

# DIFFÉRENTIELLES / FORMES DIFFÉRENTIELLES

## 1. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

### 1.1 Dérivées partielles

$(x, y) \mapsto f(x, y)$  de classe  $C^1$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$  dérivée de  $f$  par rapport à la variable  $x$ , l'autre variable  $y$  étant fixée

$\frac{\partial f}{\partial x}$  si pas d'ambiguïté mais attention !

$(T, V) \mapsto S(T, V)$

$(T, p) \mapsto S(T, p)$

entropie dans les deux cas, même notation (en physique) mais pas la même fonction !

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \neq \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

1

## 1.2 Théorème de Schwarz

si

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}$$

de classe  $C^1$ , on peut former :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\text{Schwarz : } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

## 2. DIFFÉRENTIELLES

### 2.1 Fonction d'une seule variable

développement de Taylor :  $f(x + \delta x) = f(x) + \delta x \cdot f'(x) + \frac{(\delta x)^2}{2!} \cdot f''(x) + O[(\delta x)^3]$

$$\frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x) + \frac{\delta x}{2!} \cdot f''(x) + O[(\delta x)^2]$$

on note  $dx$  un accroissement  $\delta x$  **infinitement petit**

$df = f(x + dx) - f(x)$  **différentielle** de  $f$  en  $x$

$$df = f'(x)dx$$

pas de  $(dx)^2$ ,  $(dx)^3$  dans  $df$  car :

$$Adx + B(dx)^2 = dx[A + Bdx] = dx \cdot \lim_{\delta x \rightarrow 0} [A + B\delta x] = Adx$$

un infiniment petit du premier ordre  $dx$  est infiniment plus grand qu'un infiniment petit du second ordre  $(dx)^2$ , qui n'intervient que si  $A = 0$

exemple :  $F(x) = \exp(2\sqrt{x}) = \exp[g(x)] = f[g(x)]$  avec  $g(x) = 2\sqrt{x}$

$$\Rightarrow dF = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} dx = \exp[g(x)] \cdot g'(x) \cdot dx = \frac{\exp(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

## 2.1 Fonction de plusieurs variables

$$f(x + \delta x, y + \delta y) = f(x, y) + \delta x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \delta y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2!} \left[ (\delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\delta x \cdot \delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (\delta y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]$$

à des termes d'ordre 3 près

$$df = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{différentielle de } f \text{ en } (x, y)$$

c'est la variation *infinitésimale* de  $f$  au voisinage de  $(x, y)$  quand  $x$  varie de  $dx$  et  $y$  de  $dy$

$$\text{exemple : } (x, y) \mapsto x^2 \ln(y) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 2x \ln(y) dx + \frac{x^2}{y} dy$$

remarque : différentielle logarithmique

$$pV^\gamma = Cte \Rightarrow \ln(pV^\gamma) = \ln(Cte) \Rightarrow \ln p + \gamma \ln V = \ln(Cte) \quad \text{à entropie } S \text{ constante}$$

$$\text{on différencie : } \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_S (p_0, V_0) = -\gamma \frac{p_0}{V_0}$$

## 2.2 Intégration

exemple d'une fonction de deux variables :

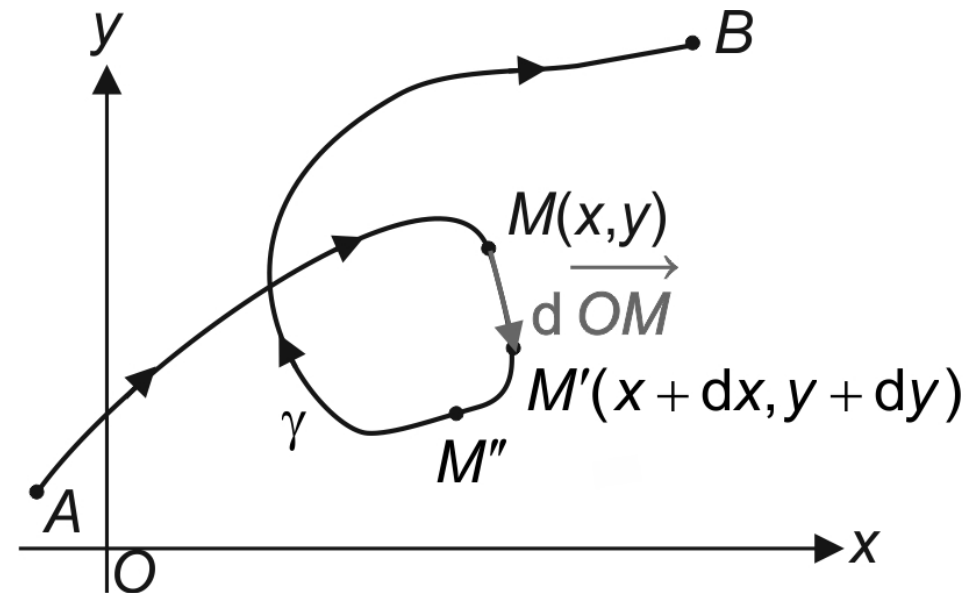
$\int_{A(x_A, y_A)}^{B(x_B, y_B)} df$  est la somme, le long d'un chemin

$\gamma$  menant de  $A$  à  $B$ , des différences :

$$df = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$$

entre des points  $M(x, y)$  et  $M'(x + dx, y + dy)$  infiniment proche de  $M$

comme  $[f(M'') - f(M')] - [f(M') - f(M)] = f(M'') - f(M)$



$$\int_A^B df = f(B) - f(A) \text{ est indépendant du chemin } \gamma \text{ suivi}$$

## 3. FORMES DIFFÉRENTIELLES

### 3.1 Définition

Pour un système décrit par deux variables  $x$  et  $y$ , une **forme différentielle** s'écrit :  $\delta W = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

exemple : champ de force  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{e}_x + Q(x, y)\vec{e}_y$

une particule se déplaçant de  $\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{MM'} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$

reçoit un travail élémentaire  $\delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dOM} = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  entre  $t$  et  $t + dt$

Une forme différentielle est donc définie pour une *transformation infinitésimale* correspondant à une variation  $dx$  de  $x$  et  $dy$  de  $y$  au voisinage de  $(x, y)$

si on somme les formes différentielles le long d'un chemin  $\gamma$  :

$$W_{A \rightarrow B}^\gamma = \int_A^B \delta W \quad \text{dépend } a \text{ priori du chemin } \gamma \text{ suivi entre } A \text{ et } B$$

## 3.2 Théorème de Poincaré

$W_{A \rightarrow B}^\gamma$  ne dépend que de  $A$  et  $B$ , et donc pas de  $\gamma$

$$\Leftrightarrow \exists f : (x, y) \mapsto f(x, y) / W_{A \rightarrow B}^\gamma = f(B) - f(A) \Leftrightarrow \delta W = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = df$$

$$\Leftrightarrow \exists f / \delta W = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\Leftrightarrow \exists f / \begin{cases} P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \\ Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\boxed{\exists f : (x, y) \mapsto f(x, y) / \delta W = df \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

**théorème de Poincaré**

exemple 1 :  $\delta W = ydx$  n'est pas une différentielle car :  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

$\Rightarrow W_{A \rightarrow B}^\gamma$  dépend de  $\gamma$

exemple 2 :  $\delta W = 2x \sin(y) dx + [x^2 \cos(y) - 1] dy$  peut être une différentielle car

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cos(y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\delta W = df \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin(y) & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(y) - 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow f(x, y) = x^2 \sin(y) + \varphi(y)$$

**Attention ! On a intégré à  $y$  constant, donc  $\varphi$  n'est pas une constante, mais n'importe quelle fonction ne dépendant que de  $y$**

$$f(x, y) = x^2 \sin(y) + \varphi(y) \text{ dans (2)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(y) + \frac{d\varphi}{dy} = x^2 \cos(y) - 1 \Rightarrow \varphi(y) = -y + Cte$$

$$\text{finalement } \delta W = df \text{ avec } f(x, y) = x^2 \sin(y) - y + Cte$$

notations :

| transformation<br>élémentaire       | $\delta W$<br>forme différentielle                 | $df$<br>différentielle                 |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------|
| transformation finie<br>(intégrale) | $W_{A \rightarrow B}^{\gamma} = \int_A^B \delta W$ | $\Delta f = \int_A^B df = f(B) - f(A)$ |

## 4. APPLICATIONS

### 4.1 Fonctions implicites

soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  liées par  $f(x,y,z) = 0$  (\*), par exemple  $f(x,y,z) = yx^3 + z\ln(x) + 1 = 0$

$\Rightarrow (y,z) \overset{x}{\mapsto} x(y,z)$  fonction *implicite*

en différenciant (\*) :  $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz = 0$

car  $f$  est une constante

si on maintient  $z$  constant ( $dz = 0$ ), on a  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} dy = 0$  à  $z = Cte$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}} \quad \text{et de même :} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}} \Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}$$

$$\text{et} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

**on obtient ainsi des relations entre les dérivées partielles**

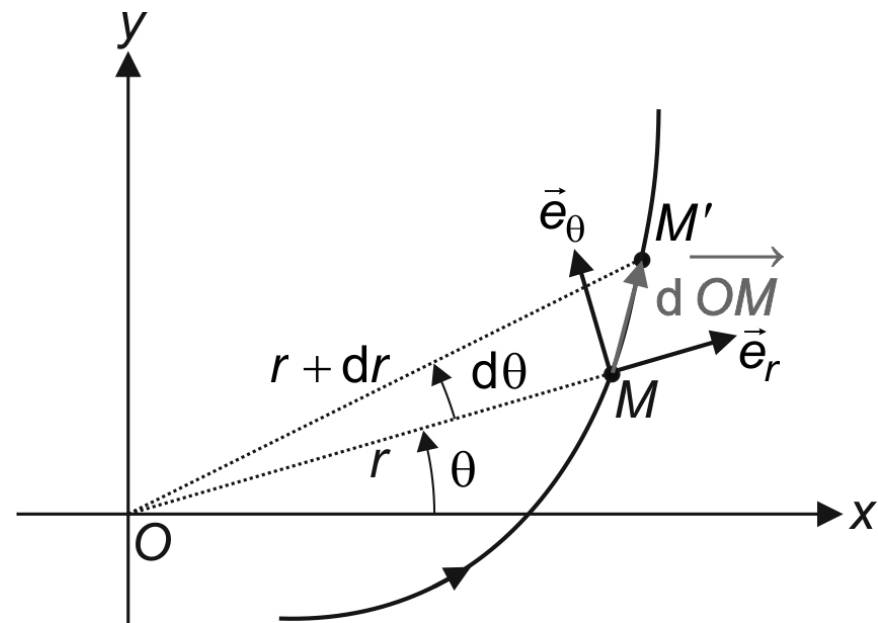
## 4.2 Calculs intégraux

(i) courbe d'équation polaire  $r(\theta)$

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

$$\text{car } \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta$$



$$\text{longueur élémentaire } dL = \|d\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2} = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

(en prenant  $d\theta > 0$ )

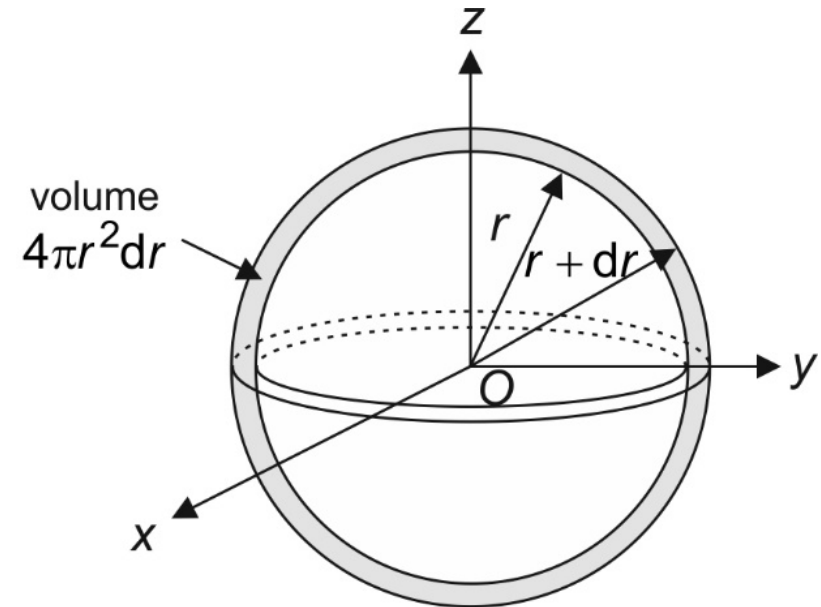
$$\text{longueur entre } \theta_{\min} \text{ et } \theta_{\max} : L = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \|d\overrightarrow{OM}\| = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

(ii) charge d'une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$

si la charge volumique  $\rho$  ne dépend que de  $r$  (symétrie sphérique), on peut découper la sphère en volumes élémentaires compris entre deux sphères de rayons  $r$  et  $r + dr$  (coquille sphérique)

$$d\mathcal{V} = \mathcal{V}(r + dr) - \mathcal{V}(r) \text{ avec } \mathcal{V}(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr \text{ et } Q = \int_{r=0}^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$$



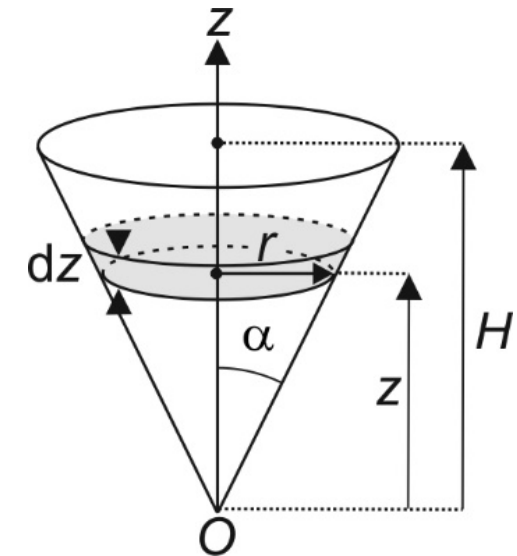
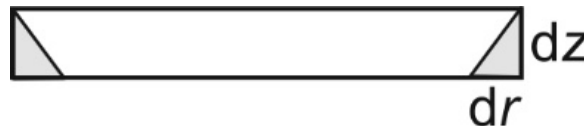
si  $\delta r$  petit accroissement fini , on aurait :

$$\delta\mathcal{V} = \mathcal{V}(r + \delta r) - \mathcal{V}(r) = \frac{4}{3}\pi \left[ (r + \delta r)^3 - r^3 \right] = \frac{4}{3}\pi \left[ 3r^2\delta r + 3r(\delta r)^2 + (\delta r)^3 \right] \neq 4\pi r^2\delta r$$

(iii) volume d'un cône

$d\mathcal{V} = \pi r^2 dz$  volume d'une tranche entre  $z$  et  $z + dz$

(rigoureux car l'écart entre le volume d'une hauteur  $dz$  de cylindre et de cône est du second ordre):



$$\Rightarrow \mathcal{V} = \int_{z=0}^H \pi r^2 dz = \int_{z=0}^H \pi \tan^2 \alpha \cdot z^2 dz = \frac{1}{3} \pi \tan^2 \alpha \cdot H^3$$

(iv) énergie reçue par un conducteur ohmique

puissance moyenne reçue à  $t$ :  $P = \frac{W}{\Delta t}$

travail reçu entre  $t$  et  $t + \Delta t$

puissance instantanée reçue:  $p(t) = Ri^2(t) = \frac{\delta W}{dt}$

travail (élémentaire) reçu entre  $t$  et  $t + dt$

attention :  $\delta W$  est une forme différentielle et pas une différentielle

$\Rightarrow p(t) = \frac{\delta W}{dt}$  n'est **pas** une dérivée ( $W(t)$  n'a pas de sens)

travail reçu entre  $t_1$  et  $t_2$  (fini) :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)dt$$