauteur H de liquide versé (que l'on exprimera en fonction de m et de ρ), la cloche se soulève et le liquide fuit. On note p_0 la pression atmosphérique.

réponses : 1) la résultante des forces de pression s'exerçant sur la cloche est :

$\vec{F} = \frac{1}{3}\pi\rho g H^3 \vec{e}_z$, on en déduit $h = \left[\frac{3m}{\pi\rho}\right]^{\frac{1}{3}}$

DESCRIPTION D'UN FLUIDE EN MOUVEMENT

1. Cyclone

On le modélise par un écoulement d'air incompressible dont on donne dans la base de coordonnées cylindriques le rotationnel du champ des vitesses : $\begin{cases} \text{pour } r < R : \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v} = \overrightarrow{Cte} = \omega_0 \vec{e}_z \\ \text{pour } r > R : \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$. R est le rayon du cyclone.

1) Montrer que la recherche du champ des vitesses est analogue à un problème de magnétostatique. En déduire $\vec{v}$ en tout point.
2) Calculer l'accélération $\vec{a}$ d'une particule d'air. Peut-on lier la courbure des lignes de champ au caractère tourbillonnaire d'un fluide ?
3) On considère un vortex : $R \to 0$, $\omega_0 \to \infty$ avec $2\omega_0 \pi R^2 = Cte = \Gamma$. Quel est l'analogue magnétostatique ? Calculer $\vec{v}$ en tout point.

réponses : 1) $\vec{v} = \omega_0 r \vec{e}_\theta$ pour $r \le R$; $\vec{v} = \omega_0 \dfrac{R^2}{r} \vec{e}_\theta$ pour $r \ge R$

2. Écoulement potentiel

On considère un écoulement potentiel : $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$ avec $\varphi(x, y, z, t) = \dfrac{x^2 - y^2}{\tau}$.

1) Quelle est la dimension de la constante positive τ ?
2) Caractériser cet écoulement (est il stationnaire ? incompressible ? irrotationnel ?)
3) Déterminer puis représenter les trajectoires des particules et les lignes de courant.
4) Calculer l'accélération d'une particule fluide.

réponses : 1) $[\tau] = \mathrm{T}$ 2) stationnaire, incompressible, irrotationnel 3) hyperboles d'équation $y = \dfrac{x_0 y_0}{x}$ 4) $\vec{a} = \dfrac{4}{\tau^2}\overrightarrow{OM}$

3. Plan oscillant

Un fluide se trouve dans le demi-espace $z > 0$. Le plan $z = 0$ est en translation sinusoïdale selon la direction du vecteur $\vec{e}_x$. Le champ de vitesse dans le fluide est alors $\vec{v}(M,t) = v_0 e^{-kz}\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$.

1) Caractériser cet écoulement (est il stationnaire ? incompressible ? irrotationnel ?)
2) Déterminer les trajectoires des particules et les lignes de courant.
3) Commenter les conditions aux limites.

réponses : 1) instationnaire incompressible tourbillonnaire 2) à t fixé les lignes de courant sont // à Ox, les trajectoires aussi 3) adhérence à la paroi : fluide réel (visqueux) ; quand $z \to \infty$ $\vec{v} \to \vec{0}$ (fluide pas atteint par la perturbation)

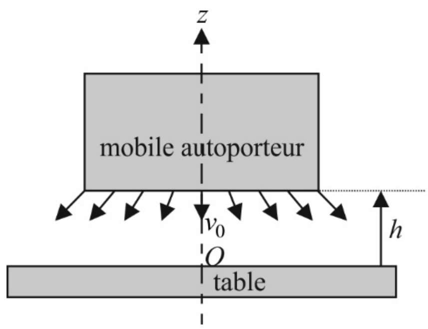
4. Sphère de rayon variable dans un fluide incompressible

Une sphère de rayon variable $R(t)$, de centre O est placée dans un fluide incompressible. Un point M du fluide est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans un système d'axes $Oxyz$ lié au référentiel d'étude.
1) Justifier que la vitesse d'une particule fluide s'écrive $\vec{v}(M,t) = v(r,t)\vec{e}_r$
2) Calculer $v(r,t)$ en fonction de R, $\dot{R}$ et r.
3) Montrer que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$ et calculer φ avec la convention $\varphi \underset{r\to\infty}{\to} 0 \ \forall t$.
4) On suit une particule donnée (description lagrangienne) en M à la date t : $\overrightarrow{OM} = s(t)\vec{e}_r$. Calculer $s(t)$. Retrouver l'expression de $\vec{v}$ et calculer l'accélération $\vec{a}$.

réponses : 2) $v(r,t) = \dfrac{R^2}{r^2}\dot{R}$ 3) $\varphi(r,t) = -\dfrac{R^2}{r}\dot{R}$ 4) $s(t) = (R(t)^3 + Cte)^{\frac{1}{3}}$, $\vec{a} = \left[\dfrac{R^2}{r^2}\ddot{R} + 2\dfrac{R\dot{R}^2}{r^2} - \dfrac{2R^4\dot{R}^2}{r^5}\right]\vec{e}_r$

5. Mobile à coussin d'air

Le mobile est un cylindre d'axe Oz vertical de rayon R, dont la base se trouve à une distance h de la table (plan $z = 0$). Il éjecte de l'air vers le bas avec une vitesse donnée en coordonnées cylindriques par l'expression $\vec{v} = v_r(r)\vec{e}_r - v_0\vec{e}_z$ au niveau de la base. L'écoulement d'air est supposé incompressible. Le champ des vitesses est recherché sous la forme $\vec{v} = v_r(r)\vec{e}_r + v_z(r,z)\vec{e}_z$.



1) On donne dans le cas étudié $\text{div}\vec{v} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$.
Déterminer $v_r(r)$ et $v_z(r,z)$.
2) L'écoulement est-il tourbillonnaire ? S'il ne l'est pas, calculer le potentiel des vitesses $\varphi(r,z)$.
3) Donner l'équation d'une ligne de courant.
4) Donner l'équation horaire de la trajectoire d'une particule d'air : $\begin{cases} r(t) \\ z(t) \end{cases}$.
5) Déterminer l'accélération $\vec{a}$ de la particule.

réponses : 1) $v_r(r) = \dfrac{v_0 r}{2h}$; $v_z(r,z) = -\dfrac{v_0 z}{h}$ 2) $\varphi(r,z) = \dfrac{v_0}{4h}\left[r^2 - 2z^2\right]$ 3) $z = z_0\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2$ 4) $\begin{cases} r = r_0 e^{\frac{v_0 t}{2h}} \\ z = z_0 e^{-\frac{v_0 t}{h}} \end{cases}$

5) $\vec{a} = \dfrac{v_0^2}{4h^2}\left[r\vec{e}_r + 4z\vec{e}_z\right]$

DYNAMIQUE DES FLUIDES

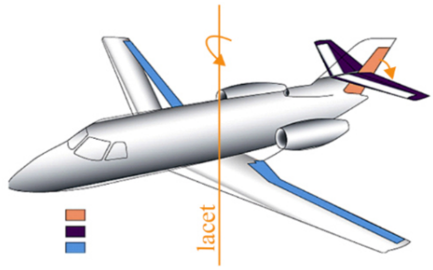
• *Écoulements externes*

1. Décollage d'un Airbus A38

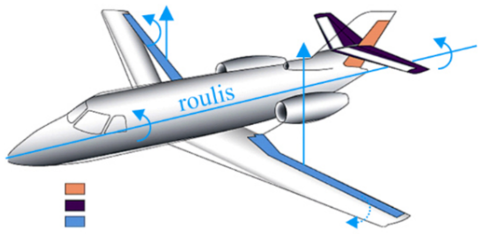
1) Calculer sa vitesse au décollage au niveau de la mer, à une température de 20°C, pour une masse de 421 tonnes, une surface portante de $845\,\mathrm{m}^2$ et un coefficient de portance $C_z = 1{,}38$.
Calculer la variation relative de cette vitesse due à une variation d'altitude de $+2250$ m (altitude de Mexico).
Calculer la variation relative de cette vitesse due à une variation de température de +20°C.
2) Le décollage se fait-il face aux vents dominants, avec le vent arrière, ou de travers ?
Lorsque la vitesse de décollage est atteinte, le pilote actionne la gouverne de profondeur, ce qui provoque la rotation de l'avion (le nez s'élève). Identifier cette gouverne sur le schéma ci-dessous. À quoi servent les autres parties mobiles (tangage ? lacet ? roulis ? Tracer les axes de rotation dans chaque cas. Que se passe-t-il lorsque l'avion entame sa rotation ?
Des éléments hypersustentateurs (becs au bord d'attaque des ailes, ou volets au bord de fuite) peuvent être orientés vers le haut ou vers le bas. Commenter leur influence lors des phases d'atterrissage et de décollage.
3) La finesse de l'avion est le rapport du coefficient de portance sur celui de traînée Sa valeur maximale est de 22 pour l'A380. Montrer que c'est le rapport de la distance horizontale parcourue sur la perte d'altitude lors d'un vol « plané » (moteurs coupés). Quelle est sa signification dans le digramme paramétrique donnant $C_z(i)$ et fonction de $C_x(i)$ (polaire d'Eiffel) pour différentes incidences ?

réponses : 1) $v = 276\,\mathrm{km.h^{-1}}$, altitude : $\Delta v / v = 13\%$, température : $\Delta v / v = 3{,}4\%$. 2) Action des gouvernes de l'avion :

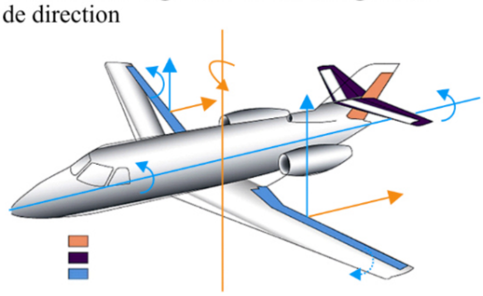
on contrôle l'assiette avec la gouverne de profondeur



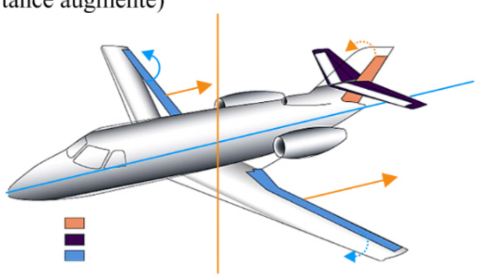
on contrôle l'angle de lacet avec la gouverne de direction



on contrôle l'inclinaison avec les ailerons.
pour virer à droite: aileron droit vers le haut (la portance diminue) et aileron gauche vers le bas (la portance augmente)



sans correction la traînée augmentant à gauche plus qu'à droite, le nez de l'avion part vers la gauche (lacet inverse)



on corrige la dérive en actionnant la gouverne de direction vers la droite

2. Écoulement de Stokes autour d'une sphère

On considère l'écoulement stationnaire incompressible à faible nombre de Reynolds ($R_e < 1$), uniforme à l'infini (vitesse $\vec{u} = u\vec{e}_z$), autour d'une sphère lisse de rayon R et de centre O. On repère un point M de l'écoulement en coordonnées sphériques. On néglige l'action de la pesanteur.

1) Simplifier l'expression de la vitesse eulérienne en analysant les symétries du problème.

On montre que le champ de vitesse de l'écoulement est donné par $\begin{cases} v_r = u\cos\theta\left[1-\dfrac{3}{2}\dfrac{R}{r}+\dfrac{R^3}{2r^3}\right] \\ v_\theta = -u\sin\theta\left[1-\dfrac{3}{4}\dfrac{R}{r}-\dfrac{R^3}{4r^3}\right] \end{cases}$.

Montrer que les conditions aux limites du problème sont bien vérifiées, ainsi qu'une des équations locales.

On donne $\operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r^2 v_r\right] + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[v_\theta\sin\theta\right] + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$ en coordonnées sphériques.

2) On donne la pression $p(r,\theta) = p_0 - \dfrac{3u\eta R}{2r^2}\cos\theta$ obtenue en prenant $p \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} p_0$. Calculer la résultante $\vec{F}_p$ des actions de pression sur la sphère. Comment faudrait-il modifier ce résultat si l'on tenait compte de la pesanteur ?

3) Le fluide exerce également sur un élément de surface $\mathrm{d}^2\mathscr{S}$ de la sphère une force visqueuse $\mathrm{d}^2\vec{F}_\mathrm{v} = \eta\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}(r=R)\mathrm{d}^2\mathscr{S}\,\vec{e}_\theta$.

Justifier cette expression et calculer $\vec{F}_\mathrm{v}$.

4) En déduire la force de traînée exercée par le fluide sur la sphère. Montrer que l'on obtient bien la formule de Stokes $\vec{F}_\mathrm{t} = -6\pi\eta R\vec{u}$ pour une sphère mobile avec $\vec{u}$ dans un fluide au repos à l'infini.

réponses : 2) $\vec{F}_p = 2\pi u\eta R\,\vec{e}_z$ avec la pesanteur, on a un gradient de p dû à $\vec{g}$ et il se rajoute la poussée d'Archimède. 3) $\vec{F}_\mathrm{v} = 4\pi u\eta R\,\vec{e}_z$ 4) $\vec{F}_\mathrm{t} = 6\pi u\eta R\,\vec{e}_z$ soit $\vec{F}_\mathrm{t} = -6\pi\eta R\vec{u}$ si $\vec{u}$ est la vitesse de la sphère

3. Chute d'une bille

On laisse chuter sans vitesse initiale une bille de masse $m = 0{,}4\ \mathrm{g}$, de rayon $r = 2{,}5\ \mathrm{mm}$ dans de la glycérine de masse volumique $\rho = 1300\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et de viscosité dynamique $\eta = 0{,}60\ \mathrm{Pl}$. On suppose que la force de traînée qu'exerce la glycérine sur la bille vaut $\vec{F}_\mathrm{t} = -6\pi\eta r\vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la bille. On donne l'intensité du champ de pesanteur : $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1) Déterminer la loi donnant $v(t)$ en projection sur un axe vertical descendant et en déduite la vitesse limite v_lim de la bille ainsi que la durée caractéristique τ d'obtention du régime stationnaire. On introduira la masse volumique ρ_0 de la bille. Commenter les valeurs numériques de v_lim et de τ.

2) Calculer le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement autour de la bille et commenter l'expression utilisée pour la force de traînée. Comment évolue Re avec r ?

3) Proposer une méthode pour mesurer η.

4) Pourquoi la bille ne doit-elle pas être placée trop près des parois du récipient contenant la glycérine ?

réponses : 1) $v_\mathrm{lim} = \dfrac{2gr^2}{9\eta}(\rho_0-\rho) = 10{,}9\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$; $\tau = \dfrac{2\rho_0 r^2}{9\eta} = 14{,}1\ \mathrm{ms}$ 2) $Re = 1{,}18$ convenable, marche mieux avec r plus petit (Re en r^3) 3) mesure de v_lim en chronométrant les passages de la bille au niveau de graduations régulièrement espacées

• *Écoulements internes*

4. Coefficient de pertes de charges linéaires / diagramme de Moody

Dans une conduite circulaire de diamètre D, de rugosité ε et de longueur L s'écoule un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η avec une vitesse débitante u.

1) Analyse dimensionnelle.

— Justifier que la perte de charge Δp entre l'entrée et la sortie de la conduite est proportionnelle à la longueur L, toutes choses égales par ailleurs. On cherche donc une relation de la forme $f\left(\Delta p/L, D, \varepsilon, u, \rho, \eta\right) = 0$. Pour cela, on cherche à former des coefficients n_i^* sans dimension de la forme $n_i^* = \left(\dfrac{\Delta p}{L}\right)^\alpha D^{\beta_1}\varepsilon^{\beta_2}u^\gamma\rho^\delta\eta^\lambda$.

— Montrer que l'on se ramène à un système linéaire en α, $\beta = \beta_1 + \beta_2$, γ, δ et λ. Il y a-t-il unicité des solutions de ce système ? Montrer que l'on peut se fixer les valeurs de α et β. Ces coefficients étant supposés connus, résoudre ce système et montrer que $n_i^* = \left(\frac{\Delta p \eta}{L\rho^2 u^3}\right)^\alpha \left(\frac{\rho u D}{\eta}\right)^\beta \left(\frac{\varepsilon}{D}\right)^{\beta_2}$. Combien peut-on former de coefficients sans dimension indépendants ?

— Définir la rugosité relative de la conduite et le nombre de Reynolds de l'écoulement. Identifier pour chaque nombre les valeurs correspondantes de α, β et β_2.

— On définit le coefficient de pertes de charges linéaires par $\lambda = \Delta p \Big/ \frac{1}{2}\rho u^2 \frac{L}{D}$. Identifier les valeurs correspondantes de α, β et β_2. De quels autres nombres sans dimension dépend-il ?

Expliquer la construction du diagramme de Moody.

2) Par lecture sur le diagramme de Moody, donner la perte de charge par mètre dans un tube de cuivre de diamètre intérieur de 1cm, de rugosité relative $5 \cdot 10^{-3}$, pour un débit d'eau de $7{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$. Commenter.

réponses : 1) pour λ, on a $\alpha = 1$, $\beta_2 = 0$ et $\beta = 1$

5. Écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique

Un fluide visqueux incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité η, s'écoule dans un tube cylindrique d'axe Oz, de rayon R et de longueur L. On néglige l'action de la pesanteur et on suppose que l'écoulement est stationnaire et parallèle à Oz : $\vec{v} = v_z(r,\theta,z)\vec{e}_z$. On note $\Delta p = p_e - p_s$ la différence de pression entre l'entrée du tube ($z = 0$) et la sortie ($z = L$).

1) Justifier que $\vec{v} = v_z(r)\vec{e}_z$ et $p = p(r,z)$. Montrer que $v_z(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2)$ et calculer $p(r,z)$.

2) Montrer que le débit volumique s'écrit $q_V = A\Delta p$ (loi de Poiseuille). Exprimer A en fonction de R, η et L.

3) Calculer la force qu'exerce le fluide sur le tube. Commenter le résultat.

4) On applique les résultats précédents afin de déterminer la viscosité dynamique d'un fluide incompressible. Pour cela, on alimente la conduite en plaçant en amont un récipient cylindrique d'axe vertical, de rayon $a >> R$. L'écoulement est alors quasi-stationnaire. La pression extérieure est uniforme et vaut p_0.

Pendant une durée Δt, le fluide passe d'une hauteur H_1 à $H_2 < H_1$. En déduire l'expression de η en justifiant soigneusement les approximations faites.

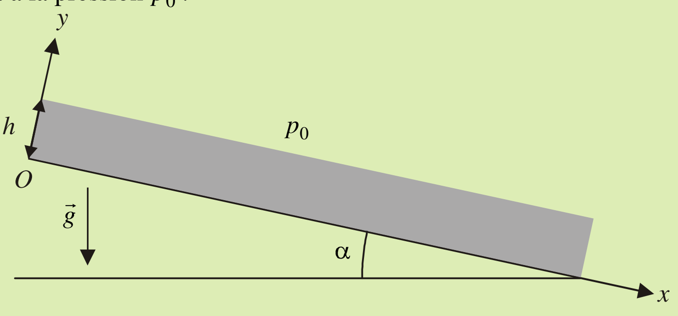
réponses : 1) $p(z) = p_e - \frac{\Delta p}{L} z$ 2) $q_V = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta p$ 3) $\vec{F}_v = \pi \Delta p R^2 \vec{e}_z$ 4) $\eta = \rho g R^4 \Delta t \big/ 8La^2 \ln(H_1/H_2)$

6. Écoulement sur un plan incliné

On cherche à modéliser l'écoulement de la lave le long des pentes d'un volcan.

On considère pour cela l'écoulement stationnaire d'une fine couche de fluide visqueux de viscosité dynamique η, incompressible, de masse volumique ρ, sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale.

On suppose l'épaisseur h de la couche constante, et l'écoulement parallèle à la ligne de plus grande pente : $\vec{v} = v_x(x,y)\vec{e}_x$. L'air est supposé être un fluide parfait à la pression p_0.



1) Montrer que $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$. Donner les conditions aux limites portant sur $v_x(y)$. On étudiera pour la condition en $y = h$ l'équilibre de la surface libre du fluide.

2) En déduire le champ de pression dans le fluide, puis le champ de vitesse. Représenter le profil des vitesses. Calculer v_{max}.

3) Calculer le débit volumique q_V pour une tranche de fluide de largeur L selon Oz.

4) Déterminer la contrainte (force par unité de surface) tangentielle exercée par le fluide sur le plan incliné.

réponses : 1) $\frac{\partial v_x}{\partial y}(y=h)=0$ 2) $p=p_0-\rho g\cos\alpha(y-h)$ indépendant de x ; $v_x=\frac{\rho g\sin\alpha}{\eta}y\left(h-\frac{y}{2}\right)$ 3) $q_V=\frac{\rho gL\sin\alpha h^3}{3\eta}$

7. Établissement d'un écoulement de Couette à une dimension (régime instationnaire)

On considère un fluide incompressible entre deux plaques horizontales d'équations $y=0$ et $y=h$. Le fluide de viscosité cinématique ν est au repos pour $t\leq 0$. À $t=0$, la plaque inférieure est mise en mouvement instantanément avec une vitesse $\vec{u}=u\vec{e}_x$. On suppose que la vitesse en un point du fluide est portée par $\vec{e}_x$ à un instant $t>0$.

1) Montrer que $\vec{v}=v_x(y,t)\vec{e}_x$. En déduire que l'accélération d'une particule fluide peut s'écrire $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_x(y,t)}{\partial t}\vec{e}_x$.

2) On considère une particule parallélépipédique de côtés dx, dy et dz (et donc de volume $\mathrm{d}^3\mathscr{V}=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$). Sur quelles faces du parallélépipède s'exercent des forces de viscosité ? En déduire que la résultante de ces forces sur la particule fluide vaut : $\mathrm{d}^3\vec{F}_\mathrm{v}=\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\mathrm{d}^3\mathscr{V}\vec{e}_x$.

3) En appliquant le principe fondamental à la particule fluide, montrer qu'en l'absence de gradient horizontal de pression appliqué, $v_x(y,t)$ est régi par l'équation de diffusion $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=\frac{1}{\nu}\frac{\partial v_x}{\partial t}$ (analogue à l'équation de diffusion thermique ou de particules). En déduire la durée τ caractéristique de l'établissement d'un régime stationnaire. Faire l'application numérique avec $\nu=10^{-6}\ \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$ et $h=10\,\mathrm{cm}$.

4) Montrer que dans le cas $h\to\infty$, $v_x(y,t)=u[1-\mathrm{erf}(\xi)]$ avec $\xi=\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}$ est solution du problème étudié.

On donne $\mathrm{erf}(\xi)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi e^{-X^2}\mathrm{d}X$ et $\int_0^{+\infty}e^{-X^2}\mathrm{d}X=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

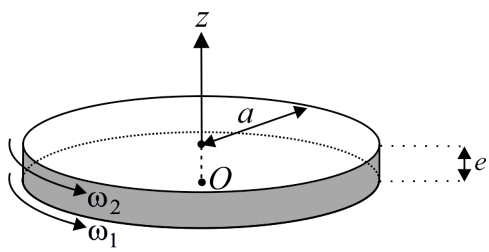
Dans quel intervalle de temps la solution donnée est-elle une bonne approximation si h est fini ?

5) Calculer la contrainte visqueuse subie la plaque inférieure à la date t dans l'approximation précédente. Commenter le cas $t\to 0$.

réponses : 5) $\vec{\sigma}_\mathrm{v}\underset{t\to 0}{\to}\infty$: impossible de mettre la plaque en mouvement en une durée nulle

8. Viscosimètre

On considère deux disques de même rayon a en rotation autour de l'axe Oz. Le disque D1 est à la cote $z=0$ et tourne à la vitesse angulaire ω_1, le disque D2 est à la cote $z=e<<a$ et tourne à la vitesse angulaire ω_2. On néglige les effets de bord en $r=a$. On a placé entre les deux disques un fluide incompressible de viscosité η. Aucun gradient de pression n'est appliqué. On cherche un champ de vitesse de la forme $\vec{v}(M,t)=r\omega(z,t)\vec{e}_\theta$.



1) Commenter cette forme.

2) La force exercée par une couche de fluide de surface d$\mathscr{S}$ sur celle du dessous est $\mathrm{d}\vec{F}=\eta\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}\mathscr{S}\,\vec{e}_\theta$. On considère un volume élémentaire de fluide compris entre r et $r+\mathrm{d}r$, θ et $\theta+\mathrm{d}\theta$, z et $z+\mathrm{d}z$. Déterminer les forces s'exerçant sur ce volume.

3) Appliquer le théorème du moment cinétique en projection sur Oz à ce volume, en déduire que $\omega(z,t)$ est solution d'une équation de diffusion.

4) On se place en régime stationnaire. Calculer $\omega(z)$. En déduire le moment du couple qu'exerce le fluide sur D1. Définir et calculer le coefficient de frottement fluide λ entre les deux plaques.

5) On donne pour l'huile de ricin $\rho=965\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et $\eta=1{,}015\,\mathrm{Pl}$. On donne également $a=10\,\mathrm{cm}$ et $e=5\,\mathrm{mm}$, $\omega_1=\Omega=10$ tours/min et $\omega_2=0$. Vérifier que l'on est bien en régime laminaire. Donner également le temps caractéristique d'établissement du régime stationnaire quand, à partir du repos, ω_1 passe brutalement à Ω.

réponses : 4) $\Gamma=\frac{\pi\eta a^4}{2e}(\omega_2-\omega_1)$

DIFFUSION THERMIQUE

• *Régime stationnaire*

1. Fusible en régime stationnaire

On considère un cylindre plein conducteur électrique d'axe Ox, de section $\mathscr{S}$, de longueur L, de conductivité thermique λ, de conductivité électrique γ, parcouru par un courant I (le vecteur densité de courant électrique $\vec{J} = J_0 \vec{e}_x$ est uniforme). La surface latérale est calorifugée, les extrémités $x=0$ et $x=L$ sont en contact avec le milieu ambiant de température T_0.

On donne $\lambda = 65\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$; $\gamma = 1{,}2\cdot 10^6\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$; $T_0 = 290\ \mathrm{K}$; $L = 2{,}5\ \mathrm{cm}$

1) Calculer la résistance électrique R du fusible ainsi que la puissance électrique P_e reçue en régime stationnaire.

2) Déterminer l'équation différentielle régissant $T(x)$ lorsque le régime stationnaire est atteint. L'intégrer et tracer $T(x)$.

3) Le fusible fond pour $T_\mathrm{F} = 390\ \mathrm{K}$. On veut un fusible admettant $I_{\max} = 16\ \mathrm{A}$.

À quel endroit le fusible va-t-il se rompre si $I > I_{\max}$?

Quelle section $\mathscr{S}$ doit-on prévoir ? Donner sa valeur numérique en mm^2.

4) On fixe $I = 10\ \mathrm{A}$ avec la section trouvée précédemment. Calculer numériquement $P_\mathrm{th}(0)$ et $P_\mathrm{th}(L)$ puissance thermique transférée par conduction en $x=0$ et en $x=L$. Commenter leurs signes. Comparer $P_\mathrm{th}(0)$ à P_e.

5) Montrer que l'entropie du fusible est à une constante près $S = \int_0^L \rho c \mathscr{S} \ln[T(x)]\mathrm{d}x$, intégrale que l'on ne cherche pas à calculer.

Calculer l'entropie produite dans le fusible par unité de temps. Interpréter le résultat.

réponses : 1) $P_\mathrm{e} = \dfrac{L J_0^2 \mathscr{S}}{\gamma}$ 2) $T(x) = \dfrac{J_0^2 x}{2\lambda\gamma}(L-x) + T_0$ 3) $\mathscr{S} = 1{,}6\ \mathrm{mm}^2$ 4) $P_\mathrm{th}(0) = -P_\mathrm{th}(L) = -\dfrac{P_\mathrm{e}}{2}$ 5) $\dfrac{\delta S^\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{P_\mathrm{e}}{T_0} > 0$

2. Expérience de Ingen-Housz

On considère un cylindre plein en cuivre, à base circulaire de rayon r, de longueur ℓ, de conductivité thermique λ. On le met en contact par une de ses extrémités $x=0$ avec de l'eau bouillante de température $T_0 = 373\ \mathrm{K}$. La température extérieure est $T_\mathrm{e} = 293\ \mathrm{K}$. On suppose que la température est uniforme dans une section $x = Cte$ du cylindre. On note h le coefficient de transmission thermique de surface latérale. On se place en régime permanent.

1) Établir la loi $T(x)$ en supposant la longueur ℓ suffisamment grande. On précisera cette condition.

2) On place comme précédemment deux cylindres de même géométrie, mais constitués par deux métaux différents de conductivités thermiques λ_1 et λ_2. Les deux tubes sont recouverts de paraffine dont la température de fusion vaut $T_\mathrm{f} = 333\ \mathrm{K}$. On constate qu'en régime permanent, la paraffine fond sur des distances $x_1 = 15{,}6\ \mathrm{cm}$ pour le premier cylindre et $x_2 = 6{,}4\ \mathrm{cm}$ pour le second. On connaît la conductivité thermique $\lambda_1 = 390\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ du premier métal, en déduire celle du second.

Donner la valeur numérique de h sachant que $r = 1\ \mathrm{cm}$.

3) Établir la loi $T(x)$ lorsque la condition du 1) n'est pas vérifiée.

réponses :1) $T(x) = T_\mathrm{e} + (T_0 - T_\mathrm{e})e^{-\frac{x}{\delta}}$ valable si $\delta = \sqrt{\dfrac{\lambda r}{2h}} << \ell$ 2) $\lambda_2 = \lambda_1\left[\dfrac{x_2}{x_1}\right]^2 = 65{,}6\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$

$h = \dfrac{r\lambda}{2x_\mathrm{f}^2}\left[\ln\left(\dfrac{T_0 - T_\mathrm{e}}{T_\mathrm{F} - T_\mathrm{e}}\right)\right]^2 = 38{,}5\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ 3) $T(x) = T_\mathrm{e} + (T_0 - T_\mathrm{e})\left[\mathrm{ch}\dfrac{x}{\delta} - \dfrac{h\,\mathrm{ch}\dfrac{\ell}{\delta} + \dfrac{\lambda}{\delta}\mathrm{sh}\dfrac{\ell}{\delta}}{h\,\mathrm{sh}\dfrac{\ell}{\delta} + \dfrac{\lambda}{\delta}\mathrm{ch}\dfrac{\ell}{\delta}}\,\mathrm{sh}\dfrac{x}{\delta}\right]$

3. Température à l'intérieur d'un igloo

Quatre explorateurs construisent un igloo de rayon *R* et d'épaisseur *e* sur la banquise. La neige compactée qu'ils utilisent possède une conductivité thermique $\lambda = 0{,}3\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. La température extérieure est $T_{\text{ext}} = -10°\mathrm{C}$. Chaque explorateur dégage une puissance *P* de 50 W. On néglige les transferts thermiques convectifs et radiatifs. Les explorateurs s'enferment dans l'igloo et on suppose qu'un régime stationnaire s'établit.

1) Calculer littéralement la température intérieure T_{int} de l'igloo en fonction des données du problème. Étudier l'influence de *R* et de *e*. Faire l'A.N pour $R = 1{,}5\ \mathrm{m}$ et $e = 30\ \mathrm{cm}$.

réponses : 1) $T_{\text{int}} = 1{,}8°\mathrm{C}$

4. Isolation d'une conduite cylindrique

Un écoulement stationnaire de vapeur à la température $T_0 = 950\ \mathrm{K}$ se fait à l'intérieur d'une conduite en acier de longueur $L = 2\ \mathrm{m}$, de rayon intérieur $R_1 = 5\ \mathrm{cm}$ et de rayon extérieur $R_2 = 10\ \mathrm{cm}$. On veut isoler la canalisation avec une gaine isolante d'épaisseur $e = R_3 - R_2$. La température de l'air extérieur est $T_e = 300\ \mathrm{K}$. On donne les conductivités thermiques de l'acier $\lambda_a = 40\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, de l'isolant $\lambda_i = 1{,}5\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, ainsi que les coefficients de transmission thermique de surface latérale entre la vapeur et l'acier $h_0 = 600\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$; entre l'isolant et l'air $h_e = 10\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$.

1) Établir l'expression de la résistance thermique d'un conducteur de conductivité λ, de longueur *L*, compris entre deux cylindres coaxiaux de rayons *R* et $R' > R$.

2) Établir l'expression de la résistance thermique d'une surface cylindrique de rayon *R*, de longueur *L*, séparant deux milieux pour lesquels le coefficient de transmission thermique de surface est *h*.

3) Donner le schéma électrique équivalent de la conduite en présence de l'isolant. En déduire la résistance équivalente $R_{\text{th éq}}$ de la conduite avec isolant.

4) Justifier par le calcul l'existence d'une valeur R_c du rayon R_3 pour lequel $R_{\text{th éq}}$ est minimale. Interpréter.

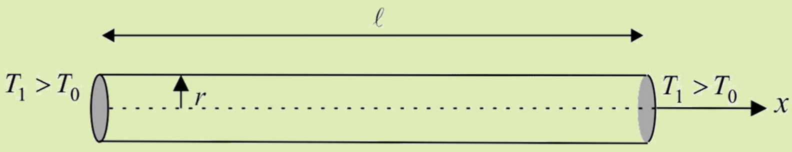
réponses : 1) $R_{\text{th}} = \ln\left(\dfrac{R'}{R}\right) \Big/ 2\pi\lambda L$ 2) $R_{\text{th}} = \dfrac{1}{2\pi h R L}$ 4) $R_c = \dfrac{\lambda_i}{h_e}$

• *Régime transitoire, A.R.Q.S*

5. Évolution de la température dans une barre cylindrique chauffée à ses extrémités

On considère une barre pleine en cuivre, à base circulaire de petit rayon *r*, de longueur ℓ, de diffusivité thermique *a*, calorifugée sur sa surface latérale. Initialement, la température de la barre est homogène : $T(x,0) = T_0$. Pour $t > 0$, on porte brusquement les extrémités de la barre $x = -\ell/2$ et $x = +\ell/2$ à la température $T_1 > T_0$.

1) Déterminer $T(x,t)$ en utilisant des séries de Fourier.



réponses : 1) $T(x,t) = T_1 + \dfrac{4(T_0 - T_1)}{\pi} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos\left[\frac{(2p+1)\pi x}{\ell}\right] \exp\left(\frac{-(2p+1)^2 \pi^2 a t}{\ell^2}\right)$

6. Évolution de la température dans une barre

Une barre de section $\mathscr{S}$, de conductivité thermique λ, de capacité thermique massique $c \simeq 0$ et de longueur *L* relie deux solides S_1 et S_2 de capacités thermiques C_1 et C_2, de conductivités thermiques $\lambda_1 \to \infty$ et $\lambda_2 \to \infty$, de températures T_1 et T_2. Initialement, on a $T_1 = T_1^0$ et $T_2 = T_2^0 < T_1^0$. On note $\Phi = \Phi_{1 \to 2}$ le flux thermique dans la barre de S_1 vers S_2.

1) Montrer que l'on peut définir une résistance thermique à la date *t* : $R_{\text{th}} = \dfrac{T_1(t) - T_2(t)}{\Phi}$ et la calculer. Calculer la température finale T_f du système. Déterminer les lois $T_1(t)$ et $T_2(t)$. Tracer les graphes correspondants.

2) Calculer la variation d'entropie Δ*S* entre l'état initial et l'état final du système.

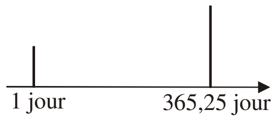
réponses : 1) $R_{\text{th}} = \dfrac{L}{\lambda \mathscr{S}}$; pour $t \to \infty$, T_1 et T_2 tendent vers $T_{\text{f}} = \dfrac{C_1 T_1^{\,0} + C_2 T_2^{\,0}}{C_1 + C_2}$, on a $T_1 = T_{\text{f}} + \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}(T_1^{\,0} - T_2^{\,0})e^{-\frac{t}{\tau}}$ et $T_2 = T_{\text{f}} - \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}(T_1^{\,0} - T_2^{\,0})e^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $\tau = \dfrac{1}{R_{\text{th}}} \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

● *Régime forcé*

7. Ondes thermiques dans le sol

On étudie la répartition de températures à l'intérieur du sol modélisé par le demi-espace $x \geq 0$, homogène. On note ρ sa masse volumique, λ sa conductivité thermique, c sa capacité thermique massique, $a = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ sa diffusivité thermique.

Dans ces conditions la température dans le sol ne dépend que de la profondeur x et du temps t, et elle est régie par l'équation de la diffusion thermique : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ (*). Des mesures de la température à la surface du sol $T(0,t)$ pendant plusieurs années permettent de tracer le spectre des variations $\theta(0,t) = T(0,t) - T_0$ de cette température autour de la valeur moyenne T_0 dont l'allure grossière est donnée ci-contre. On note ω_1 et $\omega_2 < \omega_1$ les pulsations de ces pics.



1) On cherche à déterminer $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$ pour $x \geq 0$. Quelle propriété de (*) permet-elle de considérer d'abord une condition aux limites de la forme $\theta(0,t) = \dfrac{\Delta T}{2}\cos(\omega t)$? Quelle est la signification de ΔT ?

2) On pose $\delta = \sqrt{2a/\omega}$. Quelle est la dimension de cette grandeur ?

3) On se place en régime sinusoïdal forcé : les solutions de (*) sont cherchées sous la forme $\theta(x,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{\theta}(x,t)\right]$ avec $\underline{\theta}(x,t) = \underline{f}(x)e^{i\omega t}$ (les grandeurs soulignées sont des complexes). Justifier cette forme.

Déterminer l'équation différentielle régissant la fonction $\underline{f}(x)$. Montrer que les solutions les plus générales s'écrivent alors sous la forme : $\underline{f}(x) = Ae^{-\frac{x}{\delta}}e^{-i\frac{x}{\delta}} + Be^{\frac{x}{\delta}}e^{i\frac{x}{\delta}}$. Donner la loi $T(x,t)$ en régime établi.

4) A.N : On définit la « profondeur de pénétration » comme la profondeur à laquelle l'amplitude d'une variation de température est réduite à 1% de son amplitude en surface. On mesure des profondeurs de pénétration pour des cycles quotidiens et annuels, selon le type de sol étudié :

	a ($\mathrm{cm^2 \cdot s^{-1}}$)	Profondeur de pénétration	
		Jour (m)	Année (m)
Roc	0,020	1,10	20,5
Argile humide	0,015	0,95	18,0
Sable humide	0,010	0,80	14,5
Argile sèche	0,002	0,40	6,5
Sable sec	0,001	0,30	4,5

Montrer que le rapport des profondeurs de pénétration pour un matériau donné, puis que la dépendance en a, sont conformes à la théorie. Que peut-on en conclure sur la température des grottes enfouies à plus de 5 m sous terre ?

réponses :4) $T(x,t) = T_0 + \Delta T/2 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}}\cos(\omega t - x/\delta)$

DIFFUSION DE PARTICULES

● *Régime stationnaire*

1. Sédimentation

On disperse N particules identiques, assimilées à des boules de masse m et de rayon a dans un bécher cylindrique de section $\mathscr{S}$ rempli d'eau de masse volumique ρ. On note Oz la verticale descendante.

1) Une particule dispersée est soumise à son poids et à une force de frottement fluide donnée par la formule de Stokes $f = -6\pi\eta a\vec{v}$ où η est la viscosité de l'eau.

Déterminer la vitesse limite v_{lim} des particules dispersées, supposée atteinte très rapidement. On supposera par la suite que la masse volumique des particules est très supérieure à celle de l'eau.

En déduire le nombre de particules dispersées δN_{s} traversant une section horizontale du bécher entre les instants t et $t + \text{d}t$, en fonction notamment de la densité particulaire $n(z)$.

2) Du fait de l'existence d'un gradient de densité particulaire, un phénomène de diffusion se superpose au phénomène étudié dans la question a). Exprimer le nombre de particules dispersées δN_{d} diffusées à travers une section horizontale du bécher entre les instants t et $t + \text{d}t$, en fonction notamment du coefficient de diffusion D et de $\dfrac{\text{d}n}{\text{d}z}$.

3) En déduire en régime stationnaire une équation différentielle régissant $n(z)$ et donner sa solution.

En admettant que $n(z)$ est aussi donnée par un facteur de Boltzmann $e^{\frac{mgz}{k_{\text{B}}T}}$, en déduire une relation entre D, a, η, T et la constante de Boltzmann k_{B}.

On donne à $T = 293\ \text{K}$:

— les coefficients de diffusion $D = 6{,}9\cdot10^{-11}\ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ de l'hémoglobine dans l'eau et $D = 1{,}8\cdot10^{-9}\ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ du dioxygène dans l'eau,

— le rayon $a = 3\ \text{nm}$ d'une molécule d'hémoglobine.

En déduire le coefficient de viscosité de l'eau η et le rayon d'une molécule de dioxygène.

4) La relation $n(z) = n(0)e^{\frac{z}{h}}$ définit une hauteur h caractéristique de la sédimentation. Calculer h pour l'hémoglobine de masse molaire $M_{\text{hém.}} = 68\cdot10^3\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et pour l'urée de masse molaire $M_{\text{ur.}} = 60\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Peut-on séparer ces deux solutés par sédimentation ?

réponses : 3) $n(z) = n(z=0)e^{\frac{v_{\text{lim}}}{D}z}$; $a_{O_2} = 0{,}115\ \text{nm}$; $\eta = 1{,}0\cdot10^{-3}\ \text{Pa}\cdot\text{s}$

2. Diffusion d'un produit injecté dans une veine

Une veine de section $\mathscr{S}$ est modélisée par un tube cylindrique infini de rayon a. Le sang s'y écoule avec une vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ avec $v_0 > 0$. On injecte continûment dans la veine un produit en $x = 0$. La densité moléculaire du produit y reste constante et vaut $n_0{}^*$.

On note D le coefficient de diffusion du produit dans le sang.

1) Déterminer l'équation différentielle qui régit $n^*(x,t)$. Pour une longueur L donnée, faire apparaître deux temps caractéristiques de diffusion et de convection.

Quel est en mécanique des fluides le nombre analogue au rapport $\xi = \dfrac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{conv}}}$?

2) En déduire $n^*(x)$ en régime stationnaire. En faire la représentation graphique. Commenter la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} n^*(x)$.

3) La dose critique de produit que peut admettre un organe situé en amont du point d'injection, en $x=-L$ est n_c^*. Calculer la valeur de n_0^* permettant d'avoir $n_{max}^*(-L)=\dfrac{n_c^*}{10000}$.

Faire l'application numérique pour la concentration c_0 avec $L=10\,\text{cm}$; $D=10^{-4}\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$; $v_0=0{,}01\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $c_c=10^{-4}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

réponses : 1) $\dfrac{\partial n^*}{\partial t}=-v_0\dfrac{\partial n^*}{\partial x}+D\dfrac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}$ 2) $n^*(x)=n_0^* e^{\frac{v_0}{D}x}$

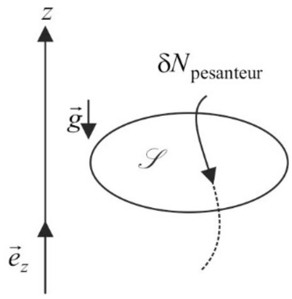
3. Modèle microscopique de l'atmosphère isotherme

L'air isotherme (température T) est supposé constitué de particules identiques de masse m. Entre deux chocs, une particule n'est soumise qu'à son poids $\vec{P}=m\vec{g}$ avec $\vec{g}$ uniforme.

1) On considère une particule subissant un choc à $t=0$. Sa vitesse juste après choc $\vec{v}_0$ est aléatoire, de distribution isotrope. Calculer $\vec{v}(t)$ s'il n'y a pas de choc entre 0 et t. Calculer la vitesse moyenne des particules formant l'air à un instant donné, en fonction de $\vec{g}$ et du temps moyen de vol τ.

2) Montrer que le poids induit un mouvement d'ensemble des particules, que l'on peut caractériser par un vecteur densité de courant vertical $\vec{J}_{N,\text{pesanteur}}=\dfrac{1}{\mathscr{S}}\dfrac{\delta N_{\text{pesanteur}}}{\text{d}t}\vec{e}_z$.

Calculer $\vec{J}_{N,\text{pesanteur}}$ en fonction de g, τ, n^* et $\vec{e}_z$.



3) Montrer qu'existe alors nécessairement un phénomène d'auto-diffusion que l'on suppose régi par la loi de Fick (avec un coefficient de diffusion D). Que vaut $\vec{J}_{N,\text{diffusion}}$ en fonction de D, n^* et $\vec{e}_z$?

4) Montrer en faisant un bilan de particules qui traversent une surface horizontale $\mathscr{S}$ pendant dt qu'en régime stationnaire : $n^*(z)=n_0^*\exp\left(-\dfrac{z}{H'}\right)$. Exprimer H' en fonction de g, τ et D.

5) On donne $D=\dfrac{1}{3}\ell\bar{v}$ où ℓ est le libre parcours moyen de la particule et $\bar{v}=\sqrt{\dfrac{8k_BT}{\pi m}}$ est la vitesse moyenne des particules. Calculer H' en fonction de k_B, T, m et g. Conclure.

6) De quel type d'équilibre s'agit-il ?

réponses : 1) $\bar{\vec{v}}=\vec{g}\tau$ 2) $\vec{J}_{N,\text{pesanteur}}=-n^*(z,t)g\tau\vec{e}_z$ 3) $\vec{J}_{N,\text{diffusion}}=-D\dfrac{\partial n^*}{\partial z}\vec{e}_z$ 4) $H'=\dfrac{D}{g\tau}$ 5) $H'=\dfrac{8}{3\pi}\dfrac{k_BT}{mg}$

4. Palier de diffusion

On considère la courbe intensité-potentiel obtenue pour le couple $Cu^{2+}/Cu(s)$ avec une électrode inoxydable. Cette courbe présente un palier pour des courants négatifs (lorsqu'il y a réduction) : on a $i=-K\left[Cu^{2+}\right]=-Kc$.

On cherche à justifier l'existence de ce palier en régime stationnaire. On se place à une dimension : les ions Cu^{2+} se déplacent selon Ox orthogonalement à la cathode (de surface S). Leur concentration sur la cathode (en $x=0$) est notée c_0. On suppose que hors d'une couche de diffusion de faible épaisseur δ dans laquelle $\left[Cu^{2+}\right]$ varie selon une loi affine, on a $\left[Cu^{2+}\right]=c$ pour $x\geq\delta$.

1) Énoncer la loi de Fick. En déduire l'expression de J_n (nombre de moles d'ions nickel qui diffusent par unité de temps et de surface) en fonction du coefficient de diffusion D des ions nickel, de c, c_0 et de δ.
2) Montrer que l'on a bien $i = -Kc$ lorsque le phénomène de diffusion devient limitant. Exprimer K en fonction de F, D, S et δ. On précisera quel est l'autre phénomène n'intervenant pas dans la cinétique car beaucoup plus rapide que la diffusion.

réponses : 1) $J_n = -D\dfrac{c-c_0}{\delta} < 0$ 2) $K = 2\dfrac{FDS}{\delta}$

● *Régime transitoire*

5. Réacteur nucléaire

Le fonctionnement du cœur d'un réacteur nucléaire limité par deux plans d'abscisse $x = \pm\dfrac{a}{2}$ et de section $\mathscr{S}$ est modélisé à 1D par :

— une production volumique par unité de temps σ de neutron provenant des réactions de fission, avec $\sigma = \dfrac{n^*(x,t)}{\tau}$ où $n^*(x,t)$ est la densité volumique de neutrons ;

— une zone de piégeage appelée couverture : pour $x \geq \dfrac{a}{2}$ ou $x \leq -\dfrac{a}{2}$, on a $n^* = 0$.

La diffusion dans le cœur obéit à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D.

1) Établir l'équation vérifiée par $n^*(x,t)$.

Quelle est la signification de τ ? Quelle serait l'évolution temporelle de n^* à x fixé sans le phénomène de diffusion ? Commenter.

2) Déterminer $n^*(x)$ en régime permanent. En déduire qu'il existe une condition liant τ à D et a. Que se passe-t-il si τ est inférieur à la valeur requise ?

Exprimer $n^*(x)$ en fonction de a, $\mathscr{S}$ et N_0 le nombre total de neutrons dans le réacteur.
Quelle est la densité maximale des neutrons ?
Déterminer le flux de neutron vers les zones de couverture.
Comparer le flux total sortant à la production totale de neutron.

3) Lors d'un arrêt d'urgence, des barres de piégeage plongent dans le coeur du réacteur. Le taux de production volumique global des neutrons peut alors être négatif (si le piégeage l'emporte sur la fission) : $\sigma = \dfrac{n^*(x,t)}{\tau'}$ avec τ' algébrique.

Rechercher la solution de l'équation de diffusion sous la forme $n^*(x,t) = f(x)g(t)$. On suppose que le régime permanent était atteint à l'instant $t = 0$.
En déduire le type de régime obtenu selon la valeur de τ'.

4) On note $n_{\mathrm{p}}{}^*$ la densité volumique des pièges et Σ la section efficace de piégeage. On suppose que les neutrons ont une vitesse de norme constante v.
Déterminer σ le nombre de neutrons piégés par unité de volume et de temps. Comparer au modèle macroscopique.

réponses : 1) $\dfrac{\partial n^*}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n^*}{\partial x^2} + \dfrac{n^*}{\tau}$ 2) $n^*(x) = n_0{}^*\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$ si $\tau = \dfrac{a^2}{\pi^2 D}$; $n_0{}^* = \dfrac{\pi N_0}{2a\mathscr{S}}$; $\delta N^{\mathrm{p}} = \delta N^{\mathrm{a}} = \dfrac{D\pi^2 N_0}{a^2}\mathrm{d}t$ 3) régime explosif si $0 < \tau' < \tau = \dfrac{a^2}{\pi^2 D}$, stationnaire si $\tau' = \dfrac{a^2}{\pi^2 D}$, sinon : $n^* \to 0$ 4) $|\sigma| = v\Sigma n_p{}^* n^* = \dfrac{n^*}{\tau''}$

6. Évaporation de l'éther

Un tube cylindrique de section $\mathscr{S}$ contient de l'éther liquide. On note h la distance entre l'ouverture et la surface du liquide. Un point du tube est repéré par son abscisse x à partir de l'ouverture. Le renouvellement de l'air au niveau de l'ouverture du tube implique que la pression partielle en éther y est pratiquement nulle.
L'évaporation est très lente et on suppose qu'il y a équilibre thermodynamique local dans le tube à la température $T = 293\ \mathrm{K}$. On note p_{s} la pression de vapeur saturante et on donne $p_{\mathrm{s}}(293\ \mathrm{K}) = 0{,}583\ \mathrm{bar}$. La diffusivité de la vapeur d'éther dans l'air est $D = 1{,}50 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.
La masse molaire de l'éther est $M = 74{,}1\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ et la masse volumique de l'éther liquide $\rho = 626\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

1) Montrer que dans l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire la densité moléculaire et la pression partielle de l'éther vapeur varient linéairement avec x. Montrer alors en appliquant la loi de Fick que si dn est le nombre de moles d'éther qui se vaporise pendant dt, $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}$ s'exprime en fonction de D, $\mathscr{S}$, p_s, h, R (constante des gaz parfaits) et T.

2) Montrer qu'en exprimant la relation entre le volume et le nombre n_L d'éther liquide, on aboutit à l'équation différentielle régissant $h(t)$.

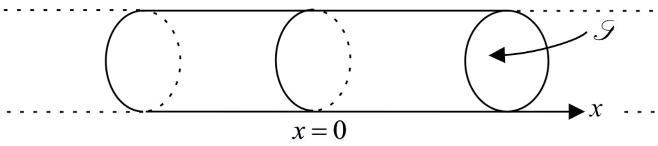
3) Résoudre cette équation différentielle.

A.N : calculer la durée nécessaire pour évaporer totalement l'éther remplissant les trois-quarts d'un tube à essai de longueur totale 20 cm.

réponses : 1) $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{D\mathscr{S}p_\mathrm{s}}{hRT}$ 2) $h\mathrm{d}h = \frac{DMp_\mathrm{s}}{\rho RT}\mathrm{d}t$ 3) $h = \sqrt{h_0^2 + \frac{2DMp_\mathrm{s}}{\rho RT}t}$, $t \simeq 2$ j 9h

7. Diffusion1D en géométrie infinie

On considère une diffusion unidirectionnelle dans un cylindre d'axe Ox, de longueur infinie et de section $\mathscr{S}$. A $t = 0$, on introduit N_0 particules en $x = 0$.



1) Montrer que $n^*(x,t) = \lambda t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$ est solution de l'équation de diffusion et qu'elle vérifie les conditions aux limites et les conditions initiales.

2) Calculer λ, conclure. On donne $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

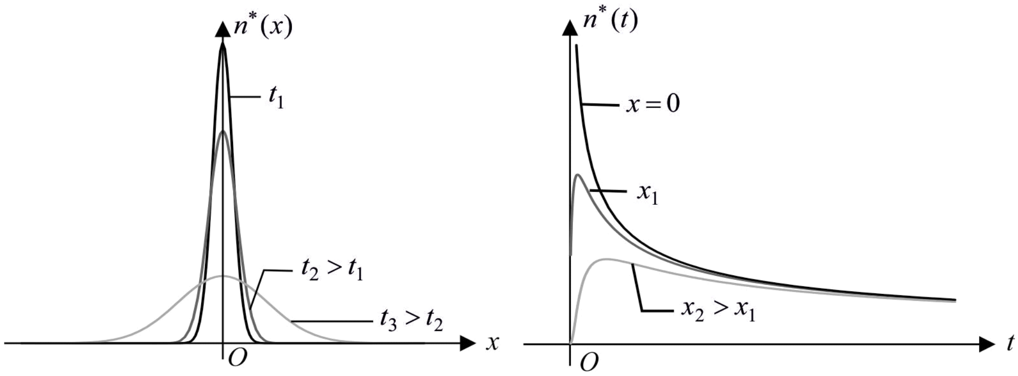
3) Tracer $n^*(x)$ pour différentes valeurs de t et $n^*(t)$ pour $x = 0$ et $x \neq 0$.

4) Calculer la largeur de la courbe $n^*(x)$ à mi-hauteur à la date t : $\Delta x(t)$. Quelle est sa signification physique ?

A.N : pour de l'encre dans l'eau, $D = 3 \cdot 10^{-9}$ m$^2 \cdot$ s^{-1}. En déduire l'ordre de grandeur du temps τ nécessaire à l'homogénéisation de l'encre dans un bocal rempli d'eau, de rayon 5 cm. Le processus est représenté ci-dessous.

réponses : 2) $\lambda = \frac{N_0}{\mathscr{S}\sqrt{4\pi D}}$ 4) $\Delta x = 4\sqrt{Dt\ln 2} \Rightarrow \tau \simeq 21$ h

3)



DIFFUSION DE PARTICULES