ANALYSE DE FOURIER

1. SÉRIE DE FOURIER

1.1 Cas d'une fonction *f* à valeurs réelles

Pour toute fonction f ***T-périodique*** à valeurs réelles :

$$\boxed{f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)\right] = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t + \psi_n)}$$

avec $\boxed{\Omega = \dfrac{2\pi}{T}}$ pulsation fondamentale unicité de ce développement

$$c_n \cos(n\Omega t + \psi_n) = \underbrace{c_n \cos\psi_n}_{a_n} \cos(n\Omega t) \underbrace{-c_n \sin\psi_n}_{b_n} \sin(n\Omega t) \Rightarrow c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

on prend $\boxed{c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$

calcul : $\boxed{c_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \langle f \rangle}$ valeur moyenne de f $(\omega = 0)$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\Omega t)\,dt$$

tous nuls si f impaire

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\Omega t)\,dt$$

tous nuls si f paire

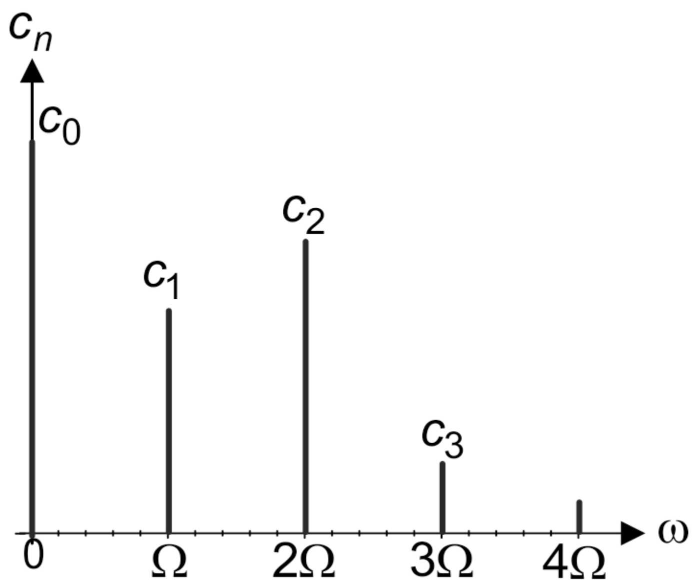
pour f de classe C^1 par morceaux $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t_0 + \psi_n)$ converge vers

$f(t_0)$ si f continue en t_0, et sinon vers $\dfrac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}$

$c_1\cos(\Omega t + \psi_1)$ fondamental de f (même période T)

$c_n\cos(n\Omega t + \psi_n)$ harmonique de rang n de f (période T/n)

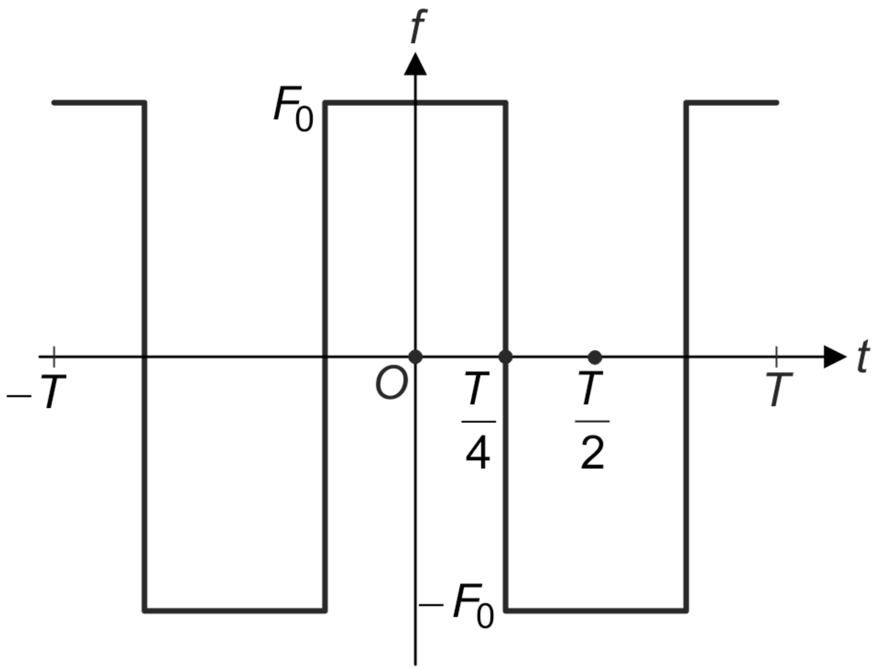
spectre de f



pour les fonctions « physiques » $c_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$$\Rightarrow c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n \cos(n\Omega t + \psi_n) \simeq f(t) \quad \text{pour } N \text{ assez grand}$$

créneaux symétriques pairs



$$c_0 = \langle f \rangle = 0$$

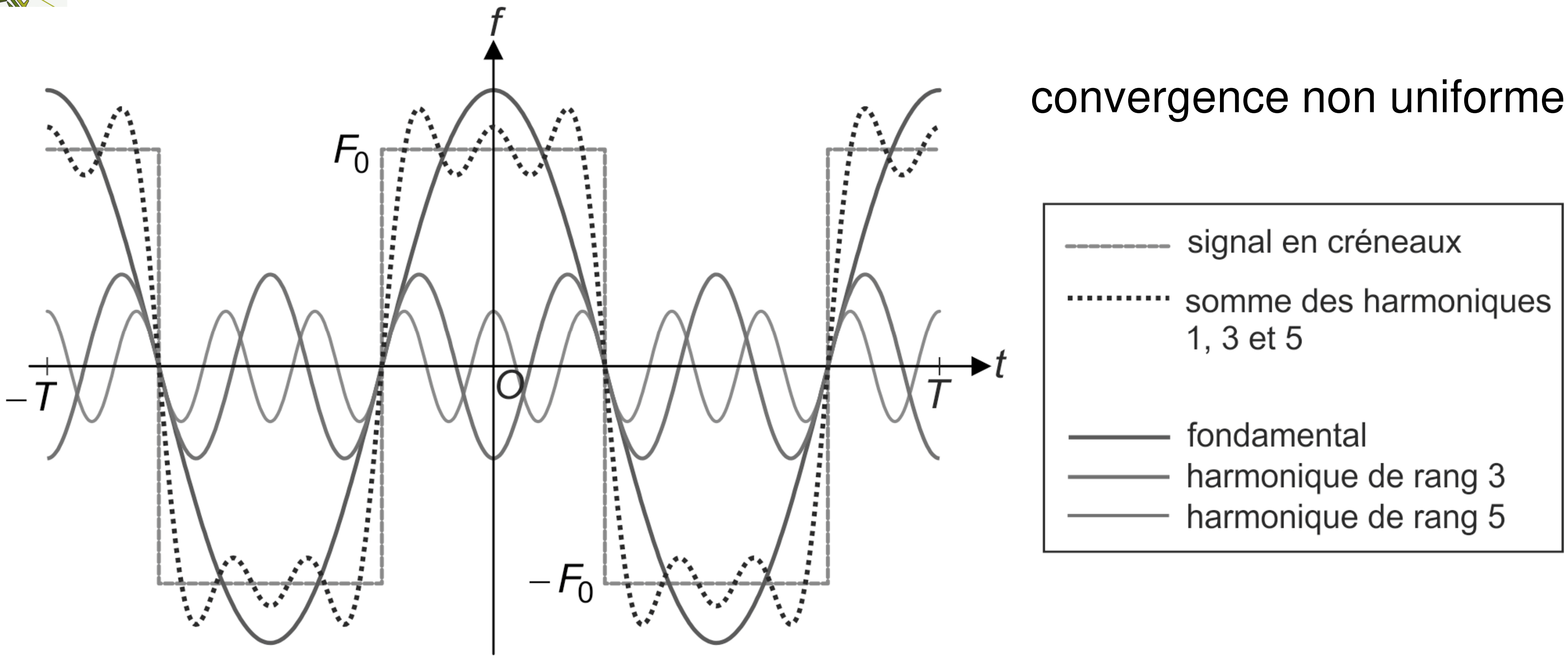
$$b_n = 0 \ \forall n$$

$$a_{2p} = 0$$

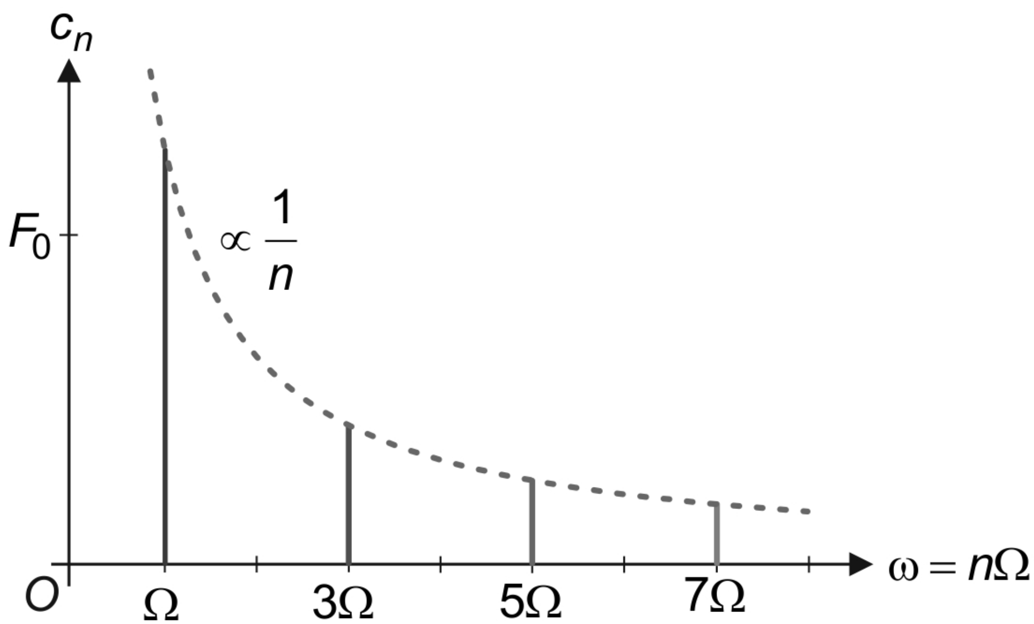
$$a_{2p+1} = \frac{4F_0}{(2p+1)\pi}(-1)^p$$

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{4F_0}{\pi}\left[\cos(\Omega t) - \frac{1}{3}\cos(3\Omega t) + \frac{1}{5}\cos(5\Omega t) - \frac{1}{7}\cos(7\Omega t) + \ldots\right]}$$

convergence non uniforme



spectre en $1/n$



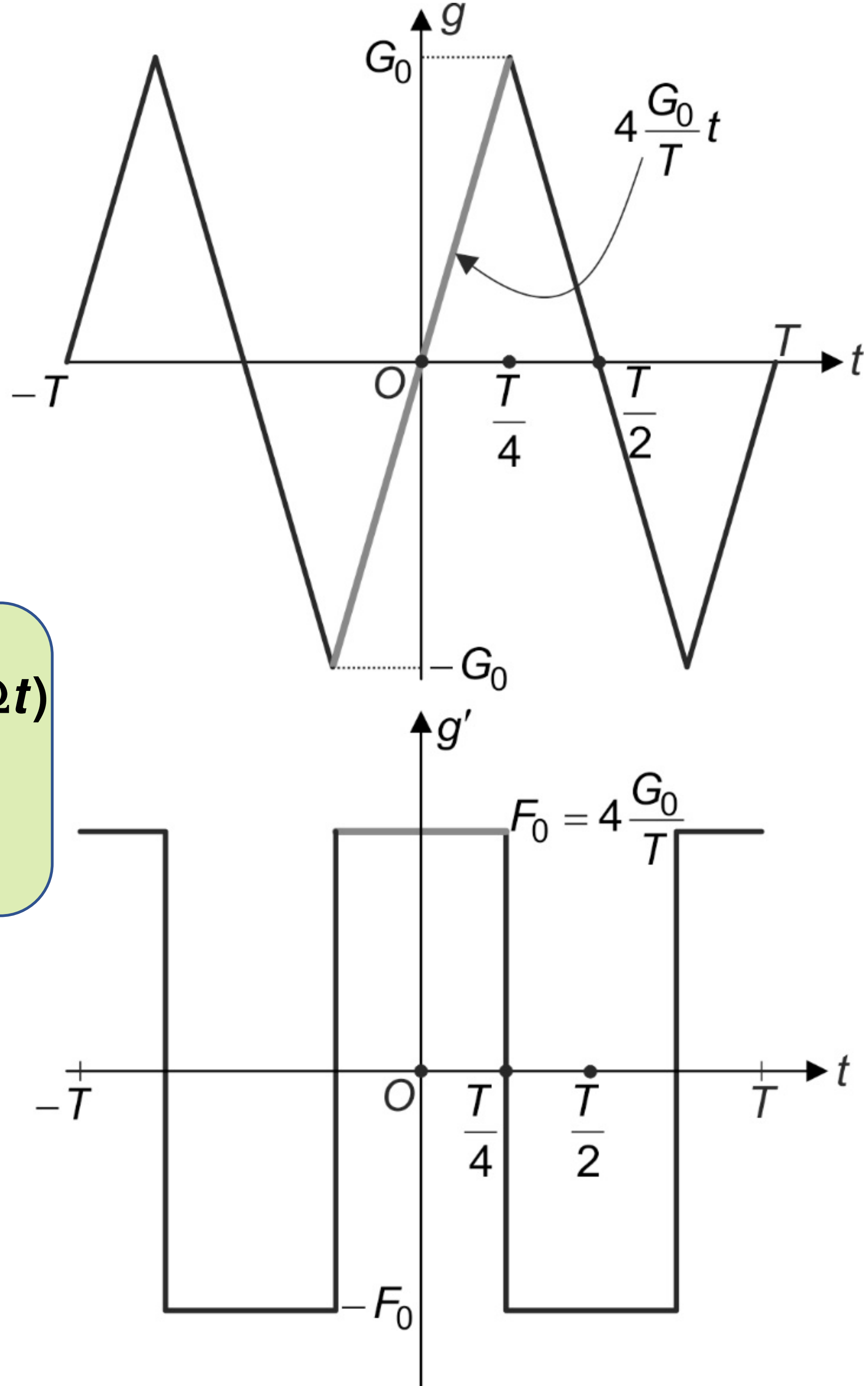
triangles symétriques impairs

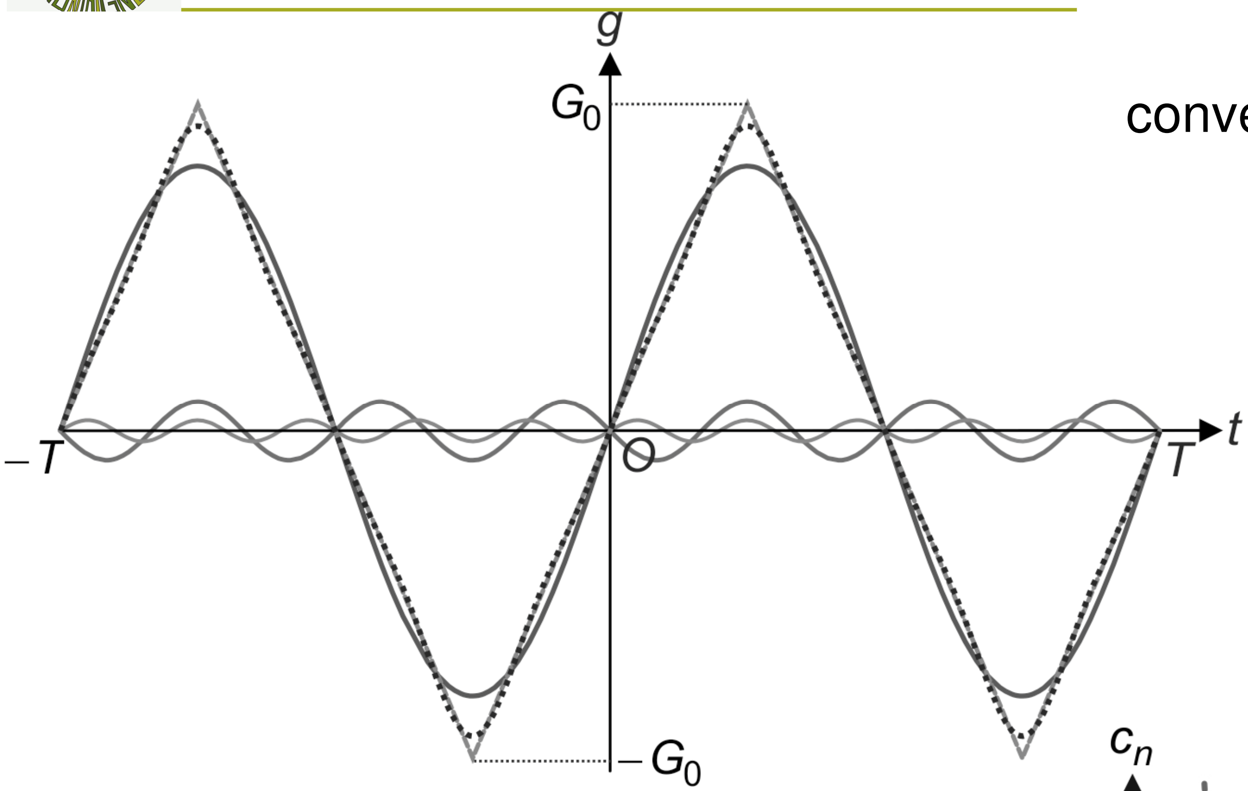
$$c_0 = \langle g \rangle = 0$$

$$a_n = 0 \ \forall n$$

primitive nulle en 0 de la fonction créneaux précédente

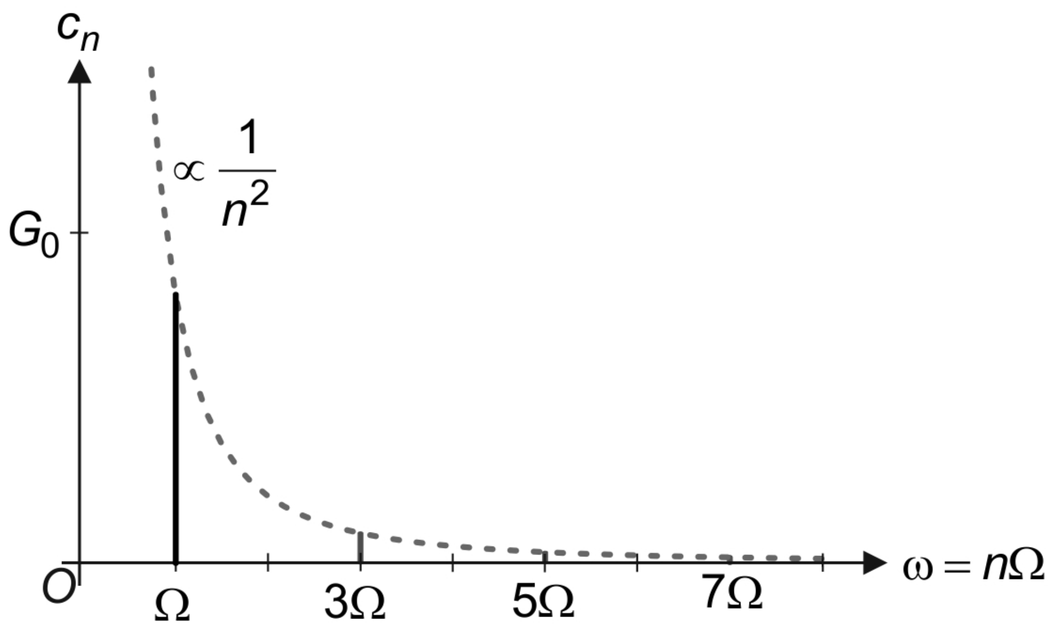
$$\boldsymbol{g(t) = \frac{8G_0}{\pi^2}\left[\sin(\Omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\Omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\Omega t) - \frac{1}{7^2}\sin(7\Omega t) + \dots\right]}$$





convergence uniforme

spectre en $1/n^2$



1.2 Théorème pour les fonctions *f* à valeurs complexes

Pour toute fonction f ***T_0-périodique*** à valeurs complexes :

$$\boldsymbol{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C_n} e^{2i\pi n\nu_0 t}}$$ avec $$\nu_0 = \frac{1}{T_0}$$ et $$\boldsymbol{\underline{C_n} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t) e^{-2i\pi n\nu_0 t} dt}$$

unicité de ce développement

le spectre de f fait donc intervenir des fréquences négatives, mais pour une fonction f réelle, on a :

$$\underline{C_{-n}} = \underline{C^*{}_n} \;\Rightarrow f(t) = \underline{C_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underline{C_{-n}} e^{-2i\pi n\nu_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underline{C_n} e^{2i\pi n\nu_0 t}$$

$$= \underline{C_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\underline{C_n} e^{2i\pi n\nu_0 t} + (\underline{C_n} e^{2i\pi n\nu_0 t})^* \right]$$

$$= \underline{C_0} + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \underline{C_n} e^{2i\pi n\nu_0 t} \right]$$

On peut donc ne considérer que les fréquences positives.

Le spectre est alors par exemple la représentation de $2\left|C_n\right| = c_n$

pour $\nu = \nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, ..., n\nu_0$ et de $\underline{C_0} = c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\mathrm{d}t = \langle f \rangle$ pour $\nu = 0$

Forme déjà vue pour une fonction à valeurs réelles :

Posons $\underline{C_n} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ pour $n > 0$ et $\Omega = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu_0$

$$\Rightarrow f(t) = \underline{C_0} + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \underline{C_n} e^{in\Omega t}\right] = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

Comme $\underline{C_n} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)[\cos(n\Omega t) - i\sin(n\Omega t)]\mathrm{d}t$ on a bien $c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\mathrm{d}t = \langle f \rangle$

$a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t$ et $b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(n\Omega t)\mathrm{d}t$

2. TRANSFORMÉE DE FOURIER

Pour toute fonction **non périodique** du temps $f(t)$, à valeurs complexes, on a :

$$\boldsymbol{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} \mathrm{d}\nu}$$

où $\tilde{f}(\nu)$ est la transformée de Fourier de *f*, donnée par :

$$\boldsymbol{\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} \mathrm{d}t}$$

Le spectre de *f* fait donc intervenir des fréquences négatives, mais pour une fonction *f* réelle, on a : $\tilde{f}(-\nu) = \tilde{f}^*(\nu)$ d'où :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{0} \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} \mathrm{d}\nu + \int_{0}^{+\infty} \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} \mathrm{d}\nu = \int_{0}^{+\infty} \tilde{f}(-\nu) e^{-2i\pi\nu t} \mathrm{d}\nu + \int_{0}^{+\infty} \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} \mathrm{d}\nu$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \left[\tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} + \left(\tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} \right)^* \right] \mathrm{d}\nu = 2\,\mathrm{Re} \int_{0}^{+\infty} \left[\tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} \right] \mathrm{d}\nu$$

On peut donc ne considérer que les fréquences positives.

Le spectre est alors par exemple la représentation de $2\left|\tilde{f}(\nu)\right|$ pour $\nu \geq 0$

propriétés

- unicité
- linéarité $\mathrm{TF}[\lambda f(t)+\mu g(t)]=\lambda \mathrm{TF}[f(t)]+\mu \mathrm{TF}[g(t)]$
- similitude $\boxed{\mathrm{TF}\left[f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right](\nu)=|\lambda|\cdot\tilde{f}(\lambda\nu)}$

démonstration $\mathrm{TF}\left[f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right](\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{\lambda}\right)e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t$

on effectue le changement de variables $t'=\frac{t}{\lambda}$

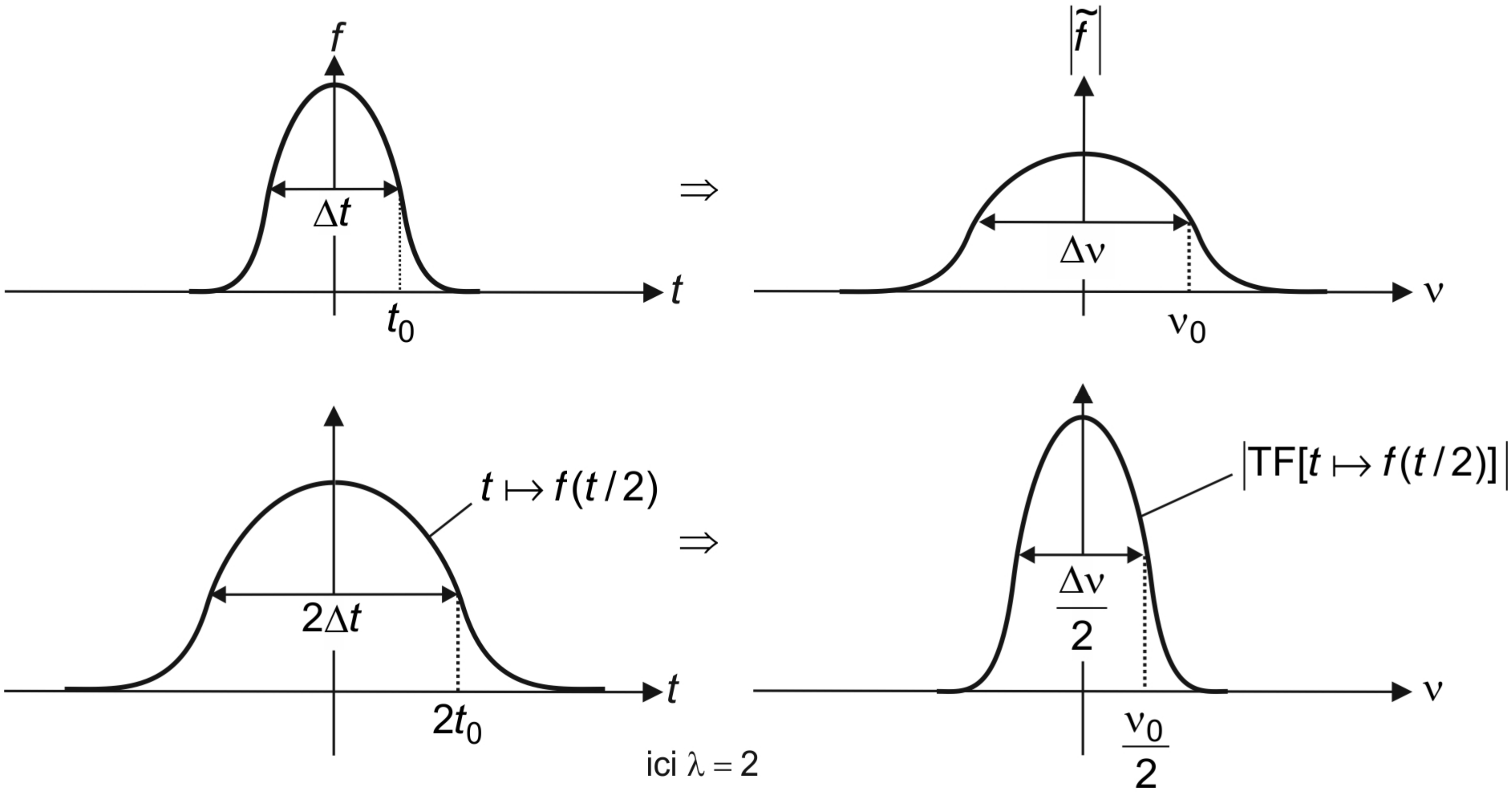
$$\Rightarrow \mathrm{TF}\left[f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right](\nu)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')e^{-2i\pi\nu\lambda t'}\lambda\mathrm{d}t' \text{ si } \lambda>0\\ \int_{+\infty}^{-\infty} f(t')e^{-2i\pi\nu\lambda t'}\lambda\mathrm{d}t' \text{ si } \lambda<0\end{cases}$$

soit dans tous les cas $|\lambda|\cdot\tilde{f}(\lambda\nu)$

une dilatation de l'échelle des temps implique une contraction de celle des fréquences : $(\lambda > 1)$

une contraction de l'échelle des temps implique une dilatation de celle des fréquences : $(\lambda < 1)$

plus un signal temporel est bref, plus il est riche en fréquences (spectre étalé) ; plus il dure longtemps, moins il contient de fréquences (spectre étroit).



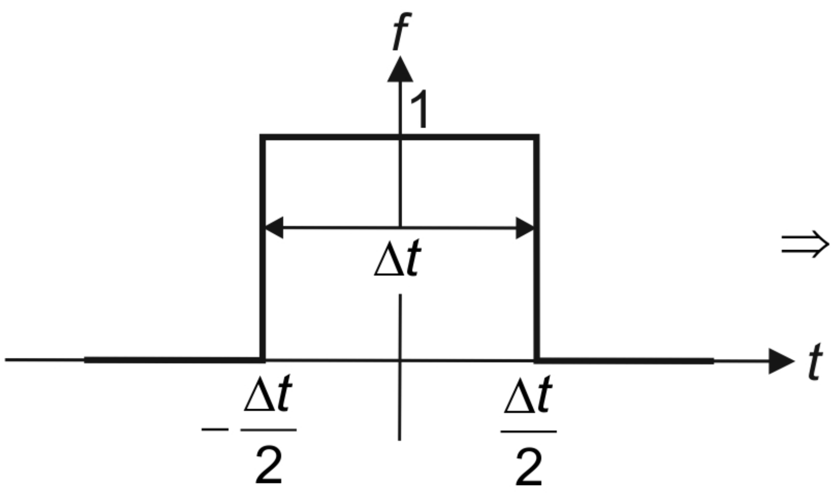
Exemples :

fonction « fenêtre »

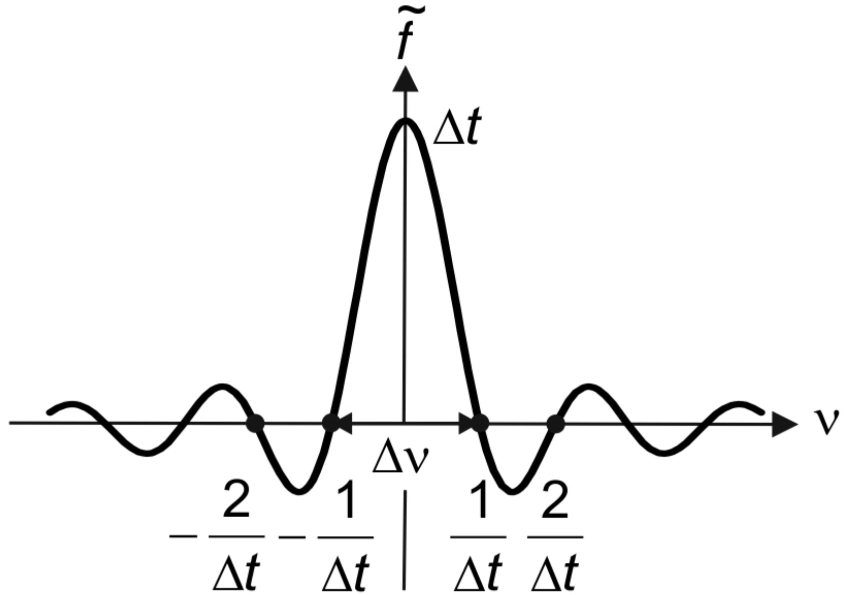
$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} e^{-2i\pi\nu t} dt = \left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu} \right]_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} = \Delta t \frac{e^{i\pi\nu\Delta t} - e^{-i\pi\nu\Delta t}}{2i\pi\nu\Delta t} = \Delta t \cdot \mathrm{sinc}(\pi\nu\Delta t)$$

sinus cardinal $\mathrm{sinc}(X) = \sin X / X$ pour $X \neq 0$

$\mathrm{sinc}(0) = 1$



$\Rightarrow$



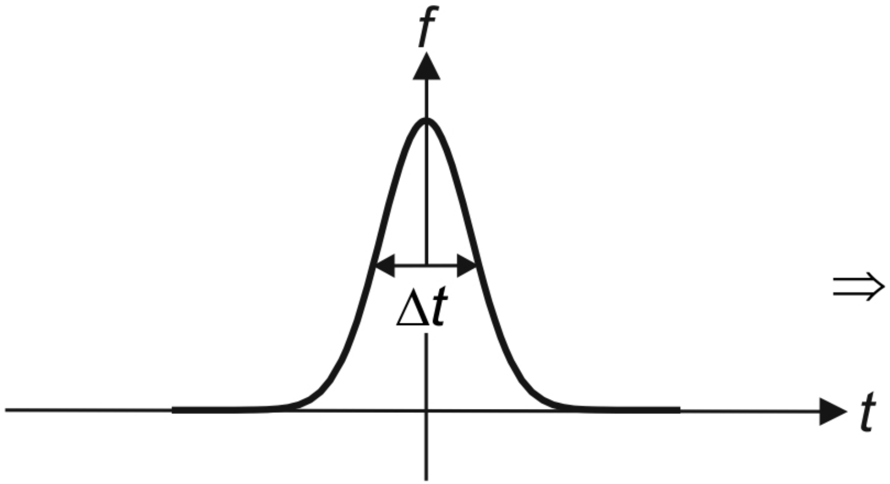
$$\boxed{\Delta t \cdot \Delta\nu = 2}$$

Fonction « gaussienne »

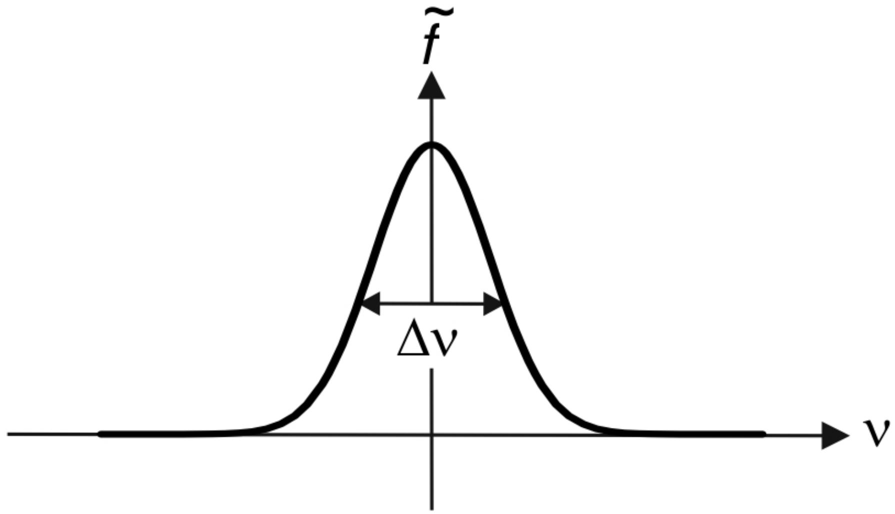
$$f(t)=e^{-\beta t^2} \quad\Rightarrow\quad \tilde{f}(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta t^2} e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\left[\left(t+\frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2+\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2}\right]}\mathrm{d}t=e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta u^2}\mathrm{d}u$$

en effectuant le changement de variable $u=t+\dfrac{i\pi\nu}{\beta}$ (et en admettant sa validité).

comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \quad\Rightarrow \tilde{f}(\nu)=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\beta}}$ La TF est aussi une gaussienne



$\Rightarrow$



$$\boxed{\Delta t\cdot\Delta\nu=\frac{4\ln 2}{\pi}}$$

(définition à mi-hauteur)

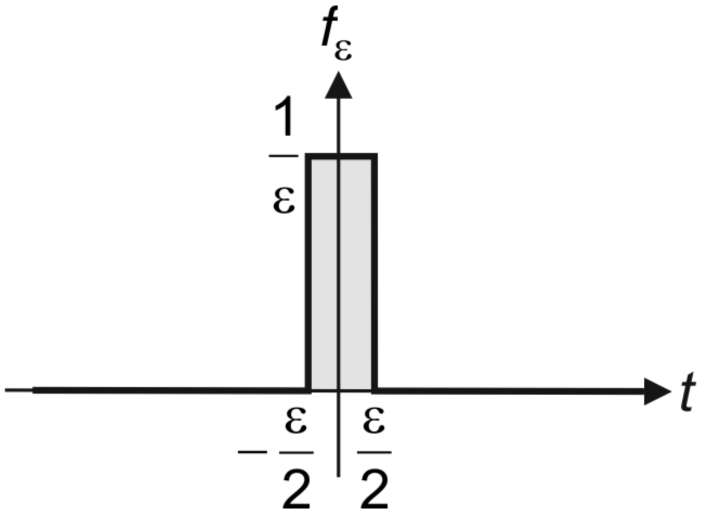
Distribution de Dirac

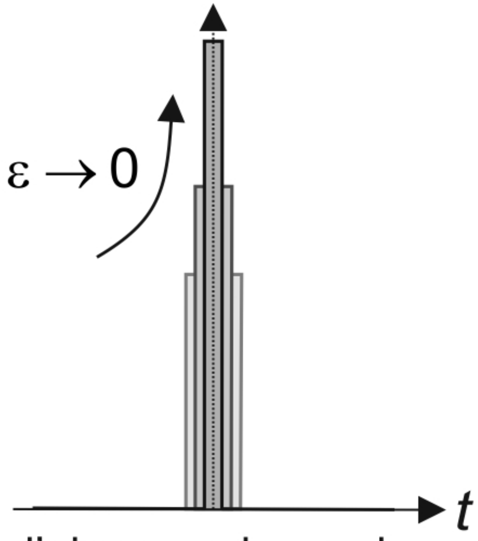
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t)$$

impulsion idéale

$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t \neq 0 \\ +\infty \text{ pour } t = 0 \end{cases}}$$

avec $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1}$





l'aire sous la courbe se conserve

Propriétés:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$
- $\boxed{\tilde{\delta}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t = 1}$ un signal de durée nulle possède une largeur spectrale infinie.

- $e^{2i\pi\nu_0 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - \nu_0) e^{2i\pi\nu t} d\nu$ or $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$

on en déduit que la TF de $f(t) = e^{2i\pi\nu_0 t}$ est $\tilde{f}(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$

le spectre d'un signal sinusoïdal (de durée infinie) ne contient qu'une raie pour sa fréquence ν_0

pour qu'un instrument produise un son le plus sinusoïdal possible, il faut qu'il vibre longtemps (diapason).

la durée d'un signal réel étant finie, sa largeur spectrale peut être faible, mais non nulle.

Un signal sinusoïdal n'a donc pas de réalité physique

Application : réponse d'un système linéaire à une entrée quelconque

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} \mathrm{d}\nu \longrightarrow \text{réponse } R(t)$$

$$e^{2i\pi\nu t} \longrightarrow H(\nu) e^{2i\pi\nu t}$$

$H(\nu)$ est la fonction de transfert du système linéaire

$$\text{linéarité} \quad \Rightarrow \quad R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} \mathrm{d}\nu$$

$$f(t) = \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\delta}(\nu) e^{2i\pi\nu t} \mathrm{d}\nu \longrightarrow R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) e^{2i\pi\nu t} \mathrm{d}\nu \quad \text{car} \quad \tilde{\delta}(\nu) = 1$$

impulsion

donc $\boxed{H(\nu) = \tilde{R}(\nu) = \mathrm{TF}[R(t)](\nu)}$

la fonction de transfert d'un système linéaire est égale à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle

expérimentalement, on obtient la fonction de transfert d'un circuit linéaire à l'aide d'un générateur d'impulsions et d'un analyseur de spectre.