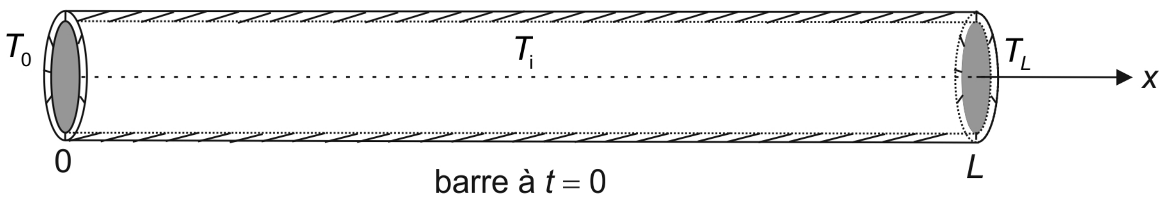
Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.

On considère une barre d'axe Ox constituée d'un solide homogène de masse volumique ρ, de conductivité thermique λ et de capacité thermique c. La barre est de longueur L et de section très inférieure à L^2, si bien qu'on peut négliger les variations de température dans une section droite de la barre. La température ne dépend donc que de l'abscisse x et du temps t : $T(x,t)$. La barre est calorifugée sur sa surface latérale.

Initialement, la barre est en équilibre avec le milieu extérieur : sa température est uniforme et égale à T_i .



barre à $t = 0$

À partir de $t = t_0 = 0$, on porte l'extrémité $x = 0$ de la barre à la température T_0 et l'extrémité $x = L$ à T_L. La température dans la barre est solution de l'équation de la chaleur à 1D :

$\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T}{\partial t}$, avec $a = \dfrac{\lambda}{\rho c}$, diffusivité thermique du solide.

Méthode numérique

Nous allons, afin de déterminer l'évolution de la température dans la barre pour $t \in [0, t_{\max}]$, approximer la dérivée partielle seconde par rapport à x grâce à la formule :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T(x+\Delta x,t) + T(x-\Delta x,t) - 2T(x,t)}{(\Delta x)^2}.$$

Le pas Δx sera pris égal à $\dfrac{L}{M}$, où M est un entier.

Q.1) Justifier cette expression. À quelle condition sur M la simulation peut-elle s'approcher de la solution exacte du problème ?

Q.2) On discrétise de même l'intervalle de temps étudié : $\Delta t = \dfrac{t_{\max}}{N}$, où N est un entier. On note `T[n,i]` la température au point $x_i = i \cdot \Delta x$, avec $i \in [\![0, M]\!]$, et à l'instant $t_n = n \cdot \Delta t$, avec $n \in [\![0, N]\!]$.

Une ligne de la matrice `Temperature`, dont les coefficients sont les `T[n,i]`, contient les valeurs de température aux points de la barre d'abscisses x_i à un instant fixé ; une colonne de la matrice contient les valeurs de température en un point fixé de la barre aux différents instants t_n.

Montrer qu'on peut calculer `T[n,i]` en fonction de `T[n−1,i−1]`, `T[n−1,i]` et `T[n−1,i+1]` et du *nombre de Fourier* $Fo = a\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$. On parle de schéma *explicite* en temps.

Q.3) On montre que le schéma est stable si $Fo \leq \dfrac{1}{2}$. Donner à l'aide d'une analyse dimensionnelle une durée caractéristique de la diffusion thermique sur une longueur Δx et justifier la condition de stabilité.

Q.4) On cherche maintenant à calculer sous Python la matrice des `T[n,i]` et à afficher le profil de température dans la barre à différents instants. On introduit les valeurs numériques suivantes :

```
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np

a = 1E-5 # Diffusivité
L = 0.1 # Longueur de la barre
Ti = 20 # Température initiale dans la barre
TL = 0. # Température de l'extrémité droite
T0 = 100. # Température de l'extrémité gauche
M = 200 # Nombre d'intervalles d'abscisses
```

Créer à l'aide de `np.linspace` la matrice `x` des $M+1$ abscisses ainsi que le pas spatial Δx noté dx et un pas temporel `dt_stab` assurant la stabilité du schéma. On prendra pour cela une marge en multipliant par `beta = 0.999` la valeur maximale de Δt. Calculer la valeur correspondante du nombre de Fourier Fo ainsi que le nombre N d'intervalles temporels.

Q.5) Créer la matrice des températures `Temperatures` de $N+1$ lignes et $M+1$ colonnes, respectant la condition initiale et les conditions aux limites.
La remplir pour obtenir la solution approchée à tous les instants t_n, puis tracer sur le même graphe les courbes donnant le profil de température à une dizaine d'instants différents.

Q.6) Commenter la forme que prend le profil de température pour `tmax` assez grand.

Q.7) Prendre `beta = 1.0003` puis des valeurs plus grandes et commenter le résultat obtenu.
Revenir à `beta = 0.999` et diminuer la valeur de M. Commenter.