

## POURQUOI DONNER DES INCERTITUDES ?

**La métrologie** (science de la mesure) rassemble les connaissances permettant de donner un sens à la mesure. Elle permet :

- >>> La caractérisation quantitative des propriétés d'un objet
- >>> La comparaison d'une même propriété pour deux objets
- >>> La validation ou non d'un modèle théorique

Tout cela passe par l'attribution d'une valeur numérique aux grandeurs intervenant : **on mesure une grandeur  $X$**

MAIS... La **dispersion** des résultats est inévitable

⇒ le résultat d'une mesure ne se résume pas à une seule valeur mais à un **ensemble de valeurs** numériques traduisant la **variabilité** de la mesure



Cette pièce va-t-elle s'emboîter dans un mécanisme ?

**Sans évaluation des incertitudes, pas de prise de décision possible !**



Ce cycliste s'est-il dopé ?



La théorie est-elle vérifiée ?

## INCERTITUDE-TYPE

On réduit (perte d'information...) le résultat de la mesure à :

>>> **valeur mesurée  $x$**

>>> **incertitude-type**, notée  $u(X)$ , qui est une évaluation de l'écart

type  $\sigma$  de la distribution, défini ainsi :  $\sigma = \sqrt{(x - \bar{x})^2}$

$\sigma$  est l'analogie de la valeur efficace d'un signal alternatif, d'autant plus grande que le signal s'écarte de 0

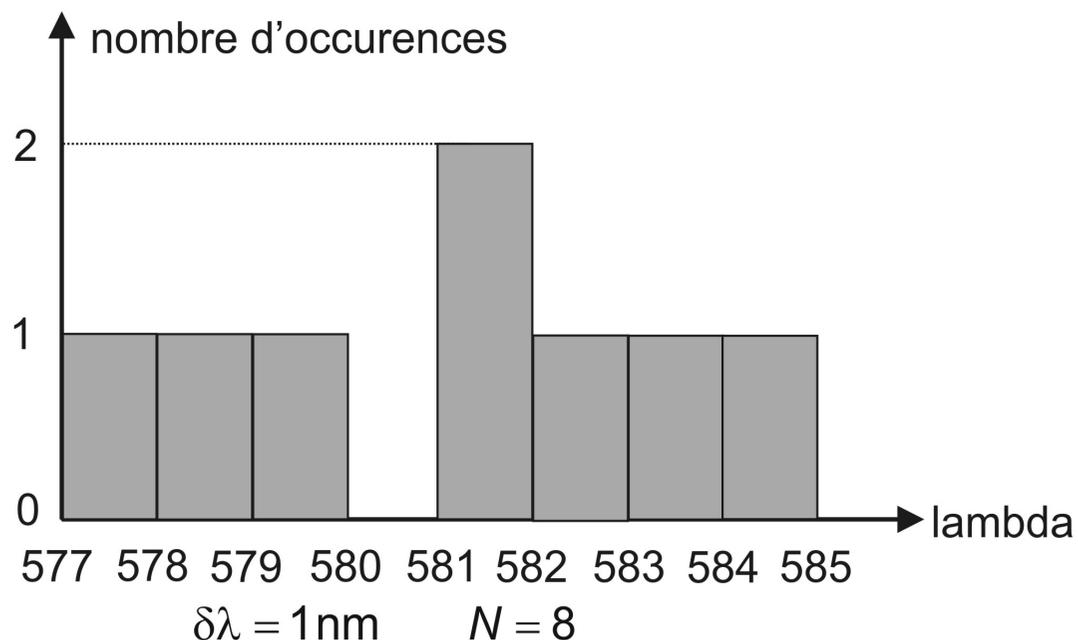
**incertitude élargie et intervalle de confiance ne sont pas au programme**

## DENSITÉ DE PROBABILITÉ

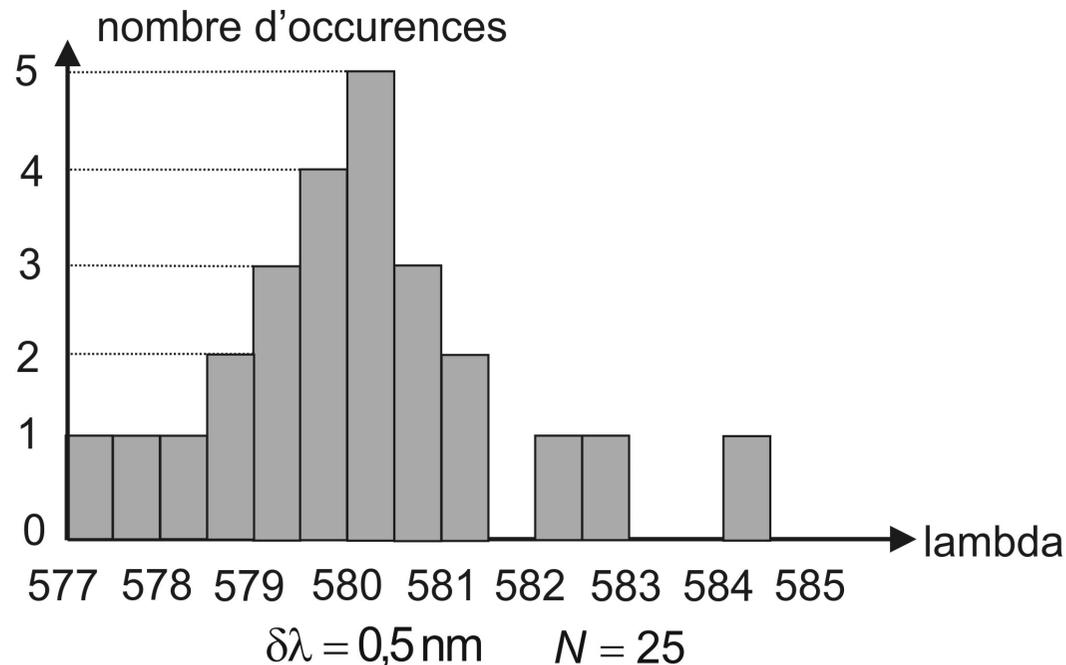
$N = 8$  groupes de TP mesurent une longueur d'onde :

n° groupe de TP	1	2	3	4	5	6	7	8
lambda (nm)	581,1	583,1	577,6	581,6	579,2	584,7	582,8	578,9

**Histogramme** : on reporte le nombre de mesures donnant un résultat compris entre  $x_i$  et  $x_i + \delta x$



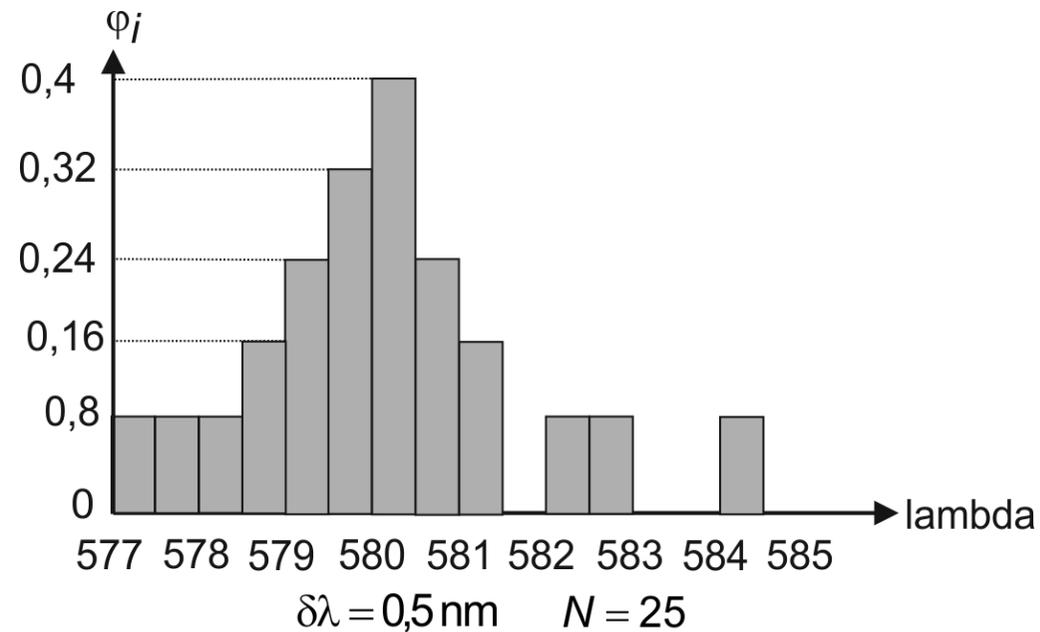
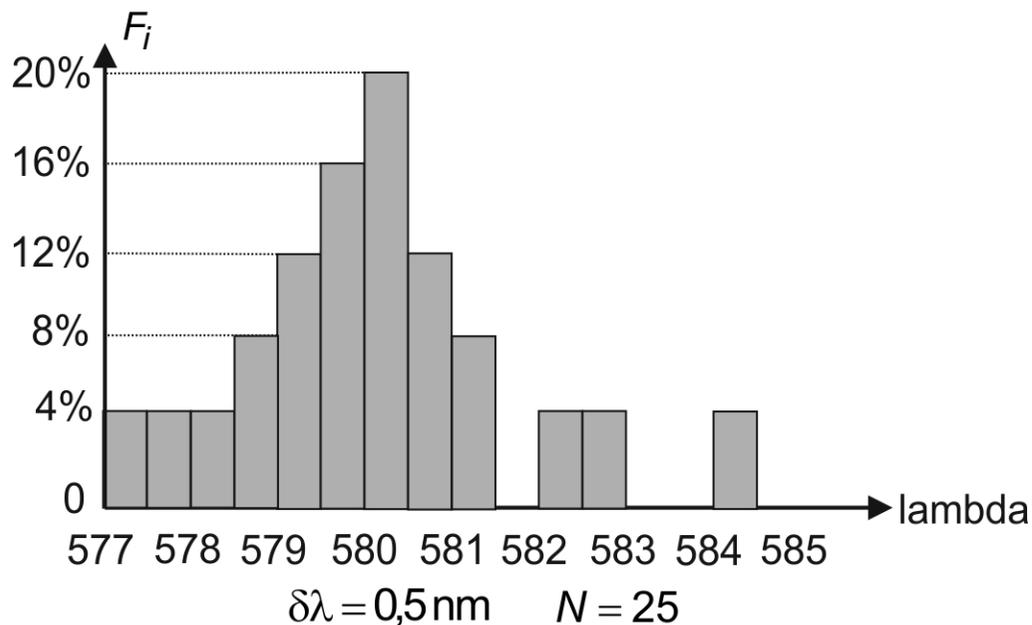
Recommençons avec 25 groupes et des intervalles plus fins :



Fréquence d'apparition de la valeur  $x_i$  (à  $\delta x$  près) :

$$F_i = \frac{n_i}{N} = \text{nombre de mesures dans } [x_i, x_i + \delta x]$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N F_i = 1 \quad \text{et} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N n_i x_i}{N} = \sum_{i=1}^N F_i x_i \quad (\text{valeur moyenne})$$



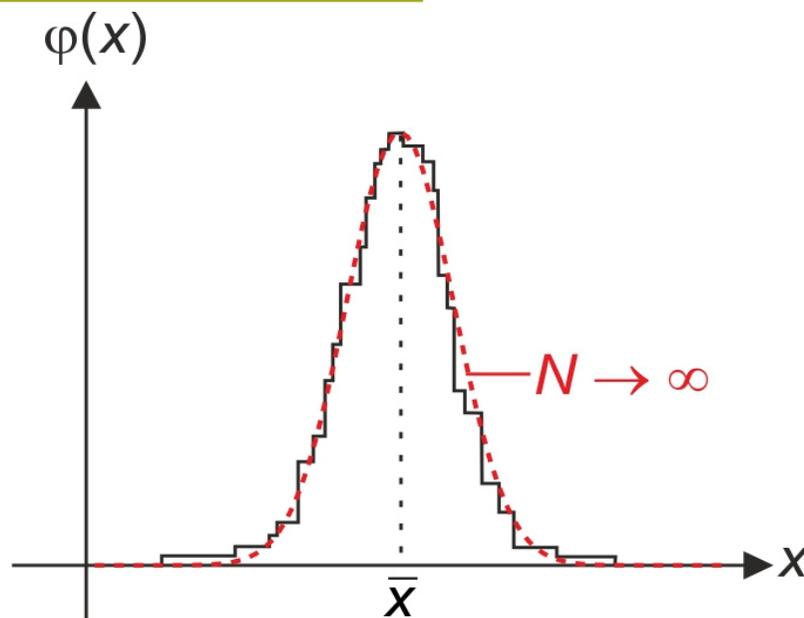
Si  $\varphi_j = \frac{F_j}{\delta x}$ , la fréquence d'apparition de  $x_j$  est donc  $F_j = \varphi_j \cdot \delta x$ , soit *l'aire* du rectangle associé

$F_j$  est la probabilité d'obtenir  $x_j$  à  $\delta x$  près dans le cas d'un très grand nombre de mesures

Distribution limite :

$$\delta x \rightarrow 0$$

$$N \rightarrow \infty$$



L'aire sous la courbe correspondant à un rectangle de largeur infinitésimale  $dx$  et de hauteur  $\varphi(x)$  donne la probabilité que le résultat de la mesure soit compris entre  $x$  et  $x + dx$

**Densité de probabilité  $\varphi(x)$  :**

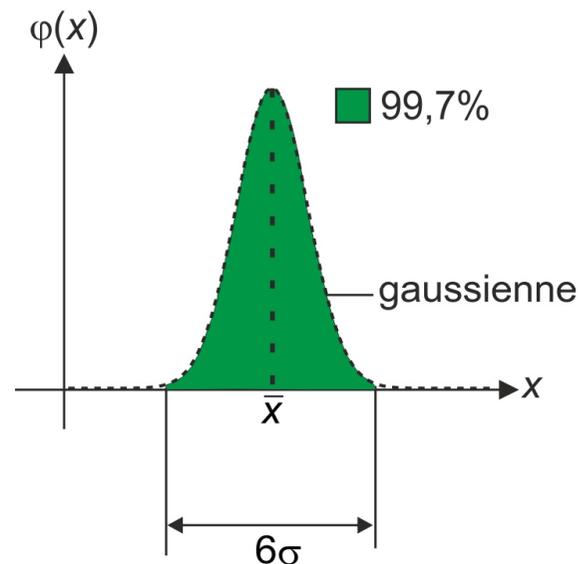
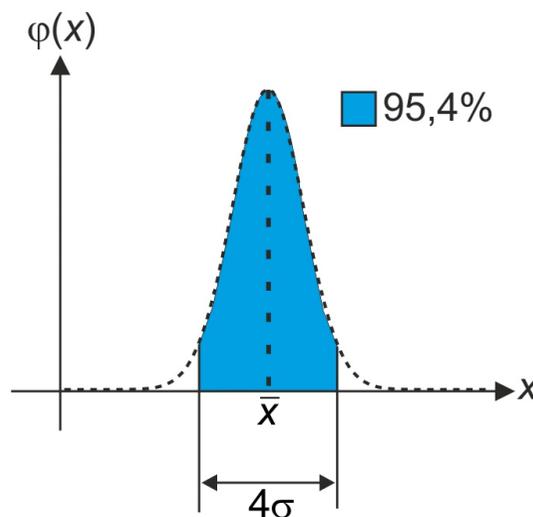
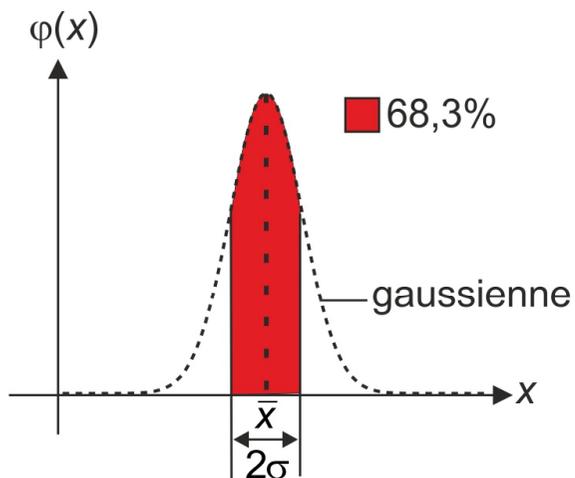
$dP = \varphi(x)dx$  est la probabilité que le résultat de la mesure de la grandeur  $X$  se trouve dans l'intervalle  $[x, x + dx]$

$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x)dx$  valeur moyenne: c'est le « résultat » de la mesure

$\sigma = \sqrt{\overline{(x - \bar{x})^2}}$  est l'écart-type

## Loi normale (gaussienne)

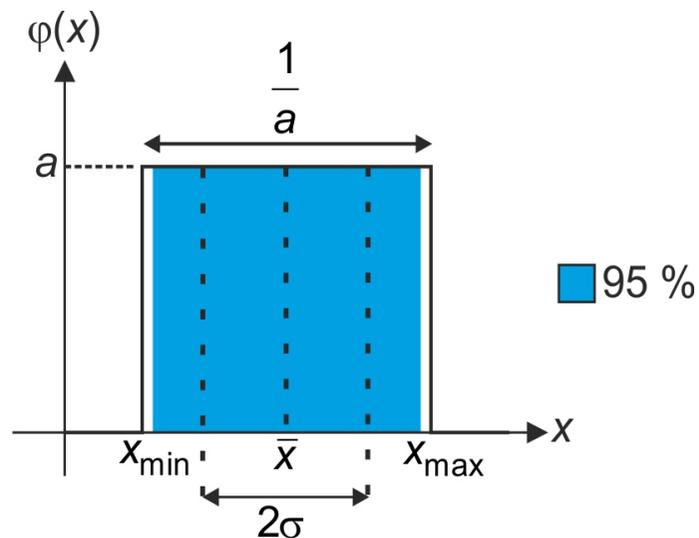
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$



On a une probabilité de **95%** que le résultat de la mesure soit compris dans l'intervalle  $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$

**Théorème central limite** : si l'incertitude sur  $X$  est la somme de  $M$  contributions aléatoires indépendantes de même densité de probabilité, la densité de probabilité de  $X$  se rapproche de la loi normale lorsque  $M$  augmente

## Loi uniforme (rectangulaire)

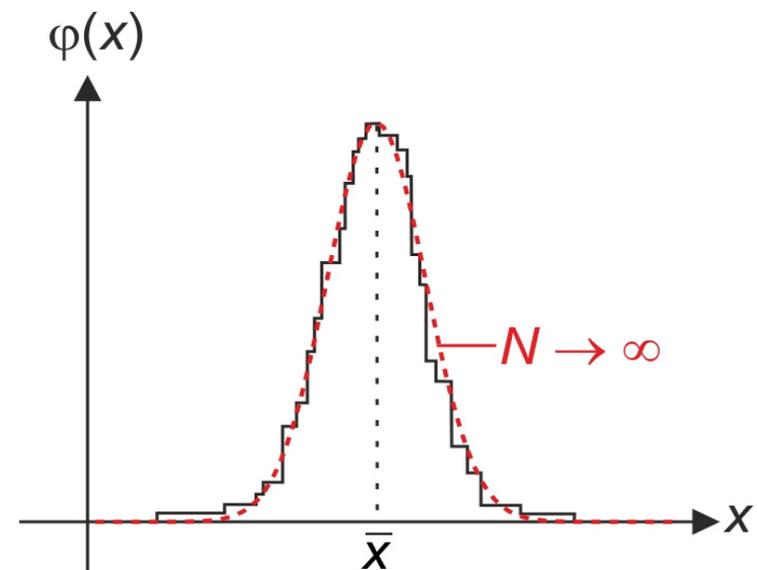


Si  $\Delta$  est la demi-largeur de l'intervalle  $[x_{\min}, x_{\max}]$  :  $x_{\max} - x_{\min} = 2\Delta$

Calcul :  $\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$

## ÉVALUATION DES INCERTITUDES DE TYPE A

Le nombre de mesures  $N$  est fini  $\Rightarrow \bar{x}$  reste inconnue : différentes séries de mesures portant sur la même grandeur  $X$  vont donner des valeurs moyennes  $x^*$  différentes (réparties autour de  $\bar{x}$ ) et des écarts-type différents répartis autour de  $\sigma$



Propagation des incertitudes : 
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma^2} = \frac{\sigma\sqrt{N}}{N} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

**L'écart-type  $\sigma_{\bar{x}}$  sur la moyenne est lié à l'écart-type  $\sigma$  de la distribution**

**par la formule  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$**

On retrouve ainsi que  $\sigma_{\bar{x}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$  : on n'aurait aucune incertitude sur la valeur recherchée  $\bar{x}$  avec un nombre infini de mesures...

L'incertitude décroît donc « lentement » en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$

En pratique : « petit » nombre de mesures (de l'ordre de la dizaine)

Dans le cas où l'on a réalisé  $N$  mesures de la même grandeur donnant des résultats  $x_i$ ,  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on montre que les meilleurs estimateurs de  $\bar{x}$  et de  $\sigma$  sont respectivement :

$$x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \sigma^* = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - x^*)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left[ \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right]}$$

écart-type *expérimental de la distribution* (nécessite au moins deux mesures, infini si  $N = 1$ )

$x^*$  et  $\sigma^*$  s'identifient bien à  $\bar{x}$  et  $\sigma$  quand  $N \rightarrow \infty$

Le résultat de la mesure est  $x^*$  qui estime  $\bar{x}$

L'incertitude-type sur la mesure (sur la moyenne) est  $u(\bar{x}) = \frac{\sigma^*}{\sqrt{N}}$

**Exemple** : Le dosage en ions  $\text{Fe}^{2+}$  d'une même solution est réalisé simultanément par 9 groupes d'élèves, avec les résultats suivants (en  $10^{-2} \cdot \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ) pour  $c = [\text{Fe}^{2+}]$

groupe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
résultat	1,024	1,028	0,975	1,031	0,854	1,100	0,921	0,945	0,821

$$c^* = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 c_i = 0,9666 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{8} \left[ \sum_{i=1}^9 c_i^2 - \frac{1}{9} \left( \sum_{i=1}^9 c_i \right)^2 \right]} = 0,0905 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$u(c^*) = \frac{\sigma^*}{\sqrt{9}} = 0,0302 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Le résultat de la mesure est :  $c = 0,967 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$u(c) = 0,030 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

## Moyenne et incertitude-type expérimentaux d'une liste de mesures



```
import numpy as np

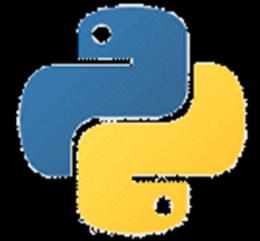
def calcul_mu_sigma(L): # renvoie la moyenne et l'écart-type
    sur la moyenne d'un tableau 1D de valeurs ou d'une liste

    N = len(L)
    somme = 0
    for mes in L:
        somme += mes

    mu = somme/N # moyenne
    somme_sigma_exp = 0
    for mes in L:
        somme_sigma_exp += (mes-mu)**2
    sigma_exp = (somme_sigma_exp/(N-1))**0.5 # écart-type de la
distribution
    sigma_moy = sigma_exp/(N)**0.5 # écart-type de la moyenne
    return (mu,sigma_moy)

>>> conc = np.array([1.024,1.028,0.975,1.031,
0.854,1.100,0.921,0.945,0.821])*1E-2
>>> calcul_mu_sigma(conc)
(0.009665555555555557, 0.0003016211342760572)
```

## Avec les fonctions Python :



```
>>> np.mean(conc)
# valeur moyenne d'un tableau ou d'une liste de N valeurs

0.0096655555555555574
```

```
>>> np.std(conc, ddof = 1)
# écart-type du tableau de valeurs
# ddof : « delta degrees of freedom », indique qu'il faut
diviser par N-ddof et pas N... »

0.00090486340282817154
```

```
>>> np.std(conc, ddof = 1) / (len(conc))**0.5
# écart-type sur la mesure de concentration (sur la
moyenne)

0.0003016211342760572
```

## ÉVALUATION DES INCERTITUDES DE TYPE B

Si on n'effectue *qu'une seule mesure* de  $X$  qui fournit la valeur numérique  $x$ , on s'appuie sur toutes les informations disponibles, et sur le bon sens... pour déterminer l'incertitude-type  $u(X)$  de la mesure

(1) Le constructeur d'un appareil de mesure (multimètre, pipette, etc.) fournit une *incertitude-type* (sans préciser selon quel type de distribution sont réparties les mesures). *On considère alors que la distribution est gaussienne*

(2) Le plus fréquent : le constructeur fournit une incertitude « constructeur »  $\Delta_{\text{constr}}$  sans autre information (souvent notée  $\pm\Delta_{\text{constr}}$ ). Le résultat de la mesure est  $x$ .

On suppose alors que la distribution est *rectangulaire uniforme* :

équiprobabilité de trouver la valeur de  $X$  dans  $[x - \Delta_{\text{constr}}, x + \Delta_{\text{constr}}]$ , et une probabilité nulle hors de cet intervalle

On en déduit alors que l'incertitude-type vaut :  $u(X) = \frac{\Delta_{\text{constr}}}{\sqrt{3}}$

(3) Si on ne peut qu'encadrer les valeurs possibles de la mesure :

$$X \in [X_{\min}, X_{\max}]$$

Comme précédemment, on suppose la densité de probabilité rectangulaire

$$\Rightarrow \begin{cases} X^* = \frac{X_{\max} + X_{\min}}{2} \text{ est la valeur mesurée} \\ u(X) = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2\sqrt{3}} \text{ est l'incertitude-type de la mesure} \end{cases}$$

Par exemple :

>>> Une plage de positions d'une lentille sur un banc optique telle que l'image d'un objet sur un écran à une distance fixe de l'objet soit vue nette

>>> Une graduation pour la valeur lue sur une règle

>>> L'épaisseur de la trace sur un écran d'oscilloscope analogique

**Exemple 1** : On lit sur un conducteur ohmique la couleur des bagues : marron (1), noir (0), rouge (2), or (5%)

$$R = (10 \times 1 + 0) \cdot 10^2 \Omega = 1 \text{ k}\Omega \quad u(R) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{5}{100} \times 1000 = 28,9 \Omega$$

**Exemple 2** : Un thermomètre indique  $121,84^\circ \text{ C}$ . Sa *résolution* en température est de  $0,01^\circ \text{ C}$  (les indications en  $^\circ \text{ C}$  se font avec deux chiffres après la virgule)

Pas de  $\Delta_{\text{constr}}$  : on considère que  $T_{\text{min}} = 121,835^\circ \text{ C}$  et  $T_{\text{max}} = 121,845^\circ \text{ C}$ .

$$\Rightarrow u(T) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times 0,01 = 2,89 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ \text{ C}$$

**Exemple 3** : On lit sur un vernier un angle compris entre  $152^\circ 27'$  et  $152^\circ 29'$ .

$$\Rightarrow \theta = 152^\circ 28' \quad u(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58'$$

**Exemple 4** : focométrie: méthode d'autocollimation. L'image est nette pour une

distance entre l'objet et la lentille convergente dans l'intervalle  $[9,8 \text{ cm} ; 11,0 \text{ cm}]$

$$f' = \frac{9,8 + 11,0}{2} = 10,40 \text{ cm} \quad u(f') = \frac{11,0 - 9,8}{2\sqrt{3}} = 0,35 \text{ cm}$$

**Exemple 5** : On mesure avec un multimètre (dont on donne ci-contre un extrait de la notice) une tension efficace  $W$  de **1.54297** V pour une fréquence de 7 kHz sur le calibre 2 V

**d** : un digit, ici **0.00000** !

AC VOLTS (True RMS)

Range	Accuracy(±)			
	45Hz - 5kHz	5kHz - 10kHz	10kHz-20kHz	20kHz-50kHz
200mV	0.2% + 150d	0.2% + 250d	3% + 500d	-
2V	0.2% + 150d	0.2% + 250d	0.5% + 300d	3% + 1500d
20V	0.2% + 150d	0.2% + 250d	0.5% + 300d	2% + 1000d
200V	0.2% + 150d	0.2% + 250d	0.5% + 500d	-
750V	0.2% + 150d	-	-	-

$$\Delta_{\text{constr}} = \frac{0,2}{100} \times 1,54297 + 250 \times 0,00001 = 0,00309 + 0,00250 = 0,00559 \text{ V}$$

$$u(W) = \frac{0,00559}{\sqrt{3}} = 3,23 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

# PROPAGATION DES INCERTITUDES

$X$  n'est pas directement accessible par la mesure mais lié à des mesures *indépendantes* de *deux grandeurs elles-mêmes indépendantes*  $X_1$  et  $X_2$

Valeurs mesurées	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
Incertitudes-type	$u(X_1)$	$u(X_2)$

$$X = f(X_1, X_2)$$

**Méthode analytique** . Si les incertitudes sont *suffisamment petites* :

$$x = f(x_1, x_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + (x_1 - \bar{x}_1) \frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + (x_2 - \bar{x}_2) \frac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$\Rightarrow \bar{x} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \overline{(x_1 - \bar{x}_1)} \frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \overline{(x_2 - \bar{x}_2)} \frac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$\bar{x} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$u^2(X) = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{[x - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)]^2}$$

$$u^2(X) = \overline{(x_1 - \bar{x}_1)^2} \left[ \frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right]^2 + \overline{(x_2 - \bar{x}_2)^2} \left[ \frac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right]^2$$

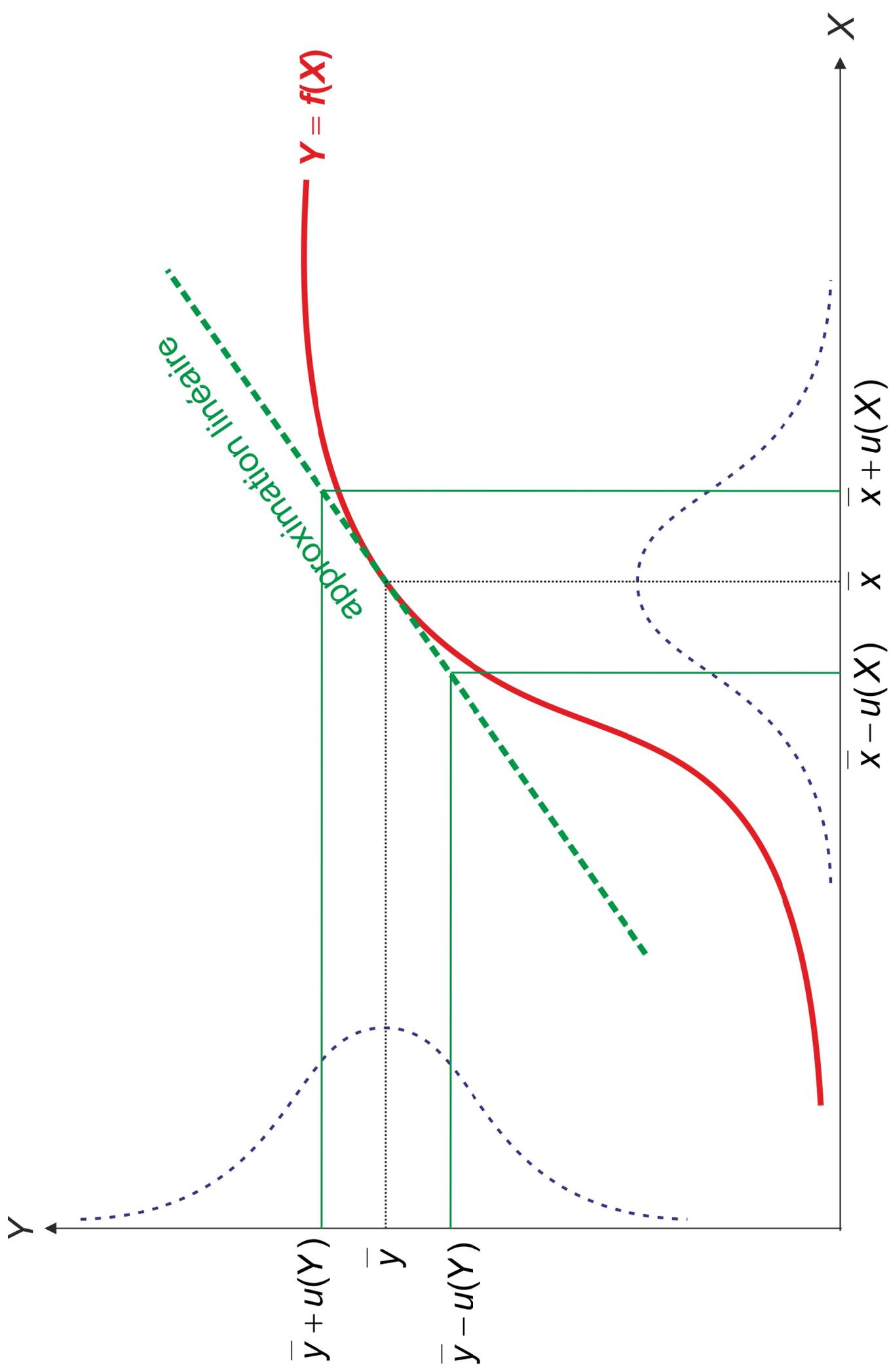
$$+ 2 \underbrace{\overline{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)}}_{0 \text{ (corr\u00e9lation nulle)}} \frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \frac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$\Rightarrow u(X) = \sqrt{\overline{u^2(X_1) \left[ \frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right]^2 + u^2(X_2) \left[ \frac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right]^2}}$$

$$u(X) = \sqrt{\sum_k \left[ \frac{\partial f}{\partial X_k} \right]^2 u^2(X_k)} \quad \text{pour un nombre quelconque de variables}$$

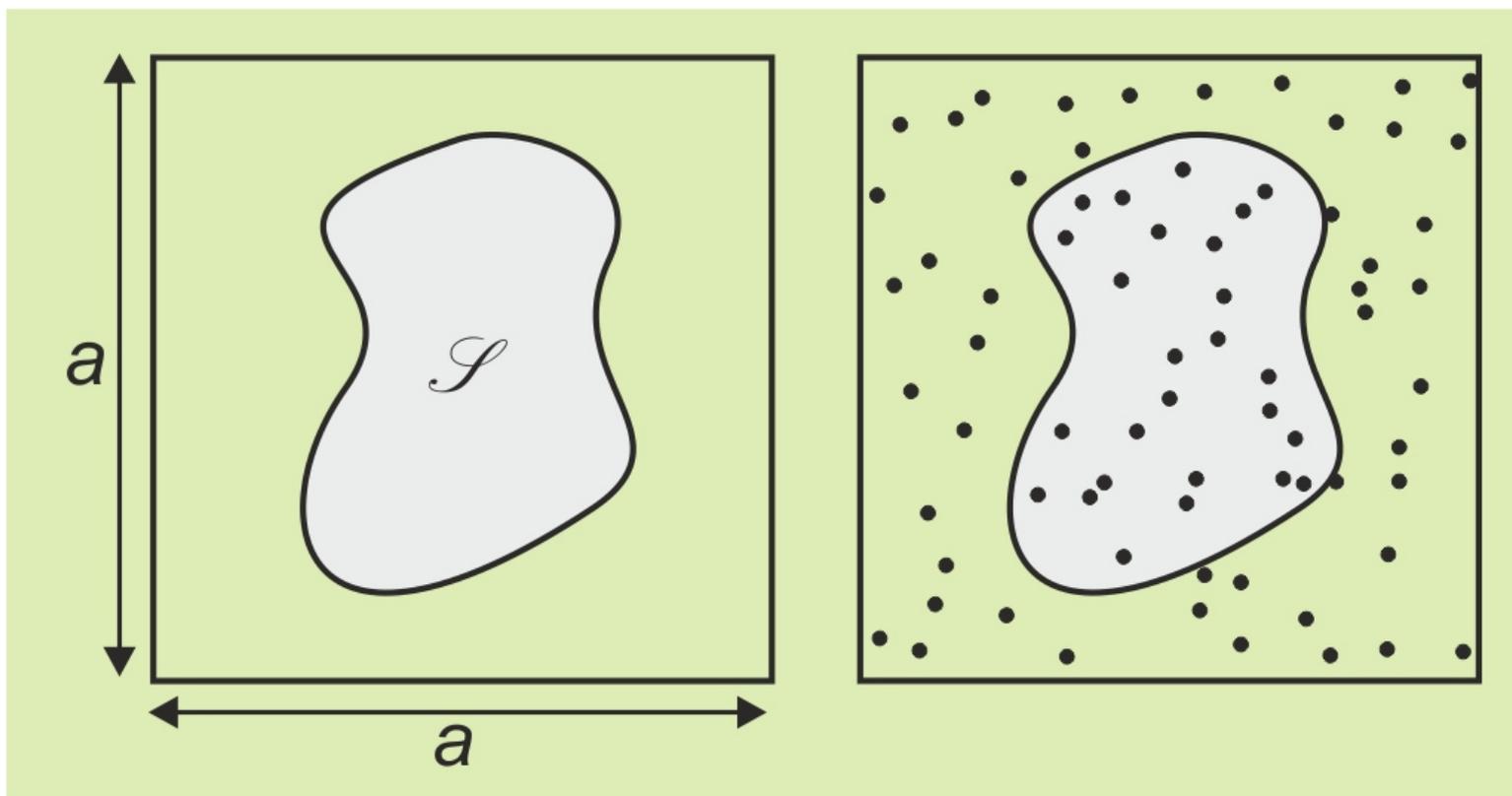
$$X = X_1 \pm X_2 \Rightarrow u(X) = \sqrt{u^2(X_1) + u^2(X_2)}$$

$$X = X_1^\alpha X_2^\beta \Rightarrow \frac{u(X)}{|x|} = \sqrt{\alpha^2 \left( \frac{u(X_1)}{x_1} \right)^2 + \beta^2 \left( \frac{u(X_2)}{x_2} \right)^2}$$



L'approximation linéaire peut ne pas être bien vérifiée si  $u(X)$  est trop grande

## Simulation de Monte-Carlo



$N$  boulets tirés sur la surface  $a^2$  avec une **densité de probabilité uniforme**.

Si  $n$  boulets tombent dans le lac, le rapport  $\frac{n}{N}$  approche d'autant mieux  $\frac{\mathcal{S}}{a^2}$

que  $N$  est grand.

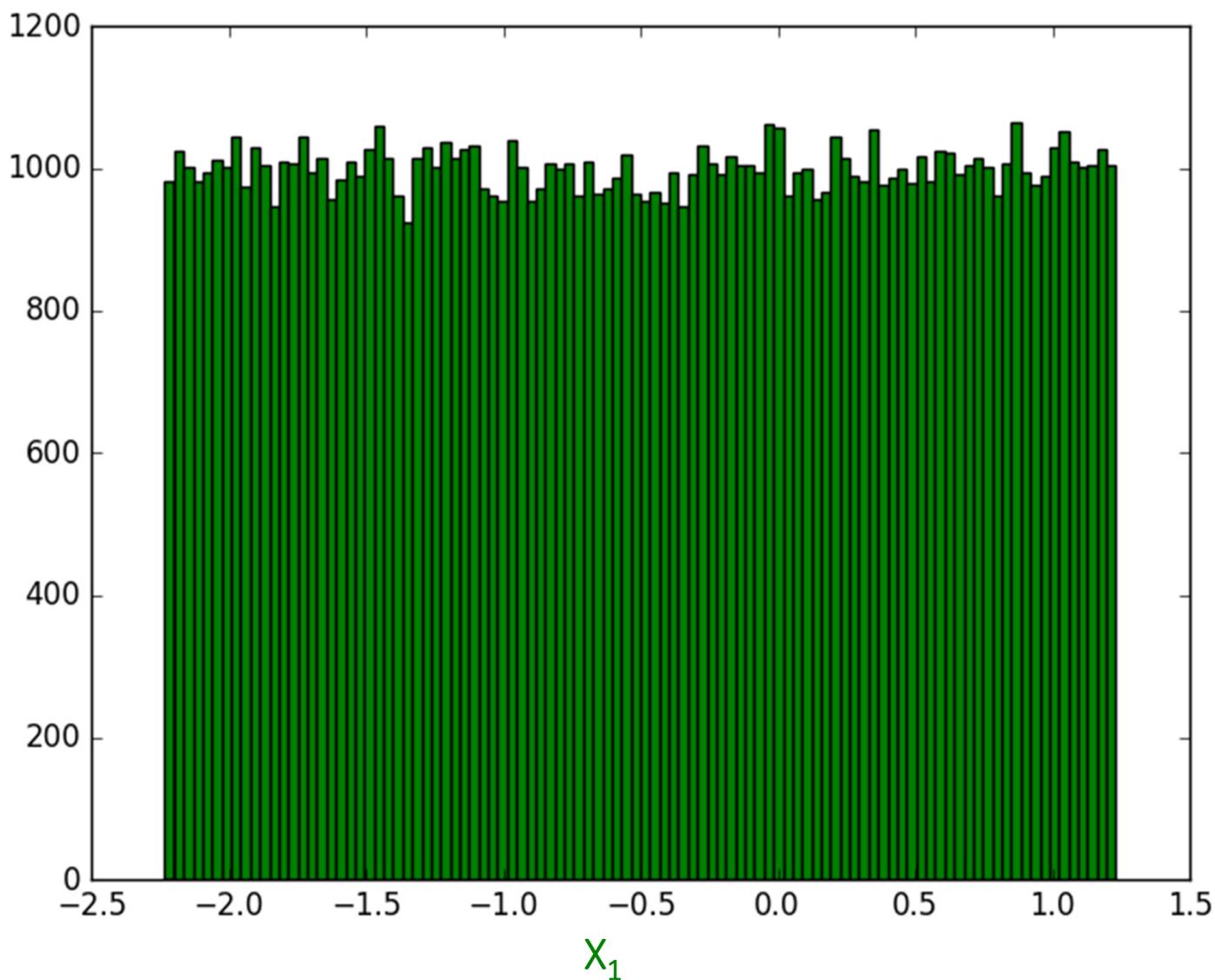
```
import numpy as np #
import numpy.random as rd # bibliothèque random de numpy
from matplotlib import pyplot as plt # graphiques

moy1,sigma1 = -0.5,1
xmin1,xmax1 = moy1-sigma1*3**.5,moy1+sigma1*3**.5 # on calcule
les bornes de l'intervalle (facteur racine de 3 entre le demi-
intervalle et l'écart-type)
N = 100000
X1 = rd.uniform(xmin1,xmax1,N) # tire aléatoirement N nombres
autour de moy avec un écart-type sigma (renvoie un tableau 1D)

plt.hist(X1,100,color='g') # le nombre d'intervalles de
l'histogramme est fixé à 100
plt.show()

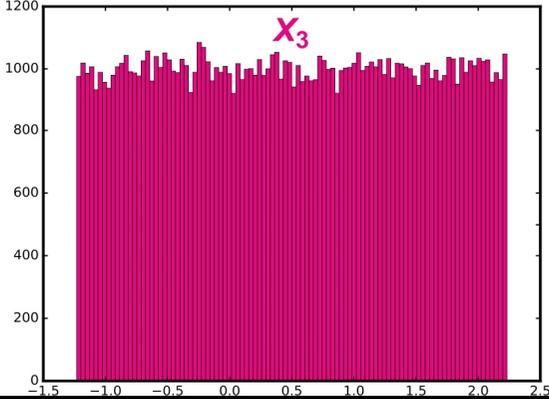
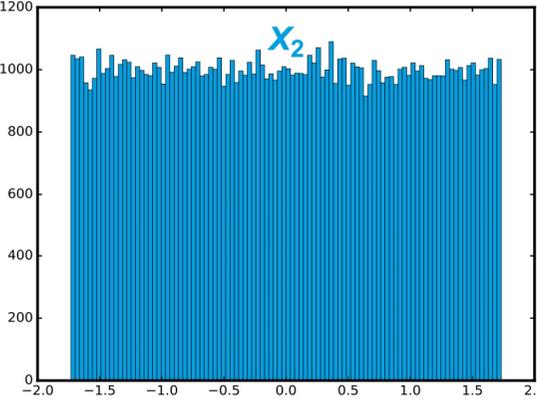
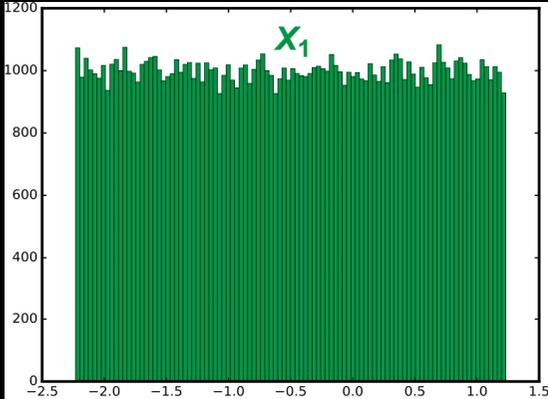
>>> np.mean(X1) # moyenne du tableau de valeurs
-0.498551962647#on vérifie que la valeur moyenne est bien
proche de -0.5
>>> np.std(X1, 0, ddof = 1) # écart-type du tableau de valeurs
0.999595207002 #on vérifie que l'écart-type est bien proche de
1.
```



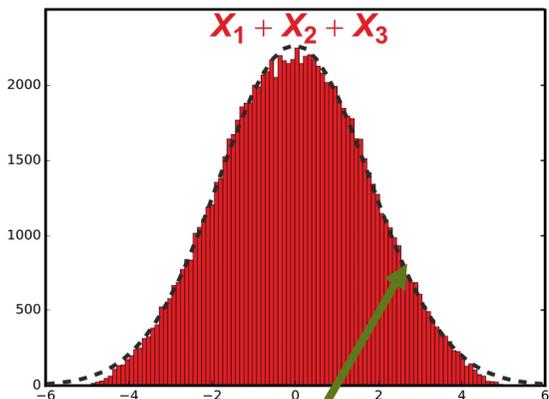
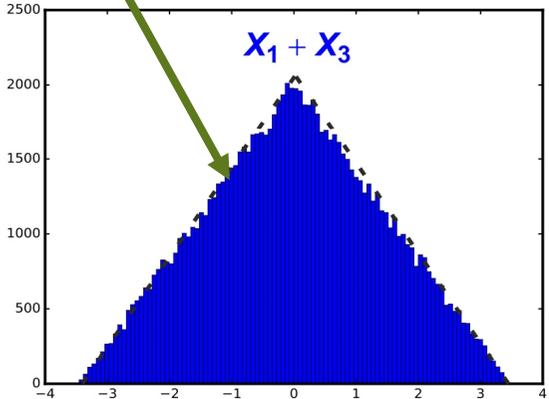


100 000 tirages avec une loi uniforme de valeur moyenne  $-0,5$  et d'écart-type 1

On recommence pour  $X_2$  et  $X_3$  de valeurs moyennes 0 et 0,5 et d'écart-type 1 et on trace les histogrammes de  $X_1 + X_3$  et  $X_1 + X_2 + X_3$

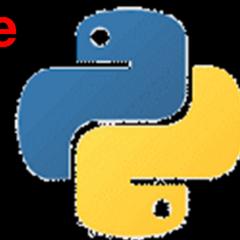


$\approx$  triangle



$\approx$  gaussienne

## Le plus important ! Propagation d'incertitudes avec une simulation de Monte-Carlo



$X = f(X_1, X_2, \dots, X_k, \dots)$  fonction python à écrire

Une distribution de  $X_k$  normale est définie par le tableau numpy

`Xk = ['normal', mu, sigma]`

Une distribution de  $X_k$  uniforme est définie par le tableau numpy :

`Xk = ['rect', mu, sigma]`

On génère  $N = 1\,000\,000$  tirages aléatoires de  $X_k$  obéissant à la distribution choisie, à l'aide de `np.random.normal(Xk[1], Xk[2], N)` pour une loi normale et de `np.random.uniform(xmin, xmax, N)` pour une loi uniforme.

`xmin, xmax`, valeurs extrêmes de la distribution rectangulaire, sont calculés par `xmin, xmax = Xk[1] - Xk[2] * 3** .5, Xk[1] + Xk[2] * 3** .5`

La grande valeur  $N = 10^6$  préconisée pour rendre négligeables les fluctuations entre deux tirages différents peut être réduite par exemple à 10 000 si les calculs sont trop longs.  $N$  est passée en variable globale

Les distributions obtenues (tableaux 1D numpy de type array) sont stockées dans une liste L

On calcule et on renvoie la valeur moyenne et l'écart-type de X. On affiche également son histogramme



```
N = 1000000
```

```
def propagation_monte_carlo(*arg): # arg : les X1,X2,...,Xk,...
    L = []
    for elt in arg:
        if elt[0] == 'normal':
            L.append(rd.normal(elt[1],elt[2],N))
        else:
            xmin,xmax = elt[1]-elt[2]*3**.5,elt[1]+elt[2]*3**.5
            L.append(rd.uniform(xmin,xmax,N))
    X = f(*L) # f est appliquée à tous les éléments de L
    mu = np.mean(X)
    sigma = np.std(X,ddof = 1)
    plt.hist(X,100)
    plt.show()
    return mu,sigma
```

## Exemple : fréquence d'oscillations libres non amorties

Facteur de qualité  $Q = 4,99$       $u(Q) = 0,84$

Pseudo-période  $T = 990 \mu\text{s}$       $u(T) = 120 \mu\text{s}$

### Méthode analytique

$$f_0 = \frac{1}{T \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = 1015,2 \text{ Hz}$$

$$q = 1 - \frac{1}{4Q^2} = 0,9900 \Rightarrow dq = \frac{1}{2Q^3} dQ \Rightarrow u(q) = \frac{u(Q)}{2Q^3} = 3,38 \cdot 10^{-3}$$

$$f_0 = \frac{1}{T \sqrt{q}} \Rightarrow \ln(f_0) = -\ln(T) - \frac{1}{2} \ln(q) \Rightarrow \frac{df_0}{f_0} = -\frac{dT}{T} - \frac{1}{2} \frac{dq}{q}$$

$$\Rightarrow \frac{u(f_0)}{f_0} = \sqrt{\left[\frac{u(T)}{T}\right]^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{u(q)}{q}\right]^2} = 0,121$$

$$u(f_0) = 123 \text{ Hz}$$

## Simulation de Monte-Carlo



```
def f(T,Q):
    return 1/(T*(1-1/4/Q**2)**0.5)
```

```
T = ['rect', 990E-6, 120E-6]
```

```
Q = ['rect', 4.99, 0.84]
```

```
>>> propagation_monte_carlo(T,Q)
(1031.0798687795748, 127.23438033510512)
```



au lieu de 1015,2

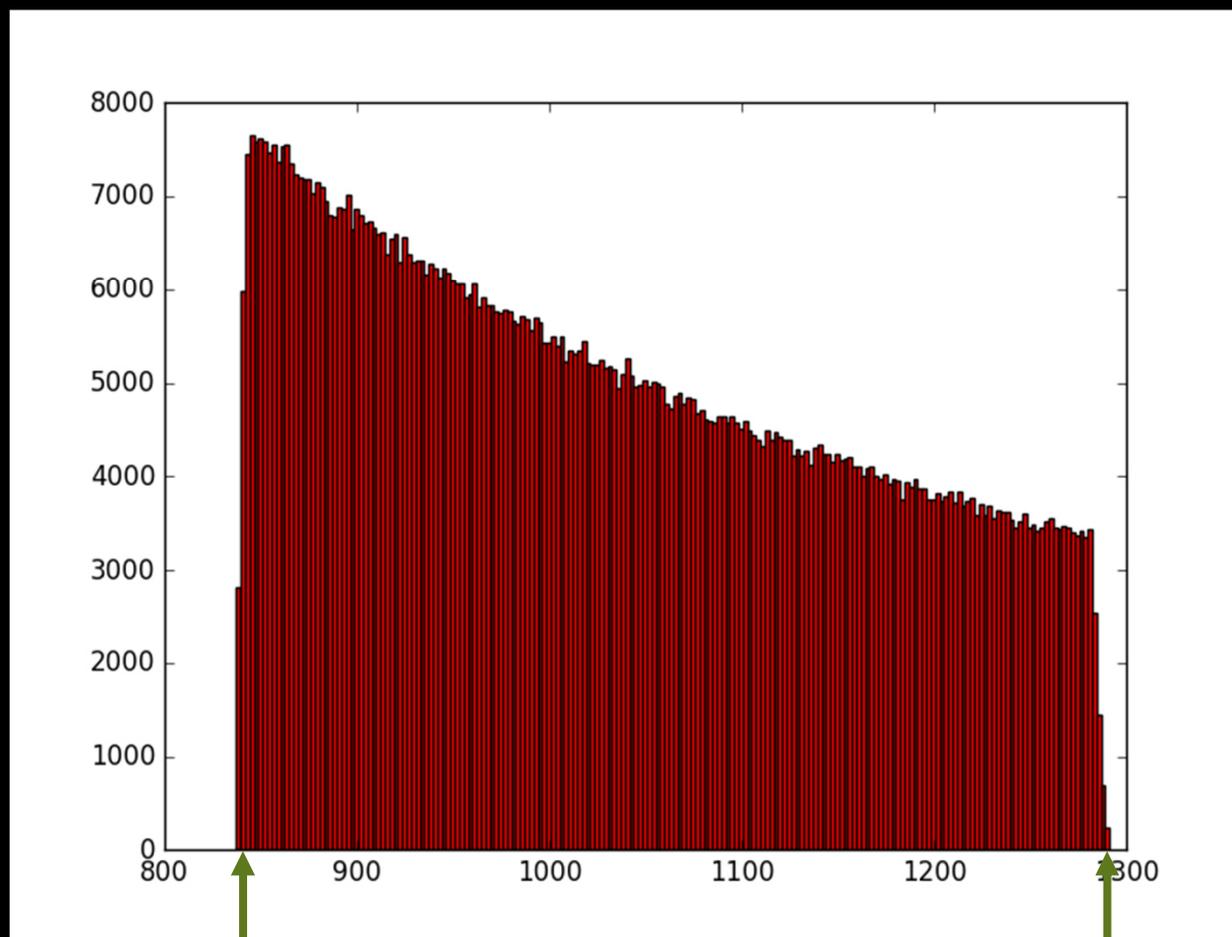
$$f_0 = 1030 \text{ Hz}$$



au lieu de 123

$$u(f_0) = 130 \text{ Hz}$$

**C'est la limite de la méthode analytique quand les incertitudes relatives sont trop grandes et la fonction  $f$  « fortement » non linéaire**



**837 Hz**

**1292 Hz**

distribution non rectangulaire : les bornes ne permettent pas le calcul de la moyenne ni de l'écart-type...

## PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

Pour déterminer le nombre de chiffres significatifs sur  $X = f(X_1, X_2, \dots, X_k, \dots)$  connaissant les incertitudes-type sur  $X_1, X_2, \dots$ , **il n'y a pas à appliquer de règles particulières** : il suffit de calculer l'incertitude-type sur le résultat en utilisant la propagation des incertitudes

Attention ! Lorsque  $Y = f(X)$ , le nombre de chiffres significatifs de  $y$  peut être supérieur à celui de  $x$

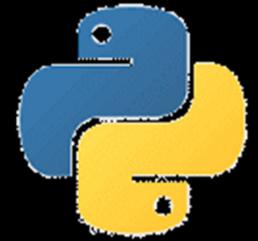
Exemple: angle  $X$  dont la mesure donne  $x = 7,3^\circ$  avec  $u(X) = 1,1^\circ$  (2 chiffres significatifs). Incertitude sur  $Y = \cos(X)$  ?

$$Y = \cos(X) \Rightarrow dY = -\sin(X)dX$$

$$\Rightarrow u(Y) = |\sin(X)| \cdot u(X) = \sin\left(7,3 \times \frac{\pi}{180}\right) \times 1,1 \times \frac{\pi}{180} = 2,4 \cdot 10^{-3}$$

Comme  $\cos(7,3^\circ) = 0,9919$ , on a au moins 3 chiffres significatifs sur  $Y$

## EXERCICE



Utiliser un script Python pour obtenir l'histogramme, la moyenne et l'écart-type de  $Y = \cos(X)$  pour une distribution de  $X$  de moyenne  $7,3^\circ$  et d'écart-type  $1,1^\circ$  :

```
>>> uniforme
```

```
>>> gaussienne
```

Conclure

Les incertitudes sont elles-mêmes entachées d'incertitudes

⇒ un seul chiffre pour l'incertitude-type  $u(X)$  ?

**Non !** Cela pose un problème d'arrondi qui va se propager lors des calculs utilisant  $u(X)$

Exemple :

$x_1 = 2,50$	$x_2 = 2,68$
$u(x_1) = 0,11$	$u(x_2) = 0,13$

$$X = X_2 - X_1 \quad u(X) = \sqrt{u^2(X_1) + u^2(X_2)} = \sqrt{0,11^2 + 0,13^2} \approx 0,17$$

En arrondissant à un seul chiffre :  $x = 0,2$      $u(X) = 0,2$

Si l'on ne gardait d'emblée qu'un seul chiffre :  $x_1 = 2,5$                        $x_2 = 2,7$   
 $u(x_1) = 0,1$      $u(x_2) = 0,1$

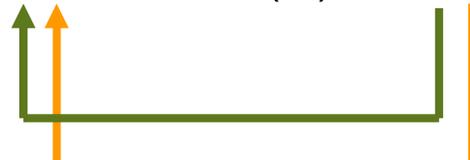
⇒  $u(X) = \sqrt{0,1^2 + 0,1^2} \approx 0,14$      $x = 0,2$      $u(X) = 0,1$

L'incertitude est divisée par 2 du fait de la troncature !

## On conservera *deux chiffres* pour l'incertitude-type $u(X)$

Les chiffres significatifs ne sont pas des chiffres dont on est sûr, mais des chiffres qui apportent des informations sur la mesure dont le résultat peut alors être réutilisé, comparé avec d'autres...

Exemple de présentation de résultats :

$$f' = 10,40 \text{ cm} \quad u(f') = 0,35 \text{ cm}$$
A diagram consisting of two horizontal lines. The top line is green and starts at the end of the first term '10,40 cm' and ends at the end of the second term '0,35 cm'. The bottom line is orange and starts at the end of the second term '0,35 cm' and ends at the end of the second term '0,35 cm'. Both lines have vertical segments at their ends that point upwards towards the terms they represent.

# ÉCARTS NORMALISÉS (Z-SCORE) / PRISE DE DÉCISION

Comparaison entre une valeur mesurée et une valeur de référence

$$Z = \frac{X - X_{\text{réf}}}{u(X)} \quad : \text{Z-score}$$

Le Z-score est aussi appelé écart-normalisé car :

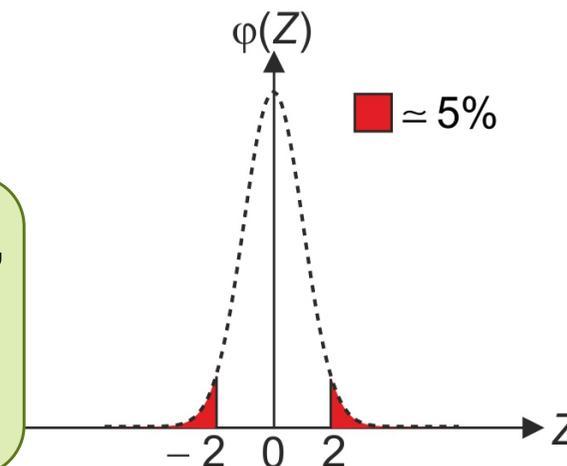
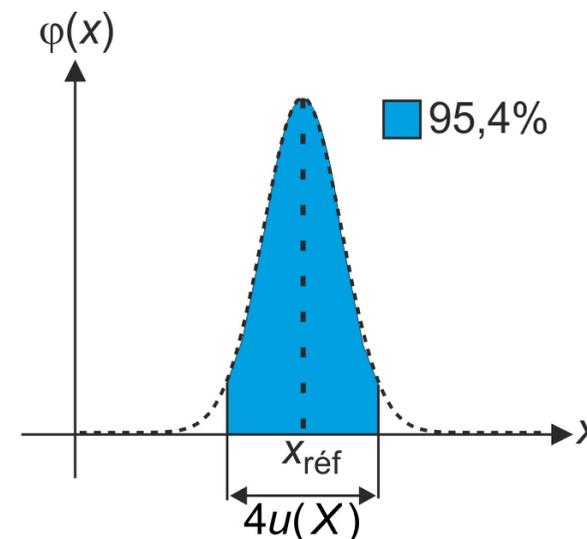
— Sa valeur moyenne est  $\bar{Z} = \frac{\bar{X} - X_{\text{réf}}}{u(X)} = 0$

— Son écart-type est  $u(Z) = \frac{u(X - X_{\text{réf}})}{u(X)} = \frac{u(X)}{u(X)} = 1$

Si Z suit une loi normale, la probabilité d'avoir  $|Z| > 2$  vaut 5%.

En prenant un critère à 5%, c'est-à-dire si  $|Z| = \left| \frac{X - X_{\text{réf}}}{u(X)} \right| > 2$ ,

on rejette l'hypothèse que la mesure est compatible avec la valeur théorique



On doit définitivement abandonner la « gourance » : calcul de  $\left| \frac{X^* - X_{\text{réf}}}{X_{\text{réf}}} \right|$ ,  
 qui consiste à donner en % de la valeur théorique l'écart entre valeur mesurée et  
 valeur théorique.

**Aucun critère de décision ne peut être établi à partir de cette grandeur**

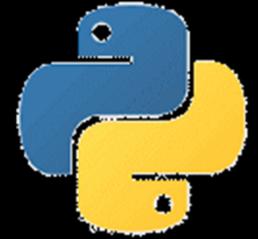
L'hypothèse d'une loi normale peut ne pas être vérifiée, néanmoins on montre  
 dans tous les cas (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) que la probabilité  
 d'obtenir un  $|Z|$  supérieur à quelques incertitudes-type est très faible

### Comparaison de deux mesures

On pose  $Z = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{u^2(X_1) + u^2(X_2)}}$  et on compare  $|Z|$  à 2 afin de décider si les

deux mesures sont compatibles ou non

## EXERCICE



### Résolution d'un instrument et incertitudes

Une grandeur  $X$  est mesurée par un instrument. La distribution est gaussienne, de valeur moyenne  $x = 20,1$  et d'écart-type  $\sigma = 1,0$ .

Cependant, l'affichage ne produit que des valeurs entières arrondies de la grandeur mesurée.

**L'incertitude-type des mesures fournies par l'instrument peut-elle être inférieure à la résolution (ici égale à 1) ?**

Sous Python, on prend l'arrondi de  $g$  avec `np.round(g)`

# INCERTITUDES MIXTES

## Distance focale d'une lentille convergente

On fait varier la position  $p$  de l'objet par rapport à la lentille (incertitude négligée) et on déplace l'écran afin d'obtenir l'image la plus nette possible.

On repère l'image par rapport à la lentille à l'aide de la distance  $p'$ .

Les mesures obtenues :

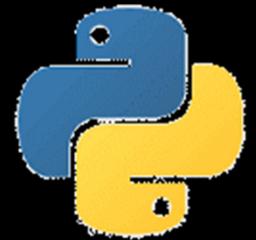
$p$ (cm)	-23,5	-24	-25	-27	-30	-34	-40	-45	-55
$p'$ (cm)	139,5	122,5	104,6	77,3	60,7	48,7	40,1	36,2	31,5
$\Delta p'$ (cm)	3	2	1	0,5	0,5	0,3	0,2	0,2	0,2

On dispose donc de 9 valeurs de la distance focale :  $f' = \frac{pp'}{p - p'}$

Avec pour chaque valeur une incertitude-type :  $u(f') = \left(\frac{f'}{p'}\right)^2 u(p') = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{f'}{p'}\right)^2 \Delta p'$

Quelle valeur de  $f'$  présenter et avec quelle incertitude-type ?

**(1) On évalue la dispersion des mesures grâce à distribution des valeurs de  $f'$  (sans prendre en compte les incertitudes-type sur chaque mesure (de type B))**



```

P = np.array([-23.5, -24, -25, -27, -30, -34, -40, -45, -55])*1E-2
Pp =
np.array([139.5, 122.5, 104.6, 77.3, 60.7, 48.7, 40.1, 36.2, 31.5])*1E-2
sigma_Pp = np.array([3, 2, 1, 0.5, 0.5, 0.3, 0.2, 0.2, 0.2])*1E-2/3**.5

def fp(p, pp): # calcul de la distance focale
    return p*pp/(p-pp)

def sigma_fp(fp, pp, sigma_pp): # calcul de l'incertitude sur la
    distance focale
    return (fp/pp)**2*sigma_pp

Fp = fp(P, Pp) # tableau des distances focales
sigma_Fp = sigma_fp(Fp, Pp, sigma_Pp) # tableau des incertitudes
(pas utilisé dans cette méthode)

>>> calcul_mu_sigma(Fp) # fonction créée précédemment

(0.20064736446152062, 0.00017781409869729436)

```



(2) On prend la moyenne arithmétique des mesures et de leurs incertitudes-type :

$$f' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f'_i \quad u(f') = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N u^2(f'_i)}}{N} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{w_i}}}{N}$$

avec  $w_i = \frac{1}{u^2(f'_i)}$  inverse de la variance

On trouve :

(0.20064736446152062, 0.00010664878963662461)



Au lieu de **0,00017** : on a affiné l'incertitude-type sur le focale...

**(3) Hors-programme mais le plus rigoureux. On pondère par les inverses des variances, donnant plus de poids aux valeurs de focales les moins entachées d'incertitudes**



$$f' = \frac{\sum_{i=1}^N w_i f'_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad u(f') = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N w_i}}$$

avec  $w_i = \frac{1}{u^2(f'_i)}$  inverse de la variance

On trouve :

**(0.20067836305879627, 9.4151482137413259e-05)**



Au lieu de **0,00010** : on a encore affiné l'incertitude-type sur la focale...

# AJUSTEMENT LINÉAIRE OU AFFINE

## Ajustement affine (« régression linéaire ») / Méthode des moindres carrés

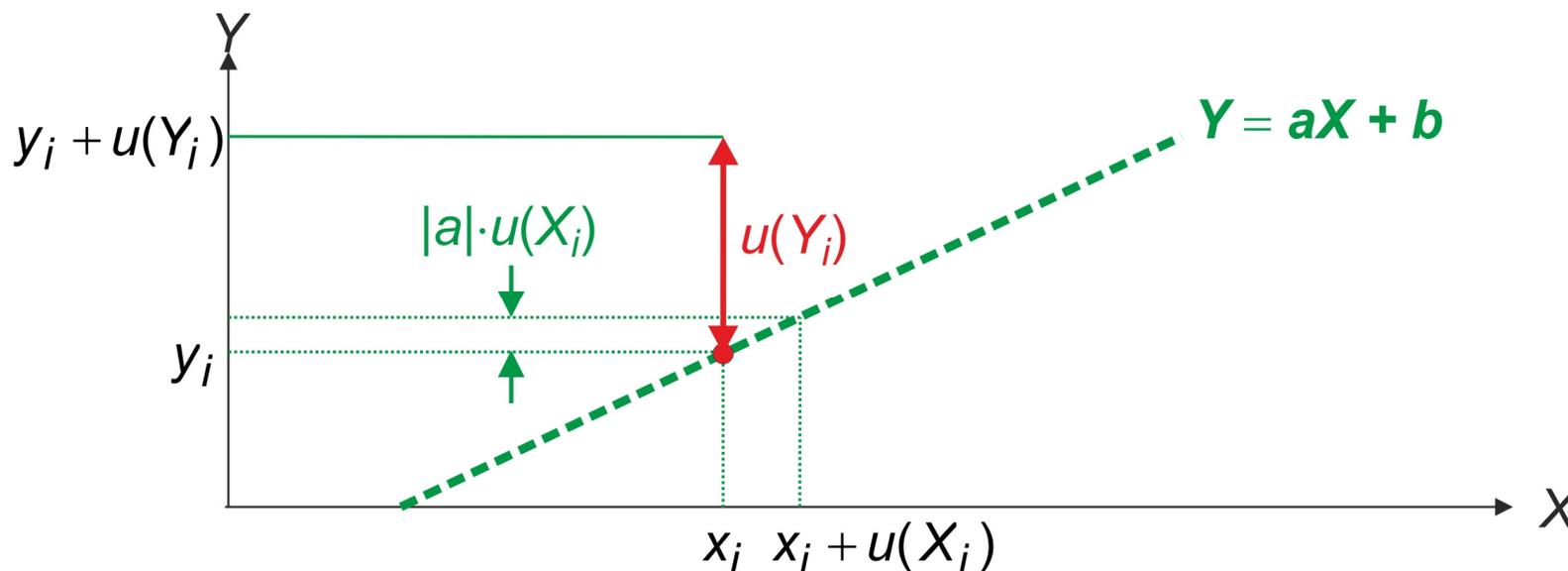
La relation théorique  $Y = f(X) = aX + b$  est-elle bien vérifiée ?

Quelles sont alors les valeurs expérimentales de  $a$  et  $b$  ? Les incertitudes sur ces coefficients ?

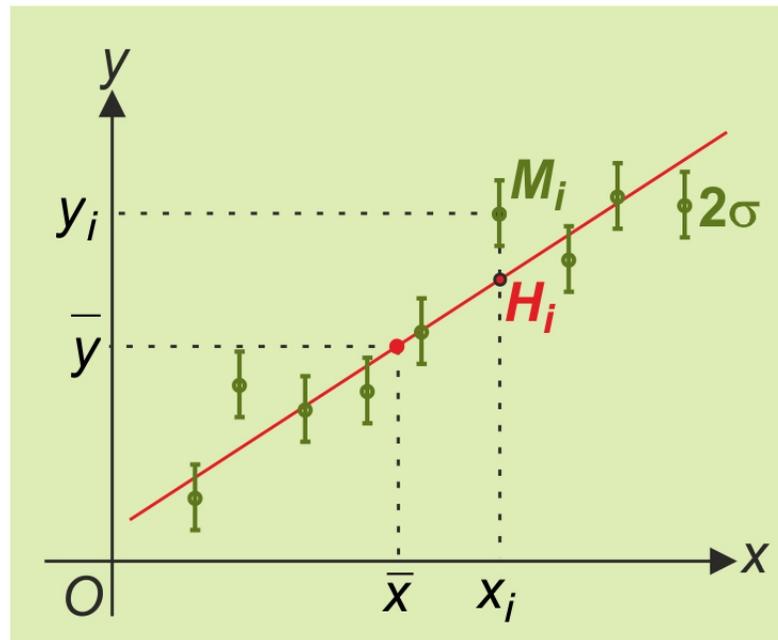
On mesure  $(x_i, y_i) \ i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  avec  $(u(X_i), u(Y_i)) \ i \in \llbracket 1, N \rrbracket$

Les hypothèses de la régression linéaire ordinaire sont :

— l'incertitude-type sur  $X$  est négligeable, soit  $|a| \cdot u(X_i) \ll u(Y_i)$



— les incertitudes-type  $u(Y_1) = u(Y_2) = \dots = u(Y_N) = \sigma$  sont toutes identiques et  $Y_i$  suit une loi normale



On représente alors les « bâtonnets » d'incertitude de taille  $2\sigma$  autour des points  $M_i(x_i, y_i)$   $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$

Si  $H_i$  est le projeté selon  $Oy$  de  $M_i$  sur une droite quelconque d'équation  $Y = aX + b$ ,

on note  $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - (ax_i + b)]^2$  la somme des carrés des

distances  $H_i M_i$

On cherche  $a$  et  $b$  tels que  $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i)]^2 = \frac{S}{\sigma^2}$  est minimal

(« maximum de vraisemblance »)

$$\Rightarrow \begin{cases} a^* = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \\ b^* = \bar{y} - a^* \bar{x} \end{cases} \quad \text{avec } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \text{ valeur moyenne (non pondérée)}$$

**Méthode analytique** : on montre (hors-programme) :

$$u(a) = \frac{\sigma}{\sqrt{N[\overline{x^2} - \bar{x}^2]}} \quad u(b) = \sigma \sqrt{\frac{\overline{x^2}}{N[\overline{x^2} - \bar{x}^2]}}$$

Pour contrôler si les mesures sont bien compatibles avec une loi affine, on utilise les résidus  $\varepsilon_i = y_i - (ax_i + b)$  qui ne doivent pas être supérieurs en valeur absolue à  $2\sigma$



```

def AjustAff(Lx,Ly,sigma,fig = True):
    N = len(Lx)
    if len(Ly) != N:
        return 'listes de longueurs differentes'
    Sx,Sy,Sxx,Syy,Sxy,S = 0,0,0,0,0,0
    for i in range(N):
        Sx += Lx[i]
        Sy += Ly[i]
        Sxx += Lx[i]**2
        Syy += Ly[i]**2
        Sxy += Lx[i]*Ly[i]
    xmoy, ymoy , xxmoy , yymoy xymoy = Sx/N, Sy/N, Sxx/N, Syy/N, Sxy/N
    a = (xymoy-xmoy*ymoy) / (xxmoy-xmoy**2)
    b = ymoy-a*xmoy
    if sigma == 'inconnu':
        for i in range(N):
            S += (Ly[i]-a*Lx[i]-b)**2
        sigma = (S/(N-2))**.5
        sigmaa = ((S/N/(N-2)) / (xxmoy-xmoy**2))**.5
        sigmab = sigmaa*(xxmoy)**.5
    else:
        sigmaa = sigma*1/(N*(xxmoy-xmoy**2))**.5
        sigmab = sigma*(xxmoy/N/(xxmoy-xmoy**2))**.5

```

```

if fig == True:
    X = [Lx[0],Lx[-1]]
    Y = [a*Lx[0]+b,a*Lx[-1]+b]
    plt.figure('points et ajustement affine')
    plt.plot(Lx,Ly, 'o', label = u'points expérimentaux',
color = 'red')
    plt.errorbar(Lx, Ly, yerr = sigma*np.ones(N), fmt = 'm.',ecolor =
'black',elinewidth = 3)
    plt.xlabel('$X$')
    plt.ylabel('$Y$')
    plt.plot(X,Y, "r-", label = u'régression lineaire',color = 'b',alpha =
0.6)
    plt.show()

    Z = (Ly-(a*Lx+b))/sigma # calcul des résidus
    plt.figure('résidus normalisés')
    plt.plot(Lx, Z, 'o',color = 'red')
    plt.fill_between([np.min(Lx),np.max(Lx)], y1 = -2, y2 = 2, color =
'green', alpha = .1)
    plt.xlim(.9*np.min(Lx), 1.02*np.max(Lx))
    plt.xlabel('$X$')
    plt.ylabel('résidus normalisés de $Y$' ), plt.ylim(-3,3)
    plt.ticklabel_format(axis = 'x', style = 'sci', scilimits = (0,0))
    plt.grid()
    plt.show()

return [a,b,sigmaa,sigmab]

```



Remarque : si  $\sigma$  est inconnu, on peut l'évaluer à partir des  $N$  mesures, en supposant la

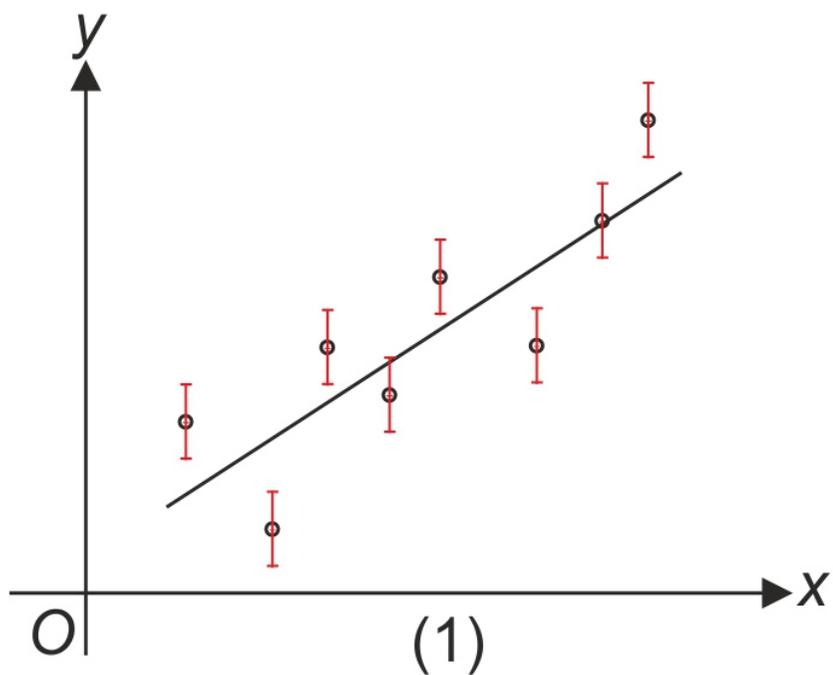
loi affine : on montre que  $\sigma$  est estimé par  $\sigma^* = \sqrt{\frac{S}{N-2}}$

Aucun test de conformité ne peut alors être appliqué puisque l'on a supposé *a priori* la loi vérifiée

Quand on demande aux étudiants de vérifier qu'une loi est affine à l'aide de résultats expérimentaux et que les incertitudes de mesures ne sont pas données, cette vérification est en réalité impossible

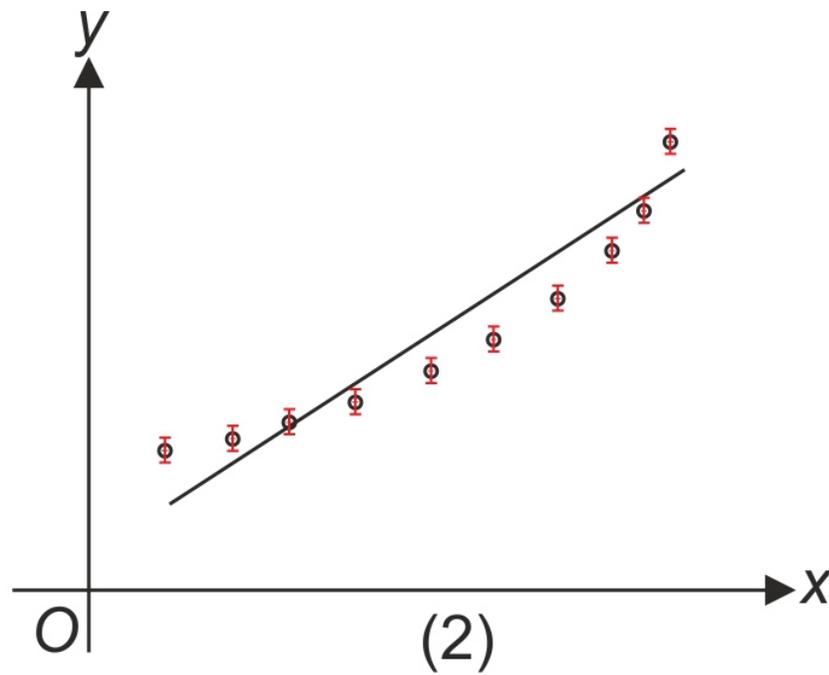
L'usage est de postuler que la loi affine théorique est bien vérifiée par l'expérience si le coefficient de corrélation linéaire au carré est très proche de 1

**Cette démarche n'a aucun fondement théorique.** En effet, ce coefficient (très utile pour faire des statistiques) **ne prend pas en compte les incertitudes de mesure** ; il est excellent dès qu'il y a une corrélation, même non linéaire entre  $Y$  et  $X$ , ce qui est pratiquement toujours le cas dans les sciences expérimentales



$$r^2 = 0,87$$

résidus < 2, hypothèse « loi affine » vérifiée



$$r^2 = 0,99$$

hypothèse « loi affine » NON vérifiée

## Ajustement affine avec pondération (hors-programme : pour les TIPE)

Le plus souvent (propagation des incertitudes) :  $u(Y_i) = \sigma_i \neq u(Y_j) = \sigma_j$

$$\Rightarrow \chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^N w_i [y_i - f(x_i)]^2$$

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad \text{inverse de la variance}$$

$$\bar{g} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i g_i}{\sum_{i=1}^N w_i} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i g_i}{w} \quad \text{moyenne pondérée, poids « fort » lorsque les incertitudes sont petites}$$

On reprend les calculs...

$$a^* = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad u(a) = \frac{1}{\sqrt{w(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}}$$

$$b^* = \bar{y} - a^* \bar{x} \quad u(b) = \sqrt{\frac{\overline{x^2}}{w(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}}$$

Aucune difficulté supplémentaire de programmation

## Ajustement linéaire (et pas affine)

Si le modèle physique est  $Y = aX$ , il n'est pas justifié de chercher  $a$  et  $b$  tels que  $Y = aX + b$

Plus généralement, lorsque l'on cherche à vérifier expérimentalement un modèle physique, on ne doit pas introduire plus de paramètres que celui du modèle ! **C'est une erreur très fréquente commise par les étudiants lors des TIPE**

On reprend les calculs, avec ou sans pondération... et on adapte le code Python

Sans pondération :

$$a^* = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}}$$
$$u(a) = \frac{\sigma}{\sqrt{Nx^2}}$$

## Exemple : nombre $n$ de traits d'un réseau par mm

On mesure la déviation sous incidence normale dans l'ordre 1 pour Hg. La théorie prédit une raie de longueur d'onde  $\lambda$  dans la direction faisant l'angle  $i'$  par rapport à la direction de la lumière incidente sur le réseau, telle que  $\underbrace{\sin i'}_Y = \underbrace{n}_a \cdot \underbrace{\lambda}_X$

$\lambda(\text{nm})$	couleur	$i'(^{\circ})$	$n = \frac{\sin i'}{\lambda}$ (traits/mm)	$u(n)$
404,7	violet intense	13,35	570,5	0,57
407,8	violet	13,45	570,4	0,57
435,8	indigo	14,37	569,5	0,53
491,6	bleu-vert	16,27	569,9	0,46
546,1	vert	18,17	571,0	0,41
577,0	jaune 1	19,23	570,8	0,39
579,1	jaune 2	19,27	569,9	0,39
623,4	rouge	20,80	569,6	0,36

## Détermination de $u(n)$

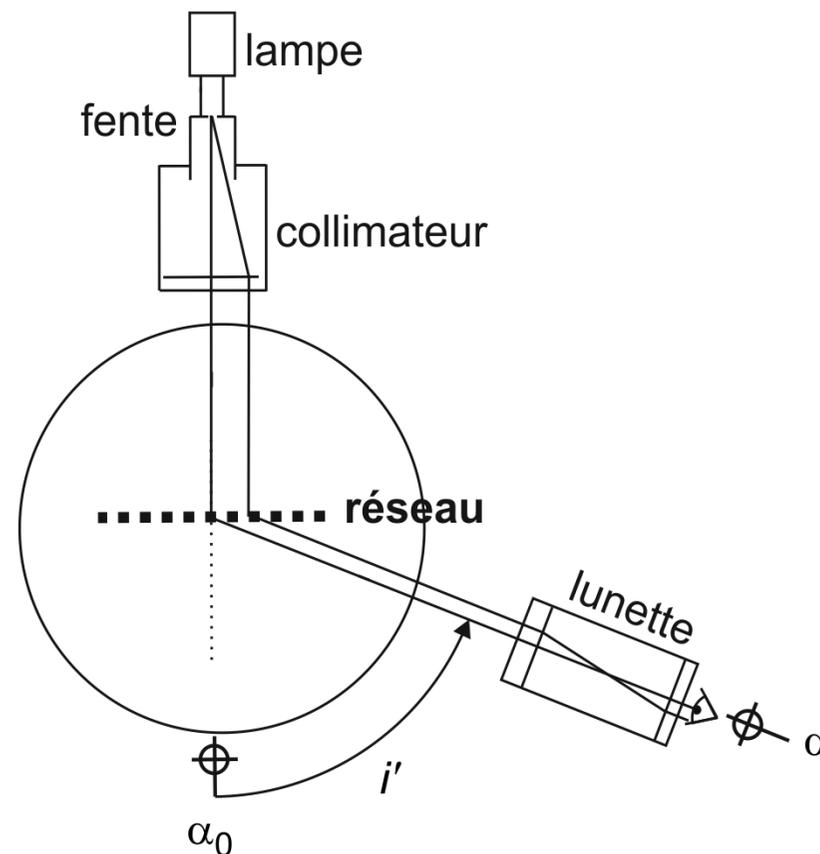
Les angles  $\alpha$  sont mesurés au vernier avec :

$$\Delta\alpha = 1' \Rightarrow u(\alpha) = \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 1,68 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$i' = \alpha - \alpha_0 \Rightarrow u(i') = \sqrt{u^2(\alpha_0) + u^2(\alpha)} = \sqrt{2} u(\alpha) = 2,37 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$\lambda$  ordre 1      ordre 0

$$dn = \frac{\cos i'}{\lambda} di' \Rightarrow u(n) = \frac{\cos i'}{\lambda} u(i')$$



## Résultats

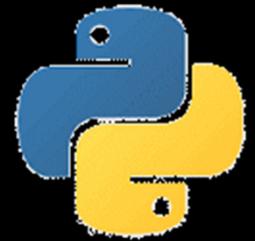
	$a$	$u(a)$	$b$	$u(b)$
Affine	570027	1028	9E-5	5E-4
Linéaire	570200	159		
Affine Pondéré	570001	1010	2E-4	5E-4
Linéaire Pondéré	570199	156		

### Conclusion :

- >>> l'incertitude est surévaluée quand le modèle n'est pas adapté
- >>> on peut éviter la pondération

$$\underbrace{\sin i'}_Y = \underbrace{n}_a \cdot \underbrace{\lambda}_X$$

$$u(Y) = \cos i' \cdot u(i')$$



```
Lx = np.array([404.7, 407.8, 435.8, 491.6,
               546.1, 577, 579.1, 623.4])*1E-9 # les longueurs d'onde
```

```
L = np.array([13.35, 13.45, 14.37, 16.27, 18.17, 19.23, 19.27,
               20.8])*np.pi/180 # les angles transformés en radians
```

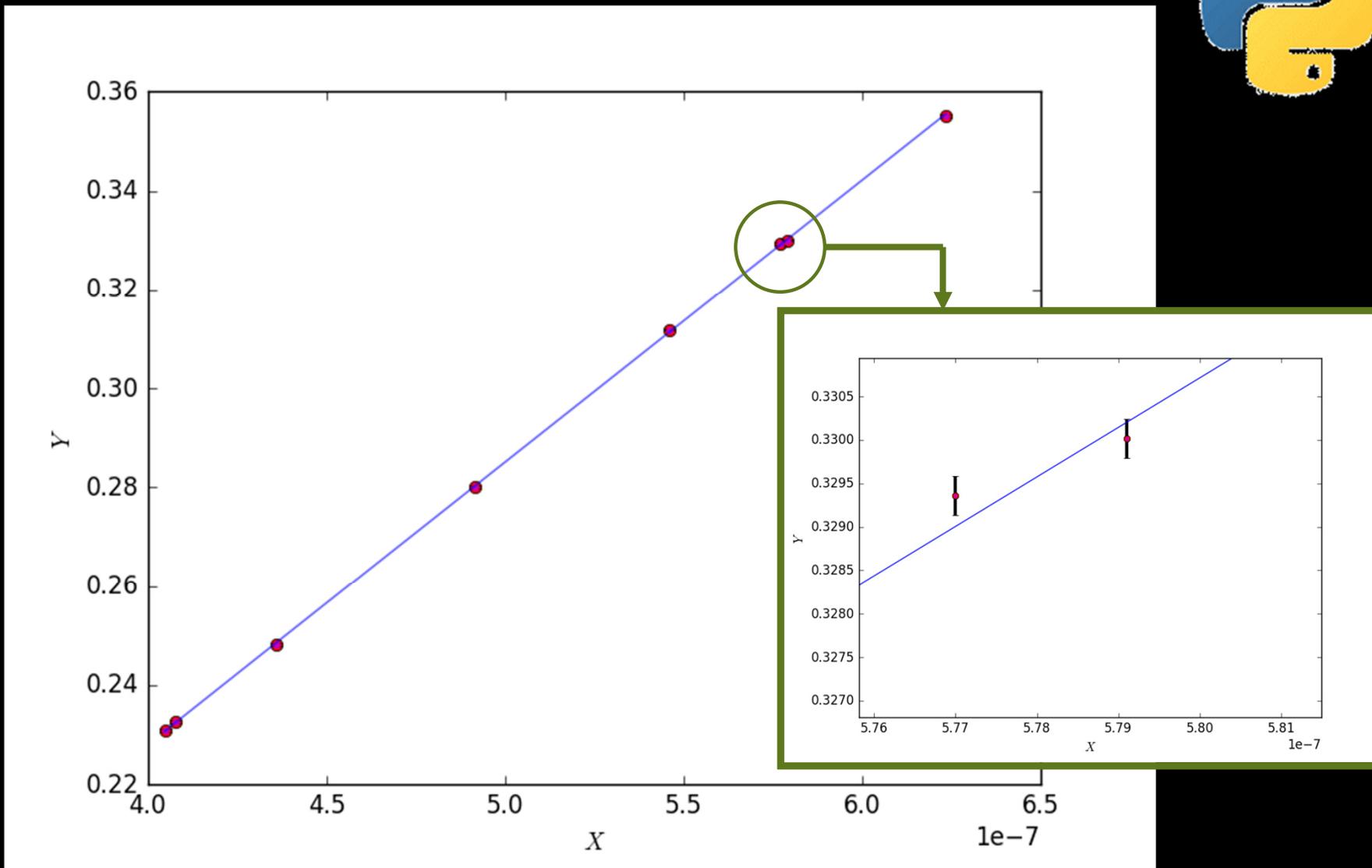
```
Ly = np.sin(L) # on calcul leur sinus
```

```
sigma = 2,37E-4 # écart-type sur les angles
```

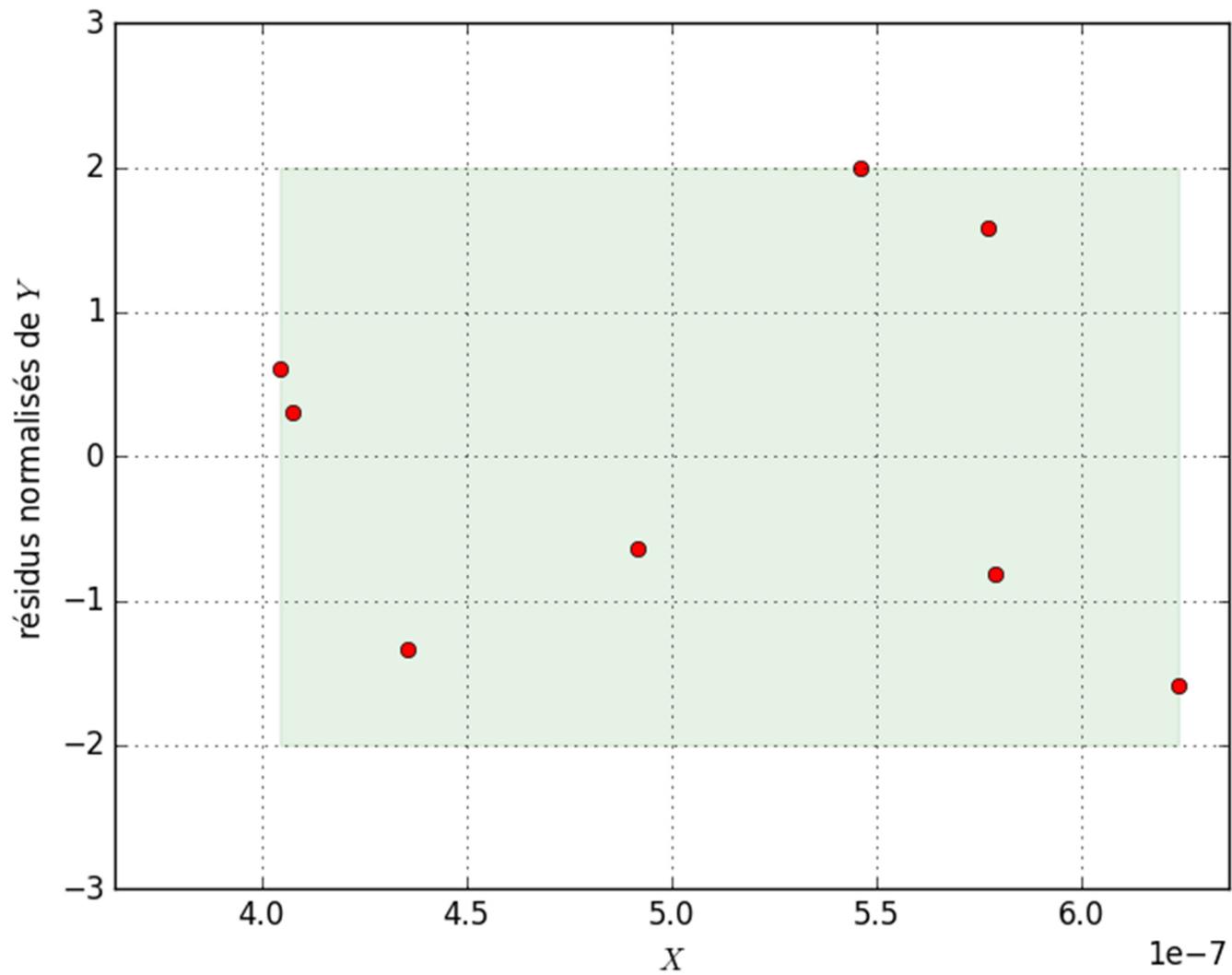
```
sigmaY = np.cos(L)*sigma # propagation des incertitudes sur les
angles vers Y = sin(i') (les incertitudes dépendent de la
longueur d'onde)
```

(sans pondération, on prend la valeur maximale de sigmaY)

# AjustLinPond(Lx, Ly, sigmaY)



“visuel” mais les barres d’incertitudes sont trop petites



**Le modèle linéaire est bien vérifié ici**

## Simulation de Monte-Carlo

On mesure  $(x_i, y_i)$   $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  avec  $u(Y_i) = \sigma$  pour  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$

- (1) On calcule  $a^*$  et  $b^*$  grâce à une régression linéaire. La droite d'ajustement a pour équation  $Y_{\text{ajusté}} = a^* X + b^*$
- (2) On simule  $N$  jeux de mesures  $(x_i^j = x_i, y_i^j = a^* x_i + b^* + \varepsilon_i^j)$  où  $\varepsilon_i$  suit la distribution choisie centrée sur 0 et d'incertitude-type  $\sigma$
- (3) On effectue une régression linéaire sur chaque jeu de mesures et on obtient  $N$  valeurs des coefficients de la droite d'ajustement  $(a_j, b_j)$   $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$
- (4) On en déduit la valeur de l'écart-type sur  $a^*$  et  $b^*$

```

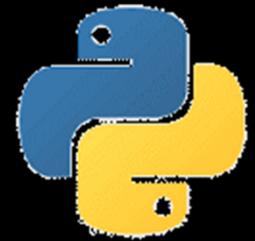
def AjustLin_MC(Lx, Ly, sigma) :
    p0 = AjustAff(Lx, Ly, sigma, False)
    a0, b0 = p0[0], p0[1] # valeurs des coefficients basés sur la
réalisation expérimentale

    def ajustement(x) :
        return a0*x+b0

    Ly_ajuste = ajustement(Lx) # valeurs autour desquelles ont
simule des mesures

    N = 100000 # nombre d'expériences simulées, pas le nombre de
mesures...
    a_MC, b_MC = np.zeros(N), np.zeros(N) # initialisation des
listes dans lesquelles on va stocker les pentes et ordonnées à
l'origine simulées
    for i in range(N) : # pour chaque expérience
# on simule la mesure de Y pour toutes les valeurs de X
        Ly_MC = Ly_ajuste + rd.normal(0, sigma, size = len(Lx))
# on reprend l'ajustement affine avec cette série de valeurs de n
        p = AjustAff(Lx, Ly_MC, sigma, False)
# on stocke les valeurs des paramètres d'ajustement dans les
listes a_MC et b_MC
        a_MC[i] = p[0]
        b_MC[i] = p[1]

```





```

# les résultats
# pour a
a_moy = np.mean(a_MC)
u_a = np.std(a_MC, ddof = 1)
print("Estimation du paramètre a :")
print("Valeur mesurée : a = {}".format(a_moy))
print("Incertitude-type : u(a) = {}\n".format(u_a))
# pour b
b_moy = np.mean(b_MC)
u_b = np.std(b_MC, ddof = 1)
print("Estimation du paramètre b :")
print("Valeur mesurée : b = {}".format(b_moy))
print("Incertitude-type : u(b) = {}\n".format(u_b))

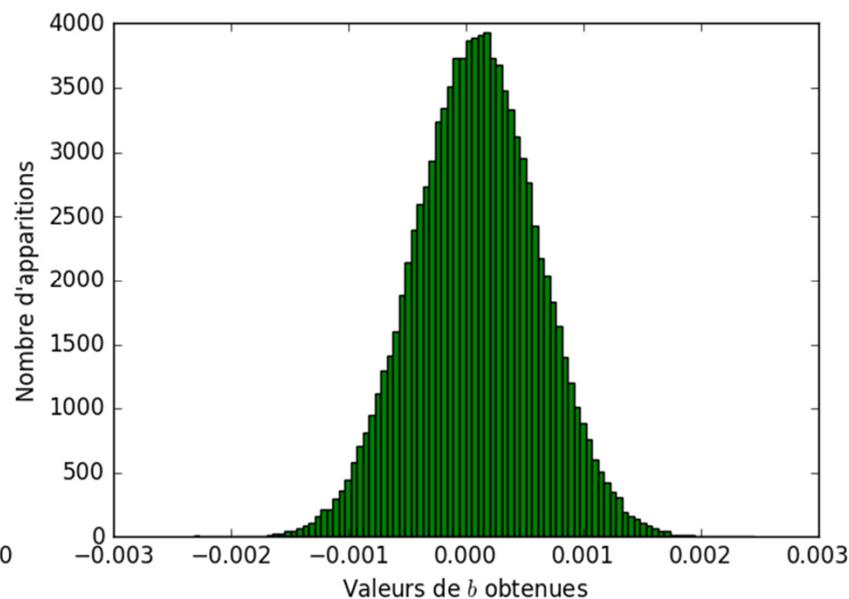
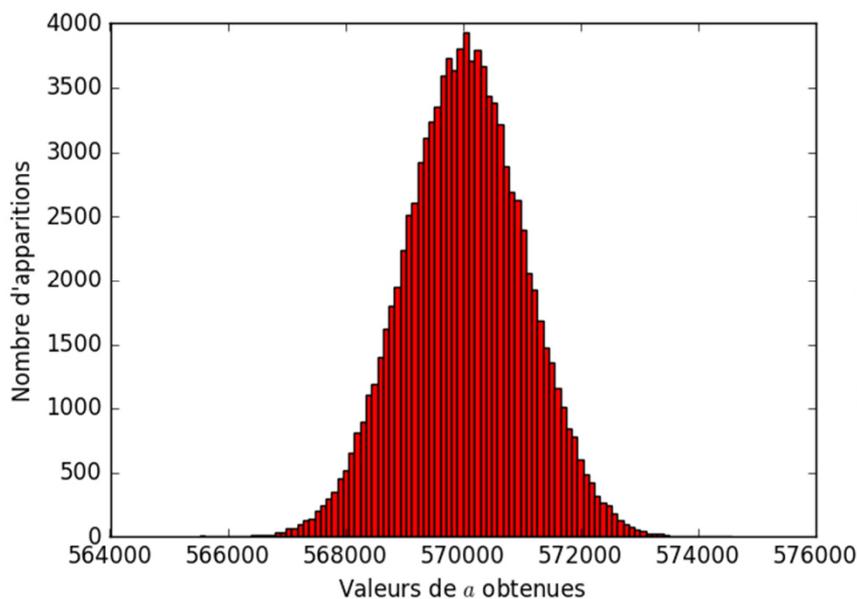
# les graphiques
plt.figure(figsize = (15, 4))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.hist(a_MC, bins = 'rice', color = 'green')
plt.xlabel(r"Valeurs de $a$ obtenues")
plt.ylabel(r"Nombre d'apparitions")
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.hist(b_MC, bins = 'rice', color = 'grey')
plt.xlabel(r"Valeurs de $b$ obtenues")
plt.ylabel(r"Nombre d'apparitions")
plt.show()

```

On reprend l'exemple du réseau : ajustement affine sans pondération  
 On avait trouvé par la méthode analytique :



**$a = 570027$**      **$u(a) = 1028.1241546853$ ,**  
 $b = 9.04e-05$ ,  $u(b) = 0.000529$



Estimation du paramètre  $a$  :

Valeur mesurée :  **$a = 570032.687531272$**

Incertitude-type :  **$u(a) = 1027.4654153606768$**

Estimation du paramètre  $b$  :

Valeur mesurée :  $b = 8.710739535013986e-05$

Incertitude-type :  $u(b) = 0.000528558911264731$

## CONCLUSION

La méthode de Monte-Carlo est considérée comme «l'avenir des incertitudes »

Elle a été ajoutée au GUM

*(Guide to the expression of uncertainty in Measurement)*

Elle permet de transmettre les informations du mesurage sans perte d'information  
(sur la nature des distributions notamment)

On peut ainsi par exemple tenir compte de la *corrélation* entre les coefficients  $a$  et  $b$  d'un ajustement linéaire lorsque l'on souhaite déterminer l'incertitude sur  $Y = aX + b$  due à une incertitude sur  $X$ ...

