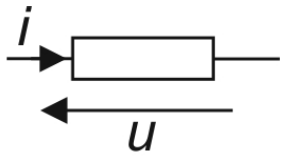
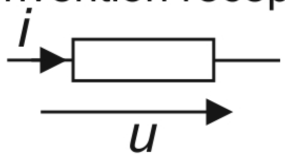
2. CIRCUITS LINÉAIRES

2.1 Dipôles linéaires passifs



Convention récepteur.



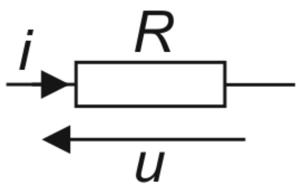
Convention générateur.

En convention récepteur, la puissance **reçue** par le dipôle est :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

En convention générateur, c'est la puissance **fournie**

Conducteur ohmique :

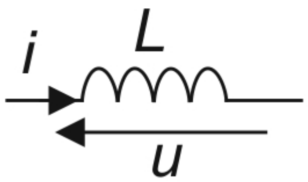


Conducteur ohmique.

$\boxed{u = Ri}$ $\quad R > 0 \quad$ résistance du conducteur ohmique en ohm (Ω)

$p = ui = Ri^2 > 0$ puissance reçue, toujours positive

Bobine idéale (sans résistance interne) :



Bobine idéale.

$\boxed{u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$ $\quad L > 0 \quad$ inductance de la bobine en henry (H)

énergie reçue pendant dt durée infinitésimale

$p = ui = Li\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{1}{2}Li^2\right]$ puissance reçue, s'écrit aussi : $p = \dfrac{\delta E}{\mathrm{d}t}$

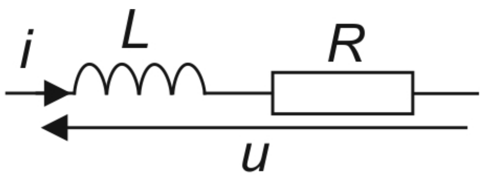
$\Rightarrow \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}Li^2\right] = \delta E$ est un bilan d'énergie: si on apporte δE à la bobine, la grandeur $E_L = \frac{1}{2}Li^2$ varie de δE

$\boxed{E_L = \frac{1}{2}Li^2}$ **énergie magnétique *emmagasinée* par la bobine**

$p_L = \frac{\mathrm{d}E_L}{\mathrm{d}t}$ puissance instantanée, est finie donc $t \mapsto E_L(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2$ est continue

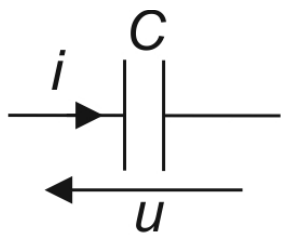
L'intensité *i* du courant dans la bobine est une fonction continue du temps

Bobine réelle (avec résistance interne) :



Bobine réelle.

Condensateur :



Condensateur.

$$\boxed{\boldsymbol{i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}}$$

$C > 0$ capacité du condensateur en farad (F)

énergie reçue pendant dt durée infinitésimale

$p = ui = Cu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{1}{2}Cu^2\right]$ puissance reçue, s'écrit aussi : $p = \dfrac{\delta E}{\mathrm{d}t}$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left[\dfrac{1}{2}Cu^2\right] = \delta E$ est un bilan d'énergie: si on apporte δE au condensateur, la grandeur $E_C = \dfrac{1}{2}Cu^2$ varie de δE

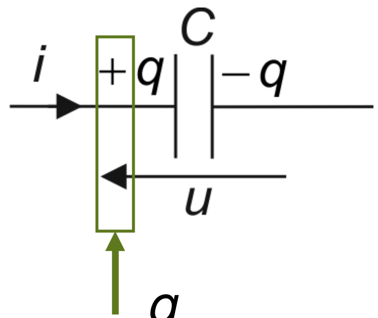
$$\boxed{\boldsymbol{E_C = \frac{1}{2}Cu^2}}$$

énergie électrique *emmagasinée* par le condensateur

$$p_C = \frac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t}$$ puissance instantanée, est finie donc $t \mapsto E_C(t) = \frac{1}{2} C u(t)^2$ est continue

La tension *u* aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps

Les armatures du condensateur portent des charges opposées



$$u = +\frac{q}{C}$$

$i = +\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ pour le courant dirigé vers l'armature qui porte la charge $+q$

$$\Rightarrow \boxed{E_C = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} q u = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}}$$

Linéarité : si $u \to \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$, alors $i \to \lambda i$ et réciproquement

en régime sinusoïdal forcé avec la notation complexe : **impédances**

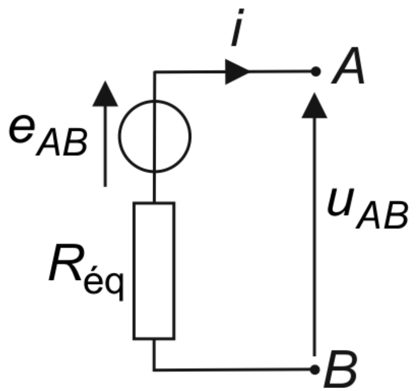
$u = Ri \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = Z_R \underline{i}$ avec $\boxed{Z_R = R \in \mathbb{R}^+}$

$u = L\dfrac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = Z_L \underline{i}$ avec $\boxed{Z_L = jL\omega}$

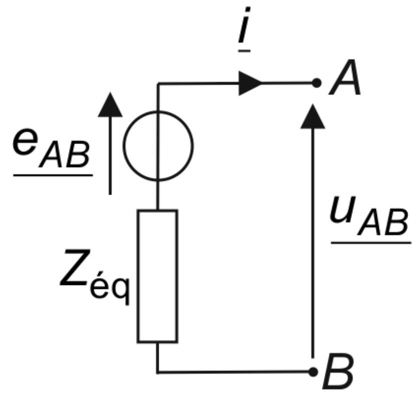
$i = C\dfrac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = Z_C \underline{i}$ avec $\boxed{Z_C = \dfrac{1}{jC\omega}}$

2.2 Sources linéaires

Source de tension réelle (source de Thévenin)



Régime stationnaire.



R.s.f.

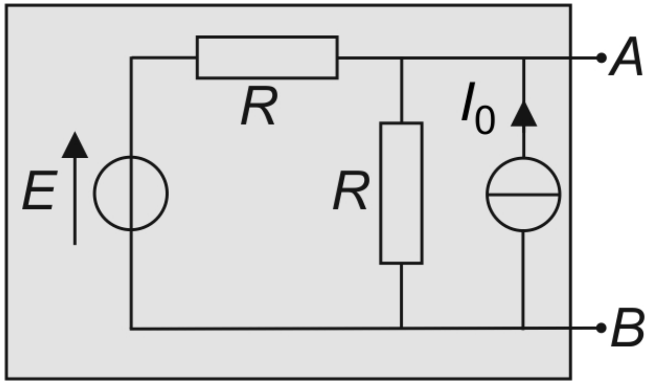
$$u_{AB} = -R_{\text{éq}} i + e_{AB}$$

$$\underline{u}_{AB} = -\underline{Z}_{\text{éq}} \underline{i} + \underline{e}_{AB}$$

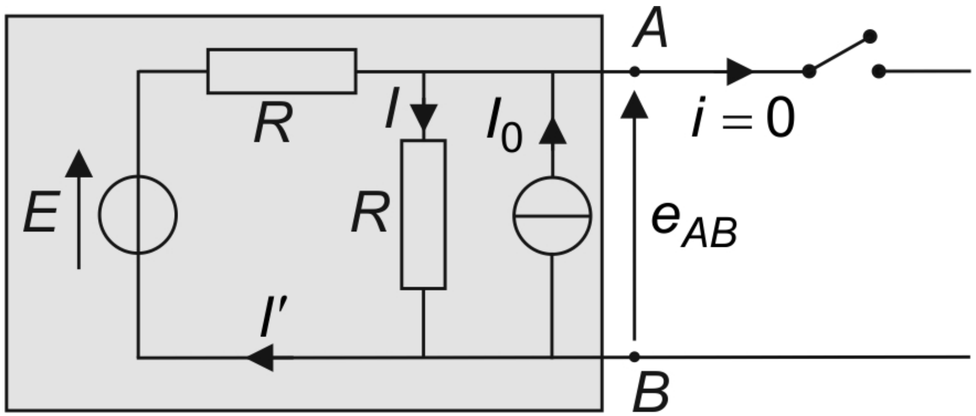
Tout dipôle linéaire *AB* se représente comme une source de Thévenin

- f.e.m : $e_{AB} = u_{AB}$ quand le dipôle *ne débite pas de courant* (circuit ouvert en *A* ou *B*)

Exemple :



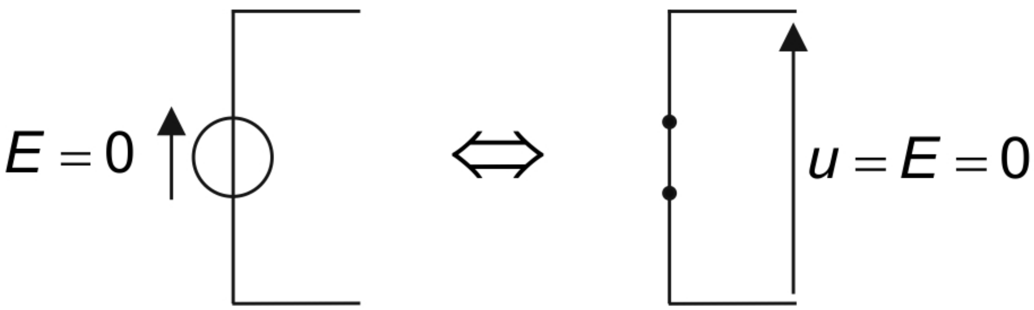
On ouvre en A :



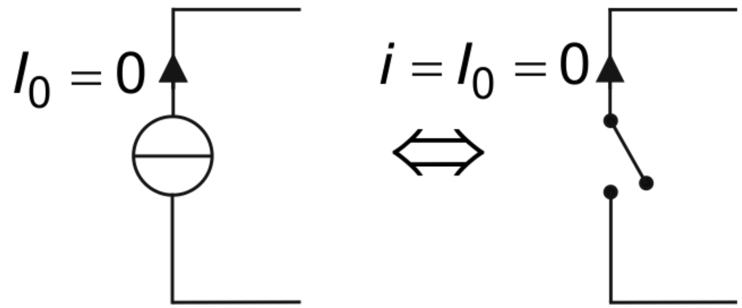
$$\begin{cases} e_{AB} = RI \Leftrightarrow I = \dfrac{e_{AB}}{R} \\ I' = I - I_0 = \dfrac{e_{AB}}{R} - I_0 \\ e_{AB} = E - RI' = E - e_{AB} + RI_0 \end{cases} \Rightarrow e_{AB} = \frac{E + RI_0}{2}$$

- résistance équivalente : $R_{\text{éq}} = R_{AB}$ si $e_{AB} = 0$

C'est la résistance entre *A* et *B* quand on éteint toutes les sources que contient *AB* :

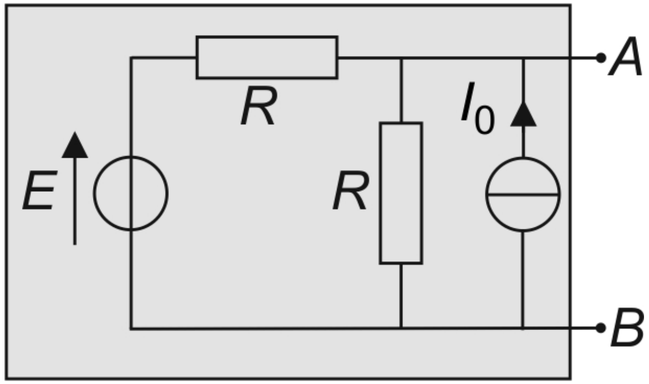


Une source de tension éteinte est équivalente à un interrupteur fermé.

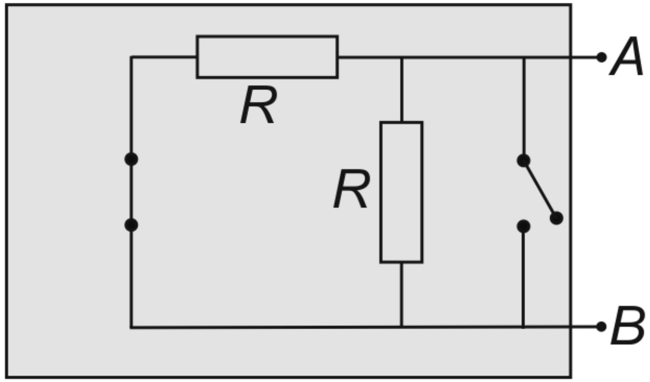


Une source de courant éteinte est équivalente à un interrupteur ouvert.

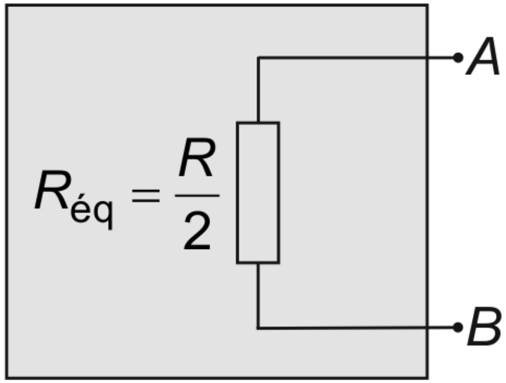
Exemple :



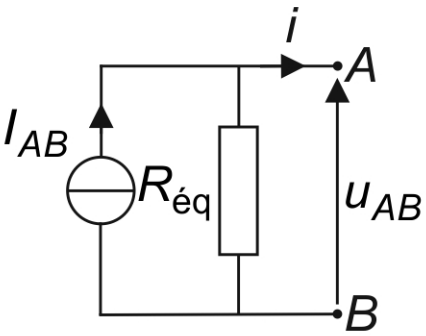
on éteint toutes les sources que contient AB :



$\Leftrightarrow$

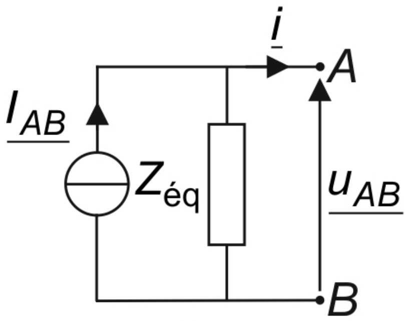


Source de courant réelle (source de Norton)



Régime stationnaire.

$$i = -\frac{u_{AB}}{R_{\text{éq}}} + I_{AB}$$



R.s.f.

$$\underline{i} = -\frac{\underline{u_{AB}}}{\underline{Z}_{\text{éq}}} + \underline{I_{AB}}$$

Équivalence des deux représentations

$$i = -\frac{u_{AB}}{R'_{\text{éq}}} + I_{AB} \Leftrightarrow u_{AB} = -R'_{\text{éq}} \cdot i + R'_{\text{éq}} \cdot I_{AB} \underset{\text{aussi}}{=} -R_{\text{éq}} i + e_{AB} \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} R'_{\text{éq}} = R_{\text{éq}} \\ e_{AB} = R_{\text{éq}} \cdot I_{AB} \end{cases}}$$

2.3 Loi des nœuds en termes de potentiel (théorème de Millman)

À partir du nœud N partent des branches « tension », ou de branches « courant ».

Loi des nœuds :

$$\sum_k \underline{i'_k} + \sum_\ell \varepsilon_\ell \underline{i_\ell} = 0$$

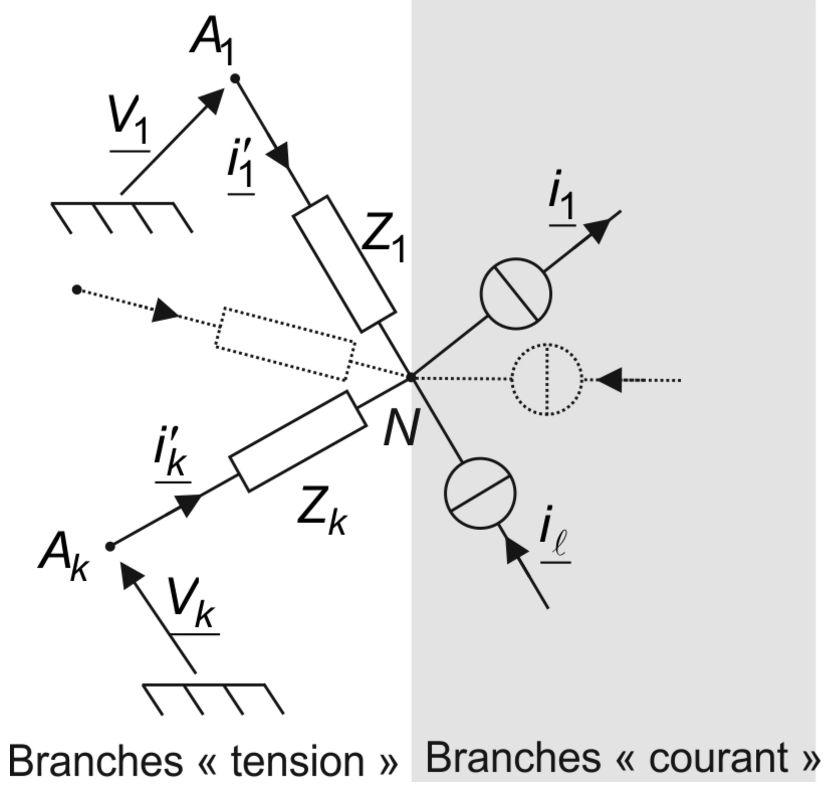
$\varepsilon_\ell = +1$

si le courant d'intensité i_ℓ se dirige vers N, et sinon

$\varepsilon_\ell = -1$

les courants des branches « tension » sont orientés vers N

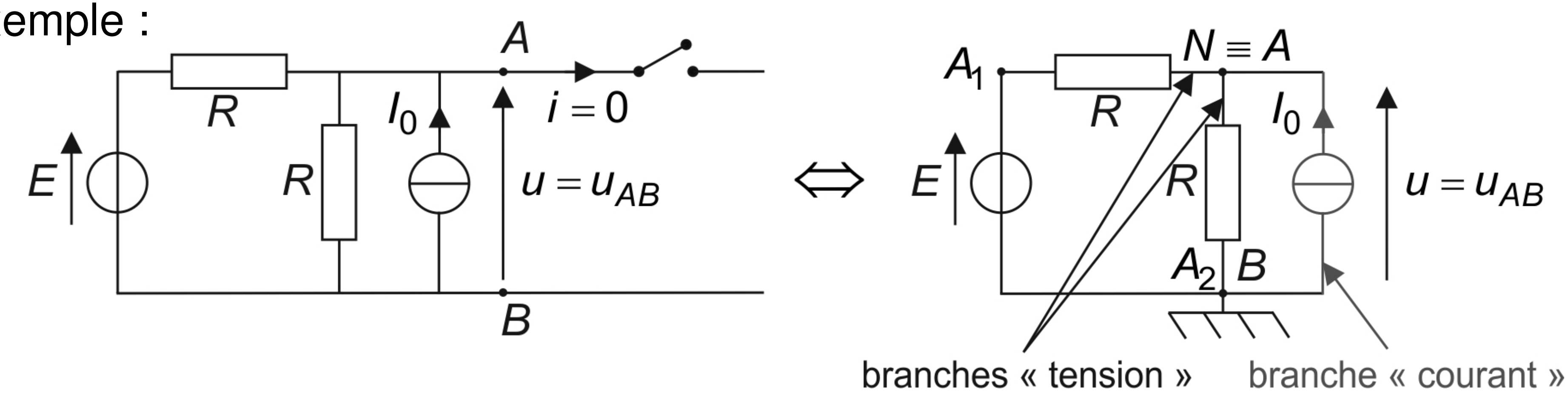
$$\underline{i'_k} = \frac{\underline{V_k} - \underline{V_N}}{\underline{Z_k}}$$



$$\Rightarrow \sum_k \frac{\underline{V_N}}{\underline{Z_k}} = \sum_k \frac{\underline{V_k}}{\underline{Z_k}} + \sum_\ell \varepsilon_\ell \underline{i_\ell}$$

$$\boxed{\underline{V_N} = \frac{\sum_k \frac{\underline{V_k}}{\underline{Z_k}} + \sum_\ell \varepsilon_\ell \underline{i_\ell}}{\sum_k \frac{1}{\underline{Z_k}}} = \frac{\sum_k \underline{Y_k}\,\underline{V_k} + \sum_\ell \varepsilon_\ell \underline{i_\ell}}{\sum_k \underline{Y_k}} \quad \text{avec l'admittance} \quad \underline{Y_k} = \frac{1}{\underline{Z_k}}}$$

Exemple :



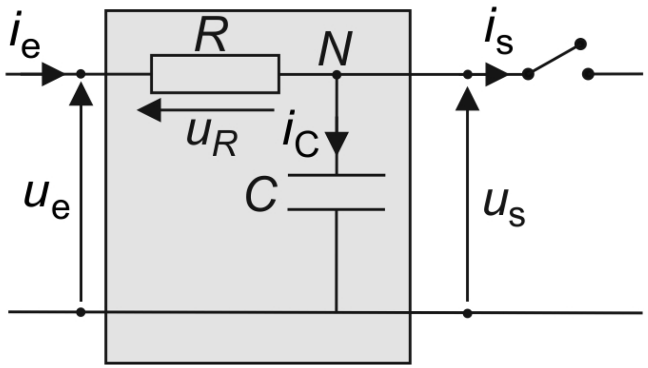
$$u = u_{AB} = e_{AB} = \frac{\frac{E}{R} + \frac{0}{R} + I_0}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{E + RI_0}{2}$$

3. CIRCUIT LINÉAIRE EN RÉGIME TRANSITOIRE

3.1 Obtention de l'équation différentielle reliant *s* et *e*

Première méthode : on écrit *toutes* les relations du circuit (loi des nœuds, loi des mailles, relations entre tension et intensité du courant pour chaque composant).

Exemple :



$u_e = u_R + u_s$ (maille)

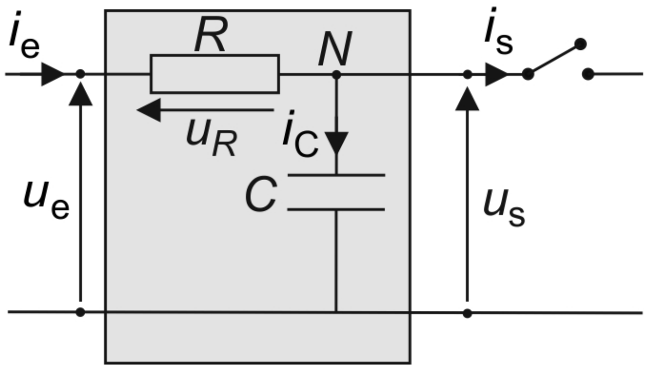
$i_e = i_C + i_s$ (noeud), avec $i_s = 0$

$u_R = Ri_e$ et $i_C = C\dfrac{du_s}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{u_e = RC\frac{du_s}{dt} + u_s}$$

Deuxième méthode : on utilise l'équivalence entre la fonction de transfert et l'équation différentielle cherchée. On se place donc en r.s.f, ce qui permet d'utiliser les théorèmes de Thévenin et de Millman, la structure de diviseur de tension.

Exemple :



se ramener à un rapport de polynômes en $j\omega$

1

diviseur de tension $\quad H(j\omega) = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \dfrac{\dfrac{1}{jC\omega}}{\dfrac{1}{jC\omega} + R} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$

$$\Rightarrow \underline{u}_s + RC(j\omega \underline{u}_s) = \underline{u}_e$$

2

faire le produit en croix

$$\Rightarrow \boxed{u_e = RC\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + u_s}$$

3

équivalence $\quad j\omega \underline{s} \leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

3.2 Conditions initiales et portrait de phase

Détermination des conditions initiales

sortie $s(t)$ régie par $\boxed{a_0 s + a_1 \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \ldots + a_n \dfrac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = f \quad (*)}$ avec $t \mapsto f(t)$ connue

solution : $\boxed{s = s_\mathrm{p} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k}$

une solution particulière de $(*)$

solution générale de l'équation homogène

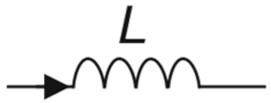
$$a_0 s + a_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \ldots + a_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = 0$$

qui se décompose sur une base de n fonctions réelles s_k

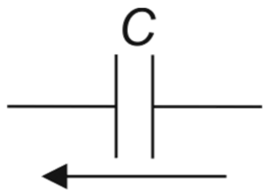
les n constantes λ_k sont déterminées grâce aux conditions initiale (C.I) :

$$s(0^+), \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+), \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}s}{\mathrm{d}t^{n-1}}(0^+)$$

Pour un circuit linéaire, on obtient les C.I en utilisant les continuités des intensités dans les bobines et des tensions aux bornes des condensateurs :



$i_L(0^+) = i_L(0^-)$



$u_C(0^+) = u_C(0^-)$

Il suffit alors d'écrire les équations du circuit à l'instant $t = 0^+$

Portrait de phase

Il permet de visualiser l'évolution d'un système régi par l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = \Phi\left(s, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}s}{\mathrm{d}t^{n-1}}, t\right)}$$

éventuellement non linéaire, selon les conditions initiales qu'on lui impose.

$$\left(s(0^+), \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+), \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}s}{\mathrm{d}t^{n-1}}(0^+)\right) \text{ connu } \Rightarrow \; s(t) \text{ connu } \forall t \Rightarrow \; \text{trajectoire connue}$$

dans l'espace des phases à n dimensions $\left(s, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}s}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$

Exemple : oscillateur harmonique ($n = 2$) $\qquad \dfrac{d^2 s}{dt^2} + {\omega_0}^2 s = 0$

$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{s}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

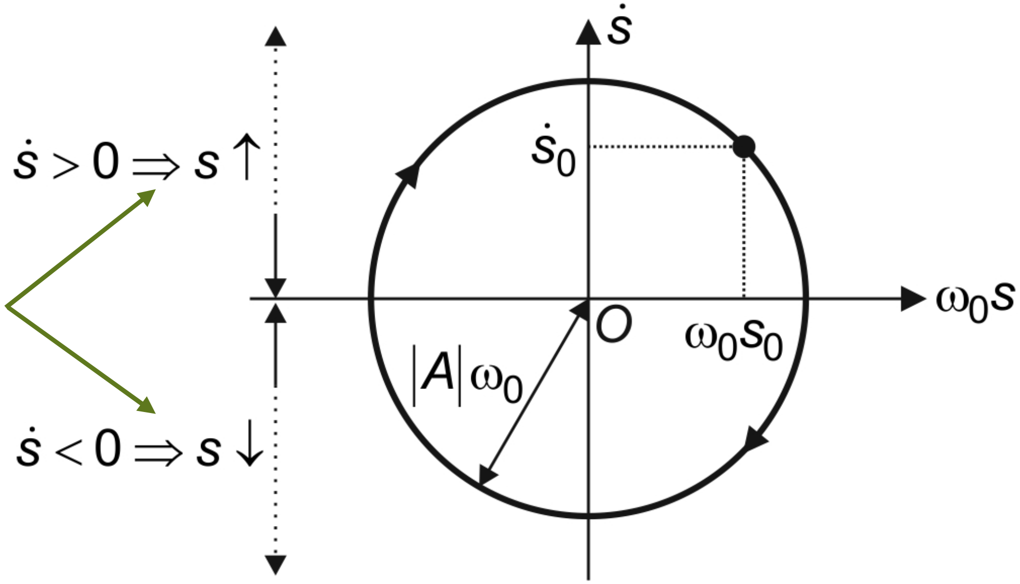
2 constantes d'intégrations obtenues grâce à $s(0^+)$ et $\dfrac{ds}{dt}(0^+)$

Dans l'espace des phases $\left(s, \dot{s} = \dfrac{ds}{dt}\right)$ on a, en éliminant t : $\dfrac{s^2}{A^2} + \dfrac{\dot{s}^2}{(A\omega_0)^2} = 1$

équation d'une ellipse de centre $(s = 0, \dot{s} = 0)$

Comme $(\omega_0 s)^2 + \dot{s}^2 = (A\omega_0)^2$, la trajectoire de phase est un cercle de centre O dans l'espace $(\omega_0 s, \dot{s})$

sens de parcours :



• trajectoire fermée $\Leftrightarrow$ mêmes conditions au bout d'un tour : oscillations périodiques

• deux trajectoires ne peuvent pas se couper à un instant t_0 fini (sinon deux évolutions différentes possibles avec mêmes conditions à t_0)

• deux trajectoires peuvent converger vers un même point (appelé attracteur) quand $t \rightarrow \infty$ (par exemple l'origine O pour l'oscillateur amorti)

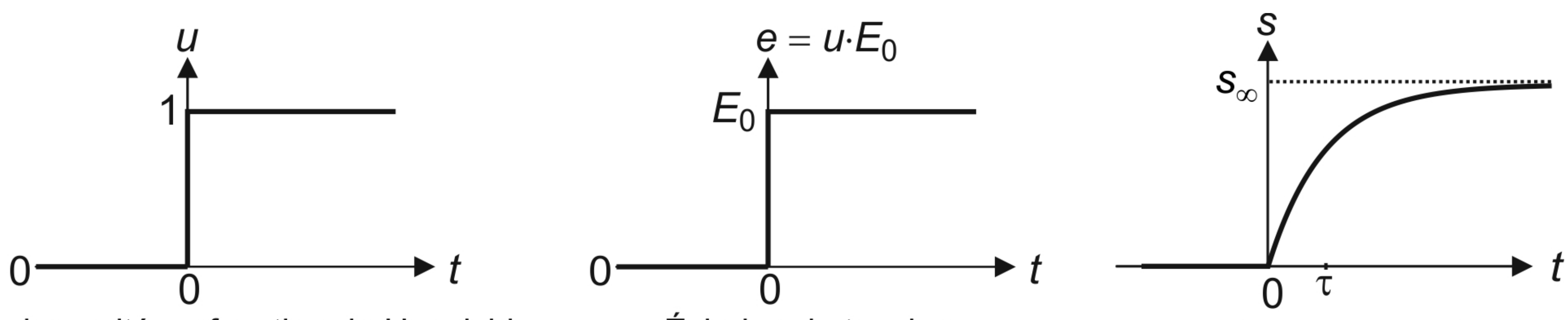
• ensemble de trajectoires pour différentes C.I : portrait de phase

3.3 Signaux appliqués

système au repos pour $t < 0$ (pour un circuit électrique, tous les signaux, courants et tensions, sont nuls)

On lui applique un signal d'entrée $e(t)$ non nul à partir de $t = 0$

Échelon



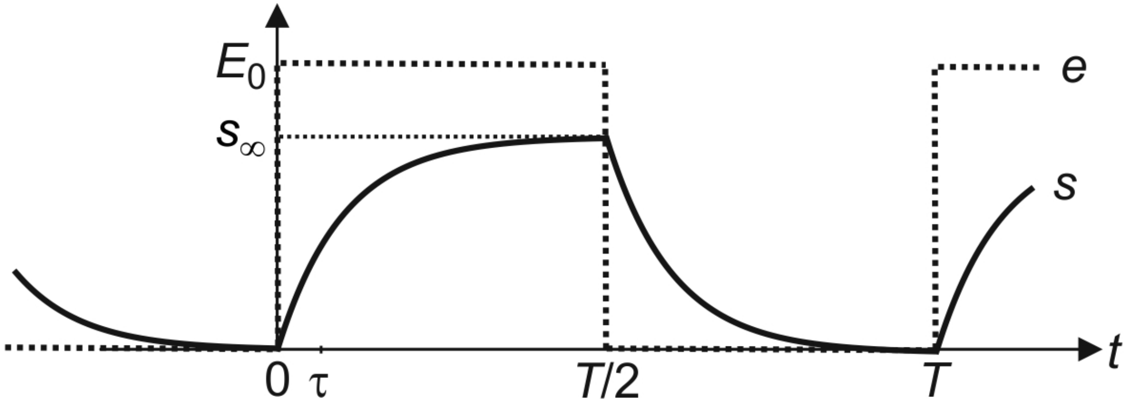
Échelon unité ou fonction de Heaviside. Échelon de tension. Réponse indicielle.

La réponse s est appelée *réponse indicielle*.

Pour un système stable : $s(t) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} s_\infty \Rightarrow s(t) \simeq s_\infty$ pour $t >> \tau$

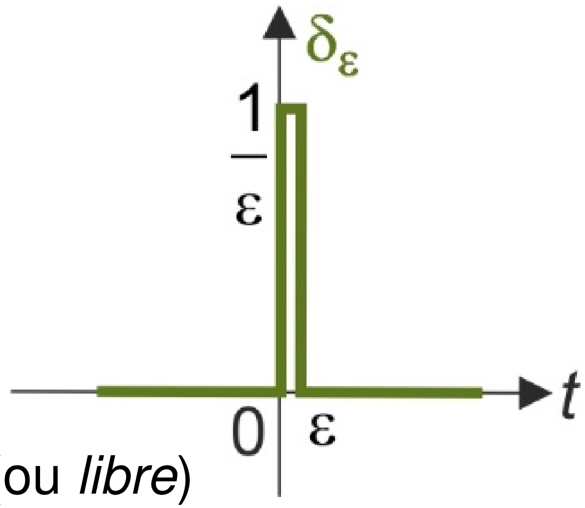
temps de réponse du système

En pratique, $e(t)$ en créneaux de période $T >> \tau$



Réponse à des créneaux de faible fréquence : on a $s(0^-) \simeq 0$
et la réponse entre $t = 0$ et $T/2$ est bien la réponse indicielle.

Impulsion $\delta(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$



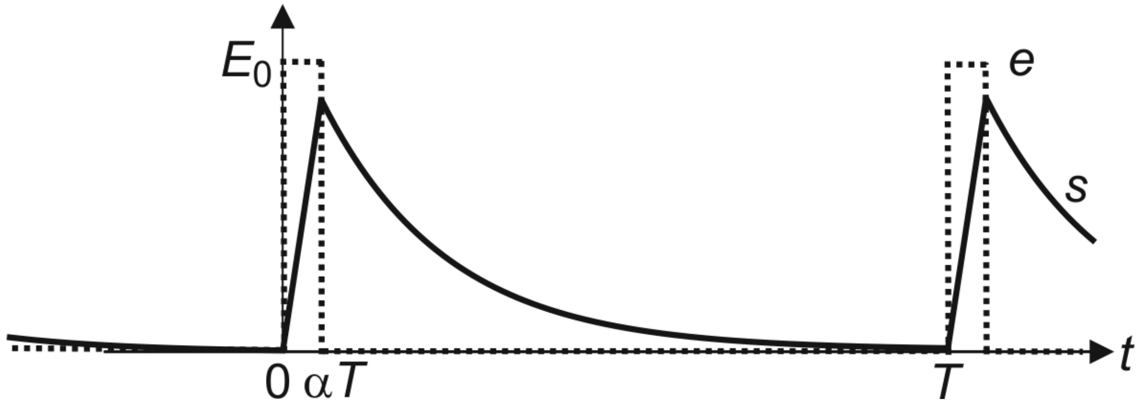
$$\Rightarrow \delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t \neq 0 \\ +\infty \text{ pour } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

La réponse s est appelée *réponse impulsionnelle* (ou *libre*)

En pratique, $e(t)$ obtenue avec la fonction « pulse » T-périodique d'un G.B.F, avec un faible rapport cyclique α :

$$\alpha T << \tau << T$$

temps de réponse du système



3.4 Temps de réponse / dépassement

Pour un système stable : $s(t) \underset{t \to \infty}{\to} s_\infty$

valeur initiale

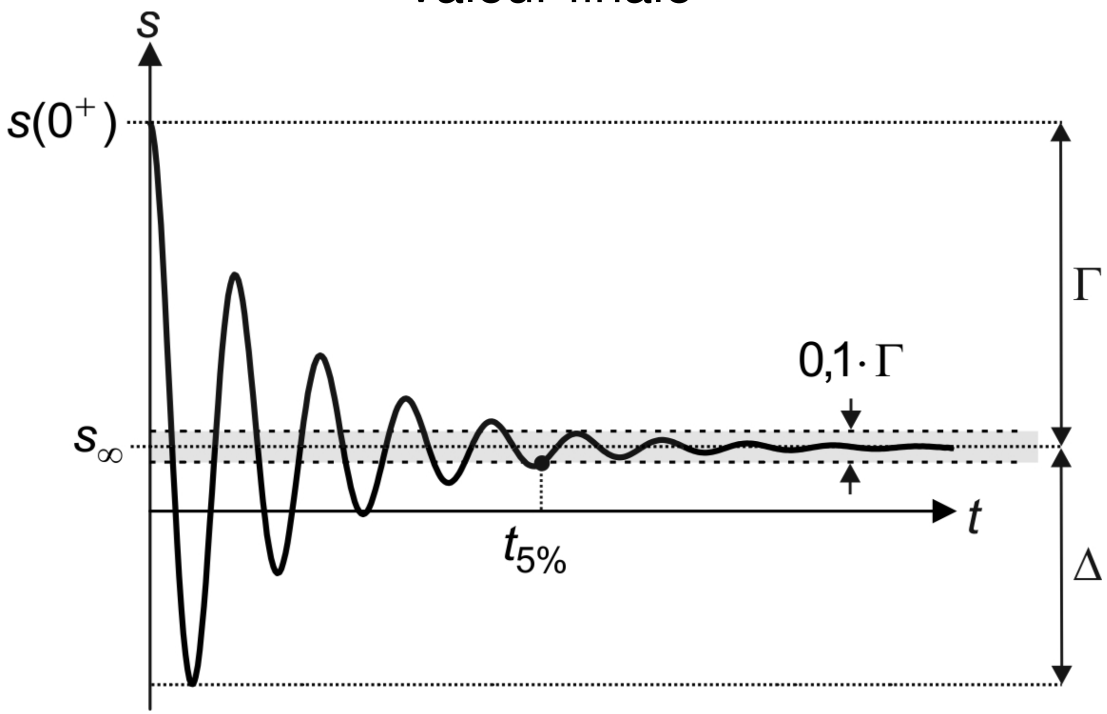
On suppose $s(0^+) \neq s_\infty$ et on pose $\Gamma = \left| s(0^+) - s_\infty \right|$

valeur finale

Temps de réponse à 5%

Il est défini par :

$$\begin{cases} \left| s(t_{5\%}) - s_\infty \right| = 0,05 \cdot \Gamma \\ \forall t > t_{5\%} \quad \left| s(t) - s_\infty \right| < 0,05 \cdot \Gamma \end{cases}$$



Dépassement

Si le signal ne reste pas entre la valeur initiale et la valeur finale, il y a dépassement.

La valeur absolue maximale des dépassements est notée Δ et on définit le dépassement en % par :

$$\boxed{D = \Delta / \Gamma}$$