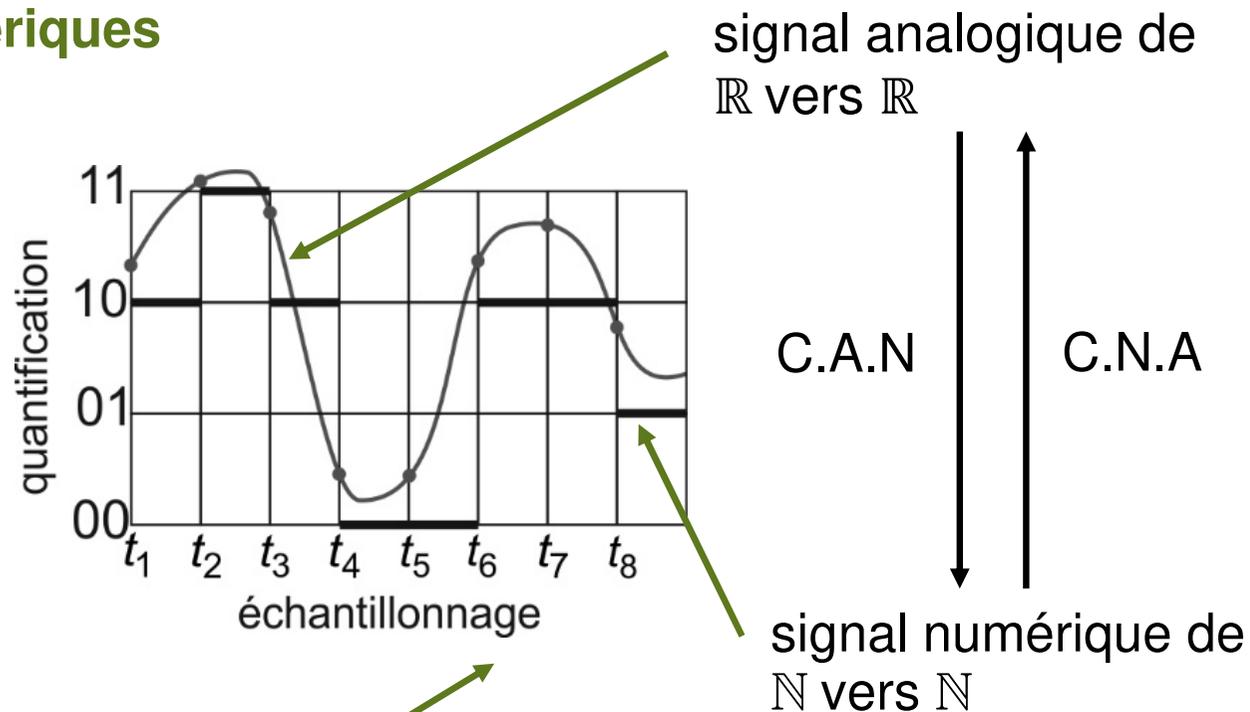


# ÉLECTRONIQUE NUMÉRIQUE

## 1. PRINCIPE DE LA NUMÉRISATION

### 1.1 Signaux analogiques / numériques

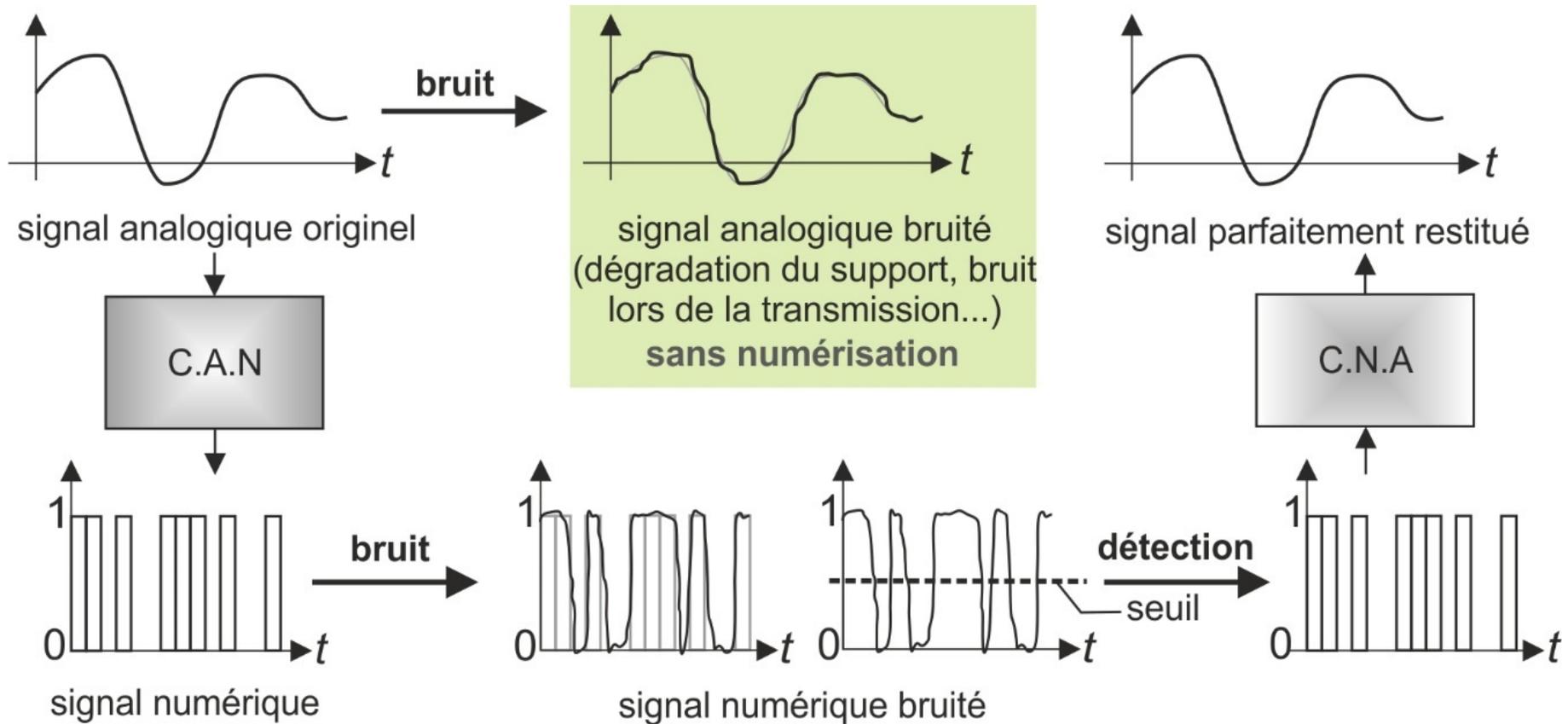
2. La *quantification* fait correspondre à chacun des échantillons une valeur approchée, codée sur un nombre fini de bits



1. L'*échantillonnage* permet de prélever un ensemble de valeurs  $\in \mathbb{R}$  prises à des instants discrets  $\{t_k\}$  avec  $k \in \mathbb{N}$

## 1.2 Intérêt de la numérisation

### Robustesse par rapport au bruit



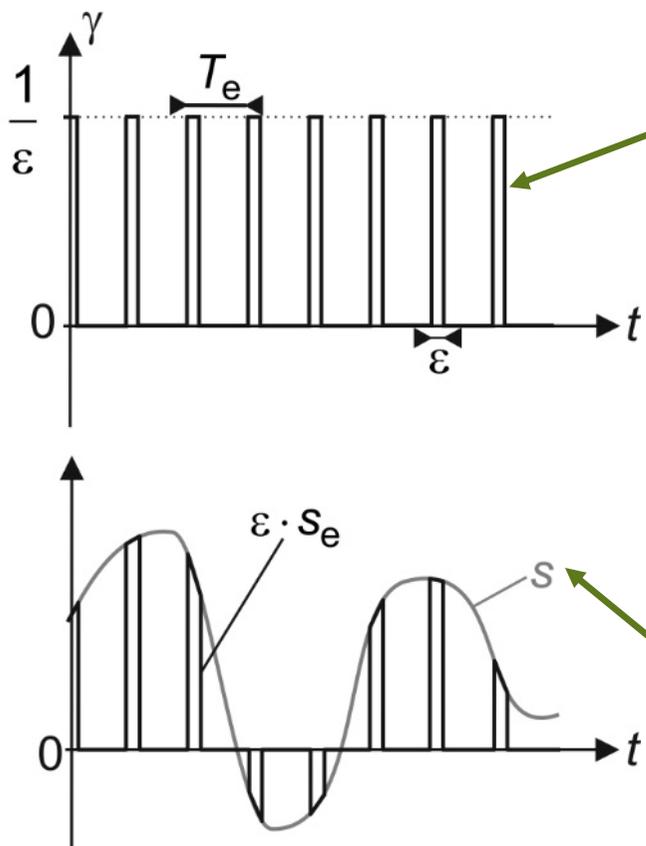
## Traitement du signal

traitement **analogique** (par exemple : filtrage) : avec circuits électroniques, en général de 5 à 10% d'incertitude sur les résistances, capacités... donc sur la fréquence de coupure

traitement **numérique** : avec *calculateur*, plus grande reproductibilité, fonctionnalité évolutive en changeant les algorithmes sans modifier la carte électronique.

## 2. ÉCHANTILLONNAGE

### 2.1 Périodisation du spectre



peigne de Dirac  $\gamma$ , fonction paire  
 $T_e$  périodique, avec  $\epsilon \rightarrow 0$

**$f_e = 1/T_e$  fréquence d'échantillonnage**

$$\gamma(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cos\left[\frac{2n\pi}{T_e} t\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cos(2n\pi f_e t)$$

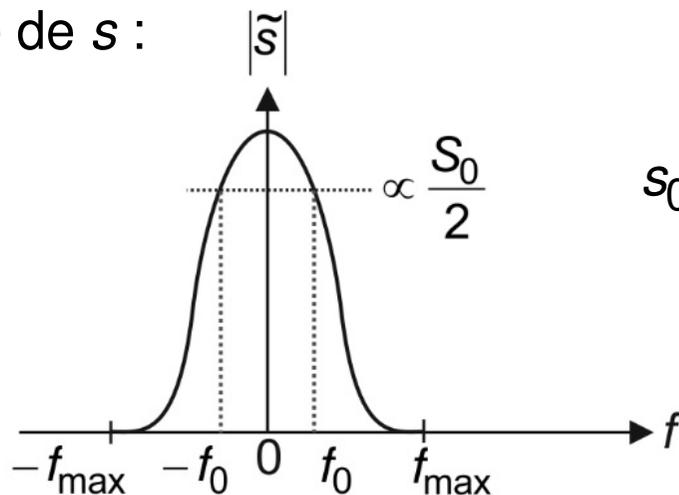
calcul :  $C_n = f_e \text{sinc}(n\pi f_e \epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f_e$

sinus cardinal  $\text{sinc}(X) = \sin X / X$  pour  $X \neq 0$   
 $\text{sinc}(0) = 1$

signal analogique  $s$

signal échantillonné  $s_e = \gamma \cdot s$  : ne contient que les valeurs du signal à  $t = 0, T_e, 2T_e, \dots$

spectre de  $s$  :



$$\begin{aligned}
 s_0(t) &= S_0 \cos(2\pi f_0 t + \psi_0) \\
 &= \frac{S_0}{2} \cos(-2\pi f_0 t - \psi_0) + \frac{S_0}{2} \cos(2\pi f_0 t + \psi_0)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  la composante **sinusoïdale** de  $s$  de fréquence  $f_0$  est constituée de **2 raies** de fréquences  $\pm f_0$

$$\Rightarrow s_e(t) = \gamma(t) \cdot s_0(t) = f_e S_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_0 t + \psi_0) \cos(2\pi n f_e t)$$

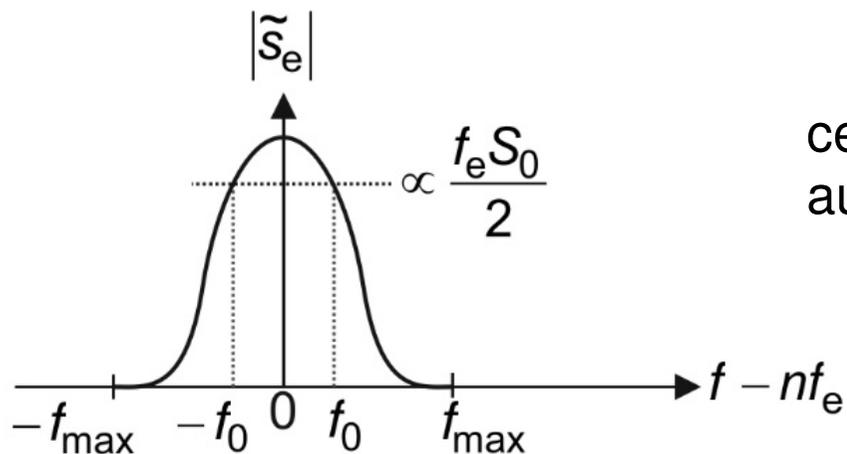
$$s_e(t) = \frac{f_e S_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \cos[2\pi(n f_e - f_0)t - \psi_0] + \cos[2\pi(n f_e + f_0)t + \psi_0] \}$$

$$s_{e,n=0}(t) = \frac{f_e S_0}{2} \cos[-2\pi f_0 t - \psi_0] + \frac{f_e S_0}{2} \cos[2\pi f_0 t + \psi_0]$$

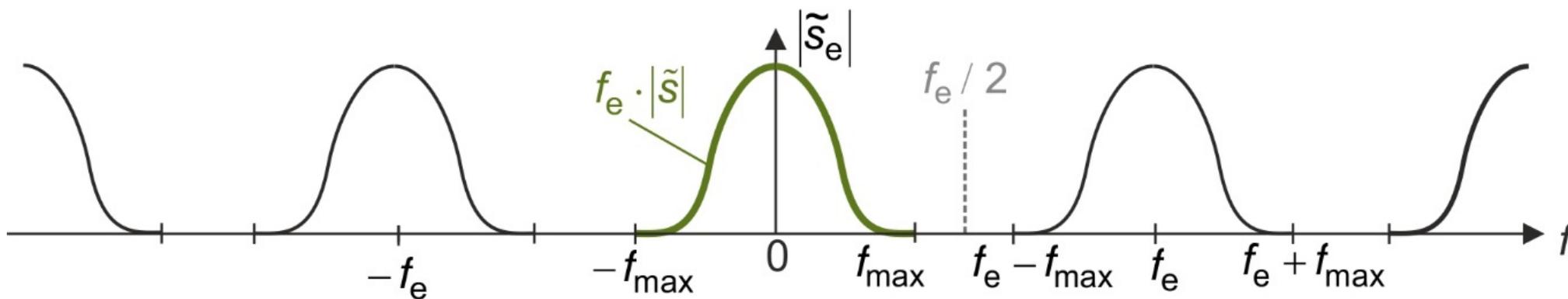
: on retrouve dans le spectre de  $s_e$  celui de  $s$  au facteur multiplicatif  $f_e$  près

Il faut cependant ajouter à ce spectre les termes :

$$s_{e,n}(t) = \frac{f_e S_0}{2} \cos[2\pi(nf_e - f_0)t - \psi_0] + \frac{f_e S_0}{2} \cos[2\pi(nf_e + f_0)t - \psi_0] \quad \forall n \neq 0$$



ces termes correspondent au spectre de  $s$ , au facteur multiplicatif  $f_e$  près, translaté de  $nf_e$

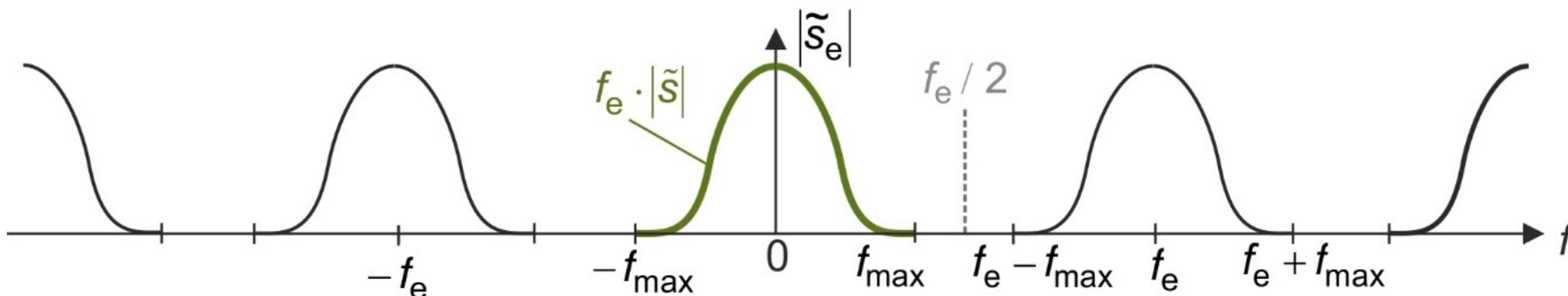


Le spectre de  $s_e$  est périodique, de période  $f_e$

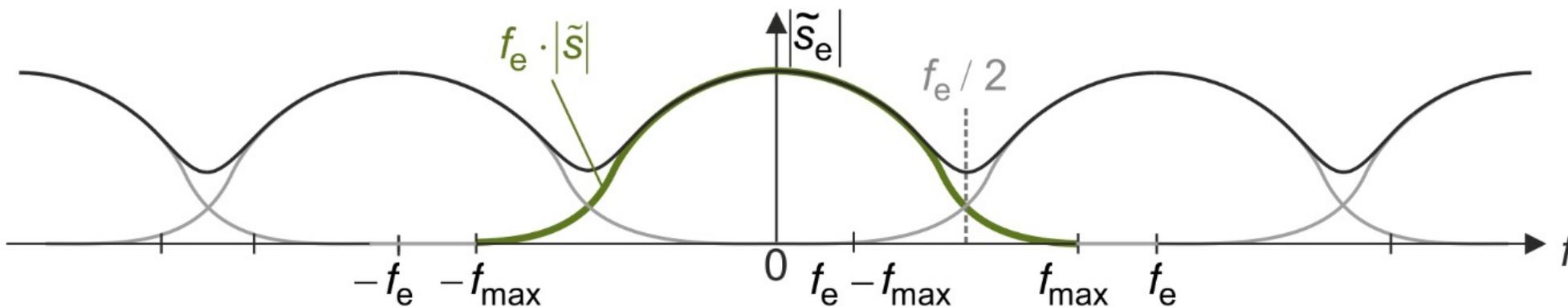
## 2.2 Théorème de Shannon

Si le spectre de  $s$  est borné à une fréquence maximale  $f_{\max}$ , on a deux cas :

- $f_e - f_{\max} > f_{\max}$  les parties  $s_{e,n}$  du spectre de  $s_e$  ne se chevauchent pas  
 $\Leftrightarrow f_e > 2 f_{\max}$

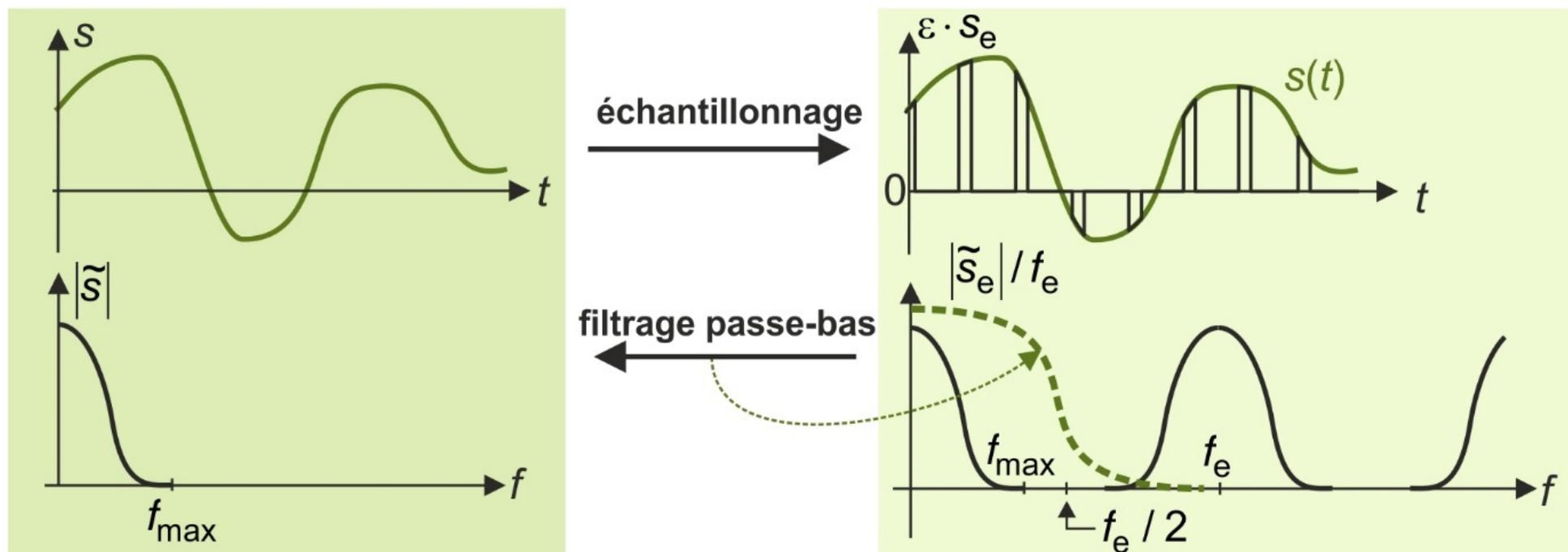


- $f_e - f_{\max} < f_{\max}$  les parties  $s_{e,n}$  du spectre de  $s_e$  se chevauchent, on ne retrouve plus le spectre de  $s$  entre  $-f_{\max}$  et  $f_{\max}$ .



**Théorème de Shannon** : pour un échantillonnage sans perte d'information, la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure ou égale à deux fois la fréquence maximale du signal :  $f_e \geq 2 f_{\max}$  , soit  $f_{\max} \leq f_N$  où  $f_N = f_e / 2$  est la **fréquence de Nyquist**.

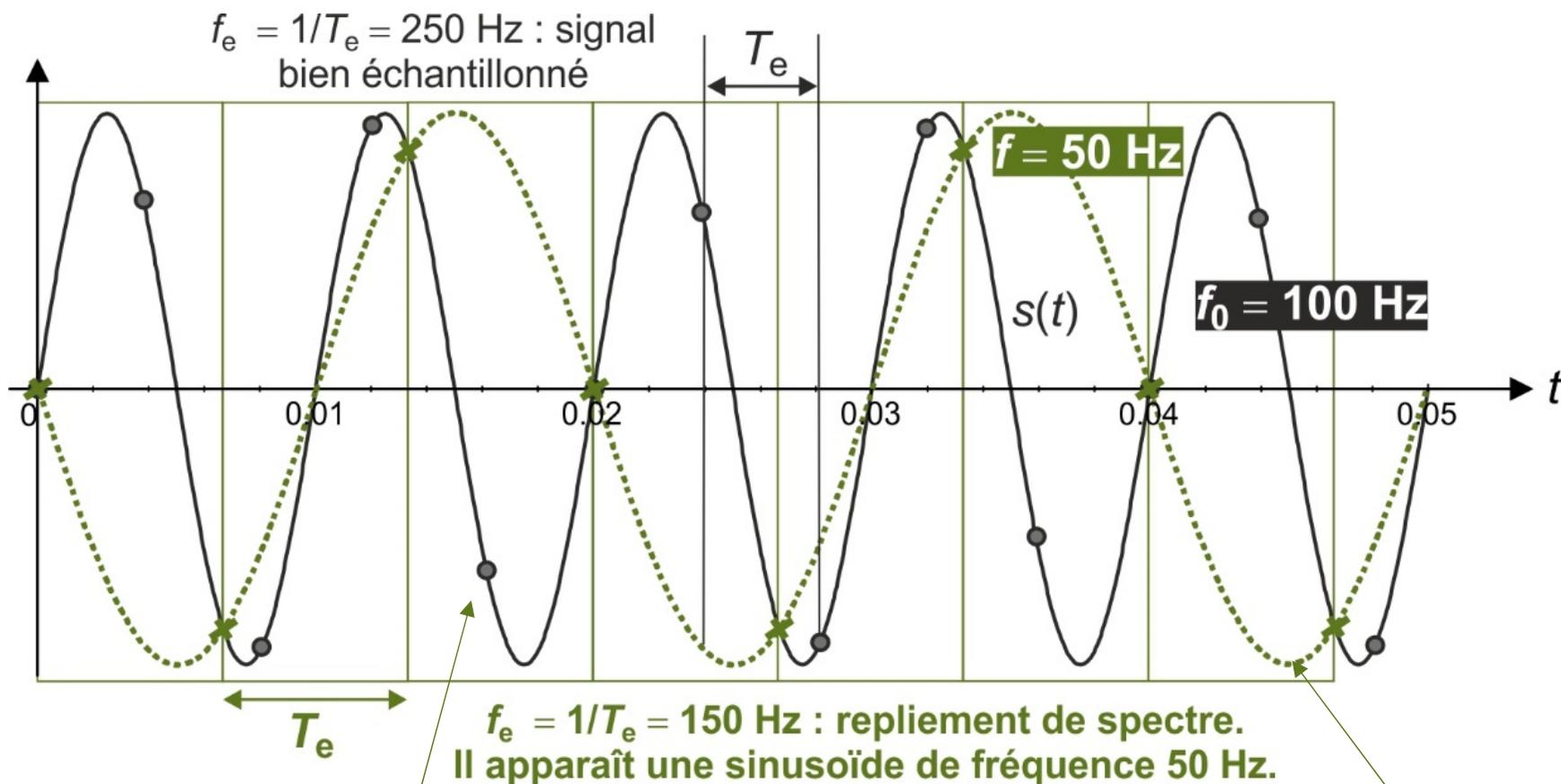
On peut alors retrouver le signal d'origine  $s$  par filtrage passe-bas.



## 2.3 Repliement de spectre

Si le spectre du signal a une amplitude non négligeable pour des fréquences supérieure à  $f_N$ , des composantes *fictives* apparaissent dans le spectre du signal échantillonné

Exemple : signal sinusoïdal  $s$  de fréquence  $f_0 = 100$  Hz

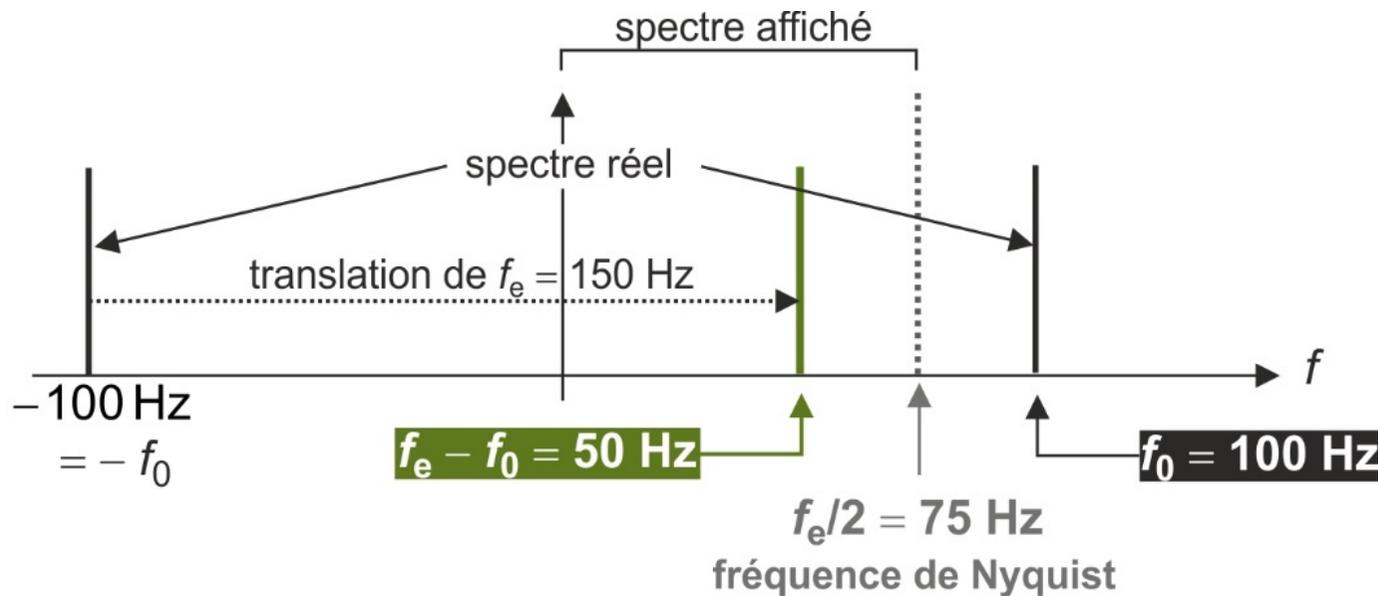


$f_e = 250$  Hz  $>$   $2f_0 = 200$  Hz  
plus d'un échantillon par demi-période

9

$f_e = 150$  Hz  $<$   $2f_0 = 200$  Hz  
moins d'un échantillon par demi-période

Ceci s'explique avec le spectre du signal échantillonné qui est  $f_e$  périodique

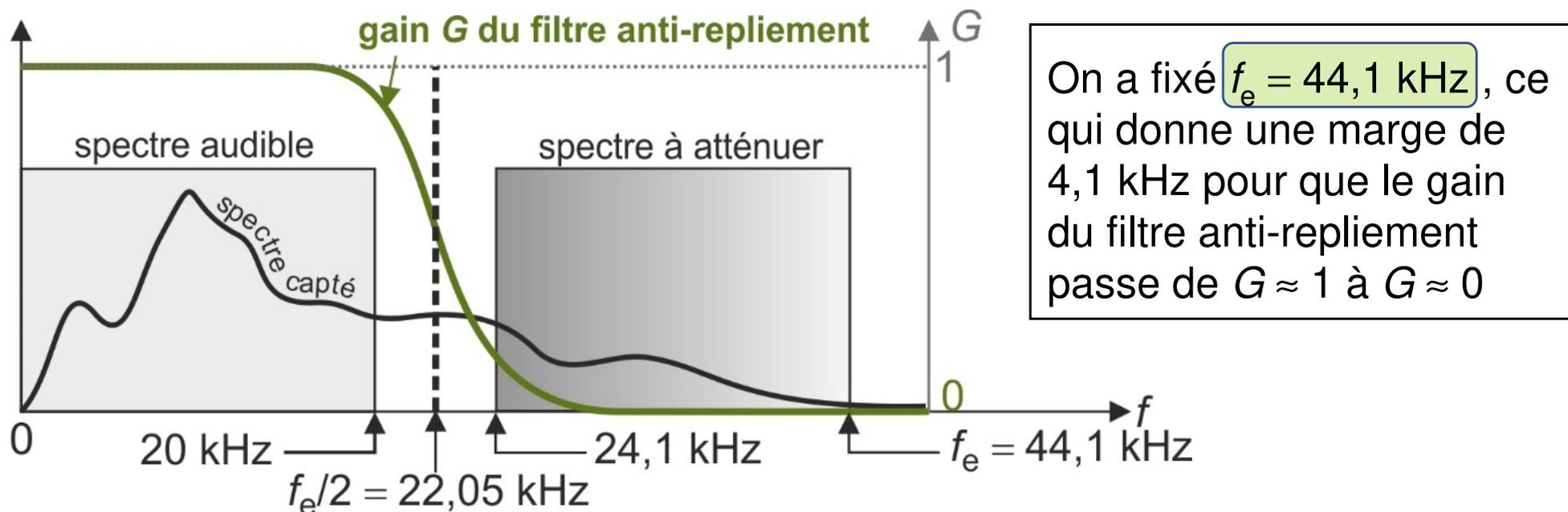


comme  $\frac{(f_e - f_0) + f_0}{2} = \frac{f_e}{2}$ , la raie fictive et la raie réelle sont symétriques par rapport à la fréquence de Nyquist  $f_N = f_e / 2$  : **REPLIEMENT DE SPECTRE**

## 2.4 Filtre anti-repliement

En réalité, pas de fréquence maximale dans le spectre d'un signal  $\Rightarrow$  repliement

Exemple : échantillonnage d'un signal sonore (spectre audible :  $20 \text{ Hz} < f < 20 \text{ kHz}$ ), or un microphone capte des fréquences non audibles (supérieures à  $20 \text{ kHz}$ ).



après échantillonnage à  $f_e$ , une partie du spectre capté se replie par rapport à la fréquence de Nyquist  $f_e / 2$  dans le domaine audible et pollue le signal audio

pour éviter ce phénomène : **filtre anti-repliement passe-bas** (analogique car AVANT la numérisation du signal).

## 3. QUANTIFICATION

### 3.1 Codage binaire

Le signal échantillonné est encore analogique ! (chaque échantillon peut encore prendre une infinité de valeurs dans un intervalle donné, on ne peut pas le stocker ou de le traiter.

On discrétise alors ces valeurs et l'on les code en binaire : **quantification** du signal.

un C.A.N quantifie sur  $N$  bits : le nombre d'états possibles en sortie est  $2^N$

il renvoie des entiers codés en binaire :  $\underbrace{(000\dots00)}_0$  ,  $\underbrace{(000\dots01)}_1$  , ... ,  $\underbrace{(111\dots11)}_{2^N-1}$

Quantification *uniforme* de tensions analogiques  $v_a$  comprises entre 0 V et  $V_{PE}$  (valeur « pleine échelle ») : on compare  $v_a$  à  $v_k = k \cdot q$ , avec  $q \in \llbracket 1, 2^N - 1 \rrbracket$

$q = v_{PE} / 2^N$  est le **quantum** de tension

Exemple :  $N = 2 \Rightarrow q = \frac{V_{PE}}{4}$

- si  $0 \leq v_a < \frac{V_{PE}}{4} : v_s = 0$

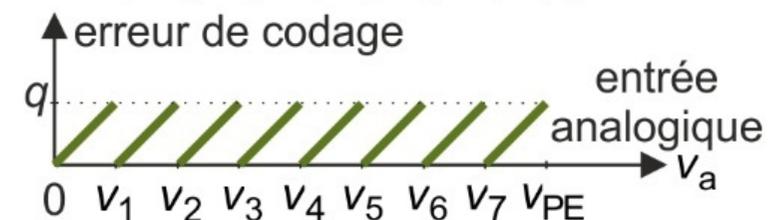
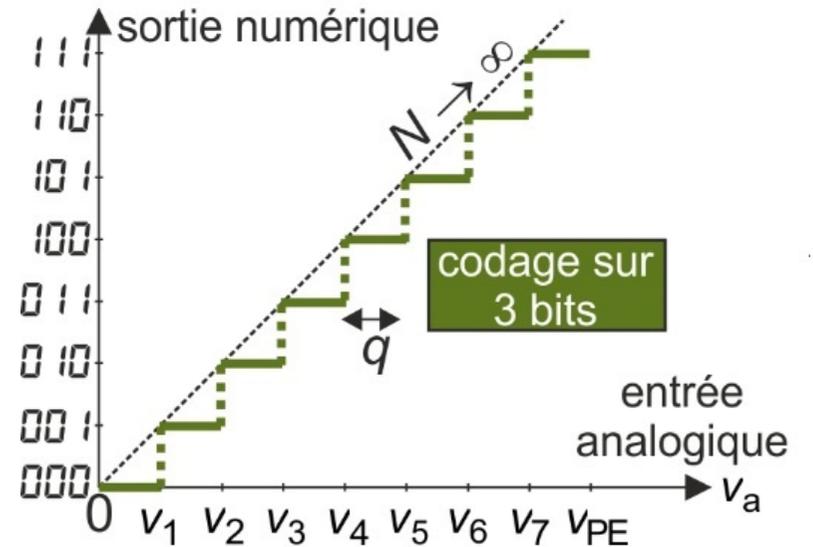
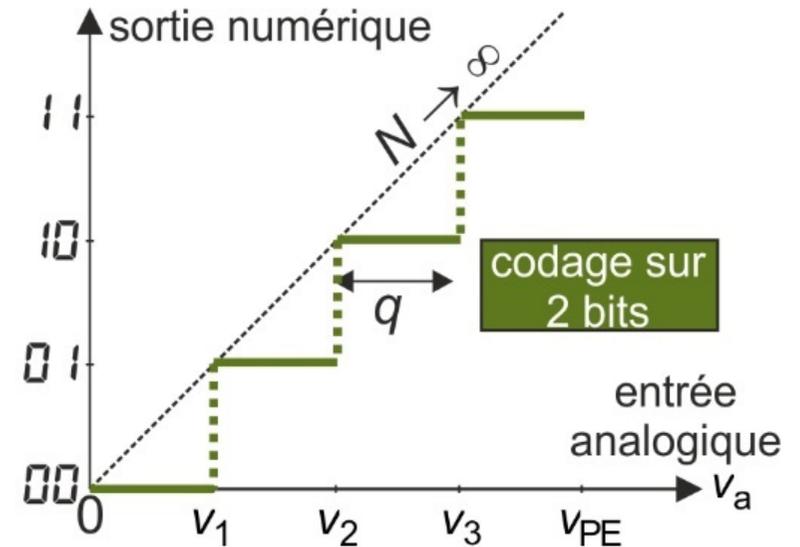
( $v_s$  valeur analogique de la sortie)

- si  $\frac{V_{PE}}{4} \leq v_a < 2 \times \frac{V_{PE}}{4} : v_s = \frac{V_{PE}}{4}$

- si  $2 \times \frac{V_{PE}}{4} \leq v_a < 3 \times \frac{V_{PE}}{4} : v_s = 2 \times \frac{V_{PE}}{4}$

- si  $3 \times \frac{V_{PE}}{4} \leq v_a < 4 \times \frac{V_{PE}}{4} : v_s = 3 \times \frac{V_{PE}}{4}$

c'est une quantification linéaire *par défaut*



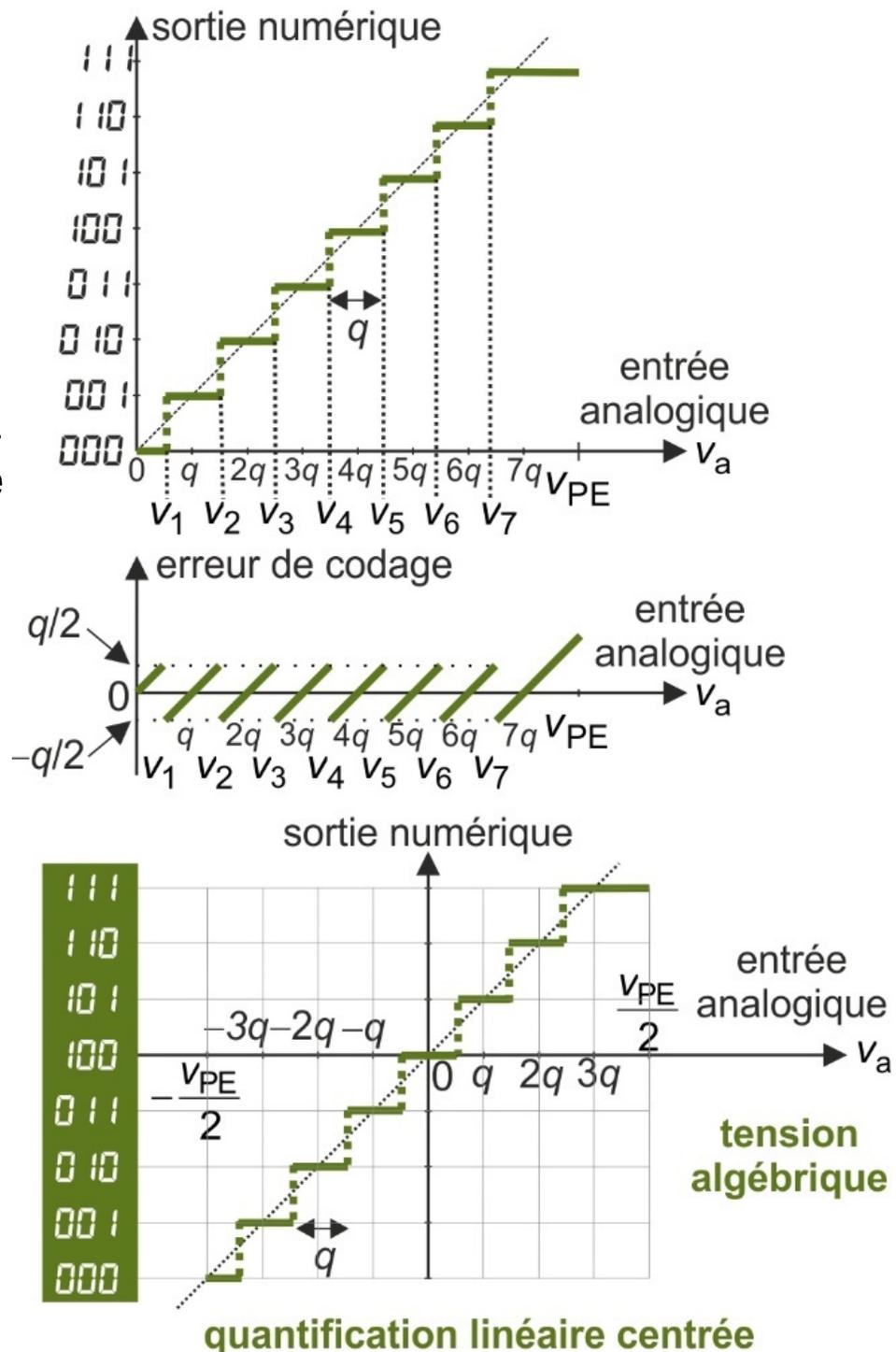
**quantification linéaire par défaut**

### 3.2 Erreur de codage

Quantification sur  $N$  bits ( $N$  fini)  $\Rightarrow$  perte d'information car les valeurs des échantillons sont approximées

L'erreur de quantification, ou de codage, est la différence entre la tension d'entrée analogique  $v_a$  et la valeur analogique  $v_s$  correspondant au signal de sortie numérisé

On la diminue avec une quantification linéaire centrée



### 3.3 Bruit de quantification / dynamique

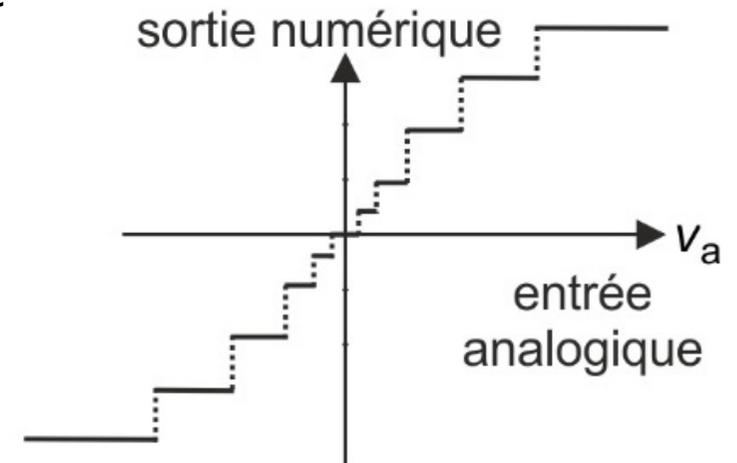
L'erreur de quantification est de l'ordre de  $q$  (tout se passe comme si l'on superposait un bruit d'amplitude  $q$  au signal)

La dynamique d'une quantification est le rapport en dB entre la plus grande valeur codée,  $(2^N - 1)q$  et  $q$ , et vaut donc  $20 \log(2^N - 1) \approx 20N \log 2 \approx 6N$

- CD : codage sur 16 bits  $\Rightarrow$  grande dynamique de 96 dB
- Téléphonie mobile : codage sur 8 bits  $\Rightarrow$  faible dynamique de 48 dB, or la dynamique d'une conversation est de l'ordre de 40 dB (l'amplitude d'une conversation à voix basse n'est que de 1% de la valeur pleine échelle)

**Le rapport *signal sur bruit R.S.B*** d'une conversation à voix basse est donc faible  
 $R.S.B \approx (V_{PE} / 100) / (V_{PE} / 2^8) = 2,56$  : mauvaise qualité

$\Rightarrow$  quantification *non* uniforme. On dispose alors de plus de valeurs pour coder les faibles tensions



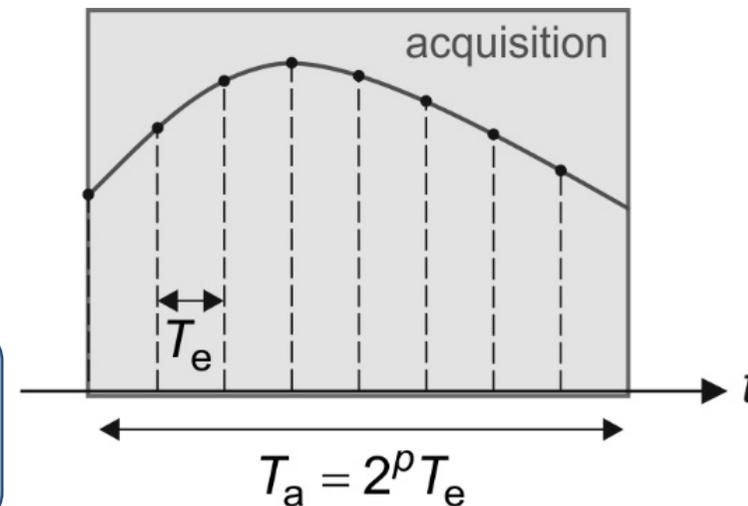
quantification non uniforme

## 4. ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

### 4.1 Principe

L'algorithme F.F.T (*Fast Fourier Transform*) : transformée de Fourier discrète où une partie du signal de durée  $T_a$  est échantillonnée en  $2^p$  valeurs.

$T_e = T_a / 2^p$	$f_e = 2^p / T_a$
période d'échantillonnage	fréquence d'échantillonnage



### ● Résolution fréquentielle

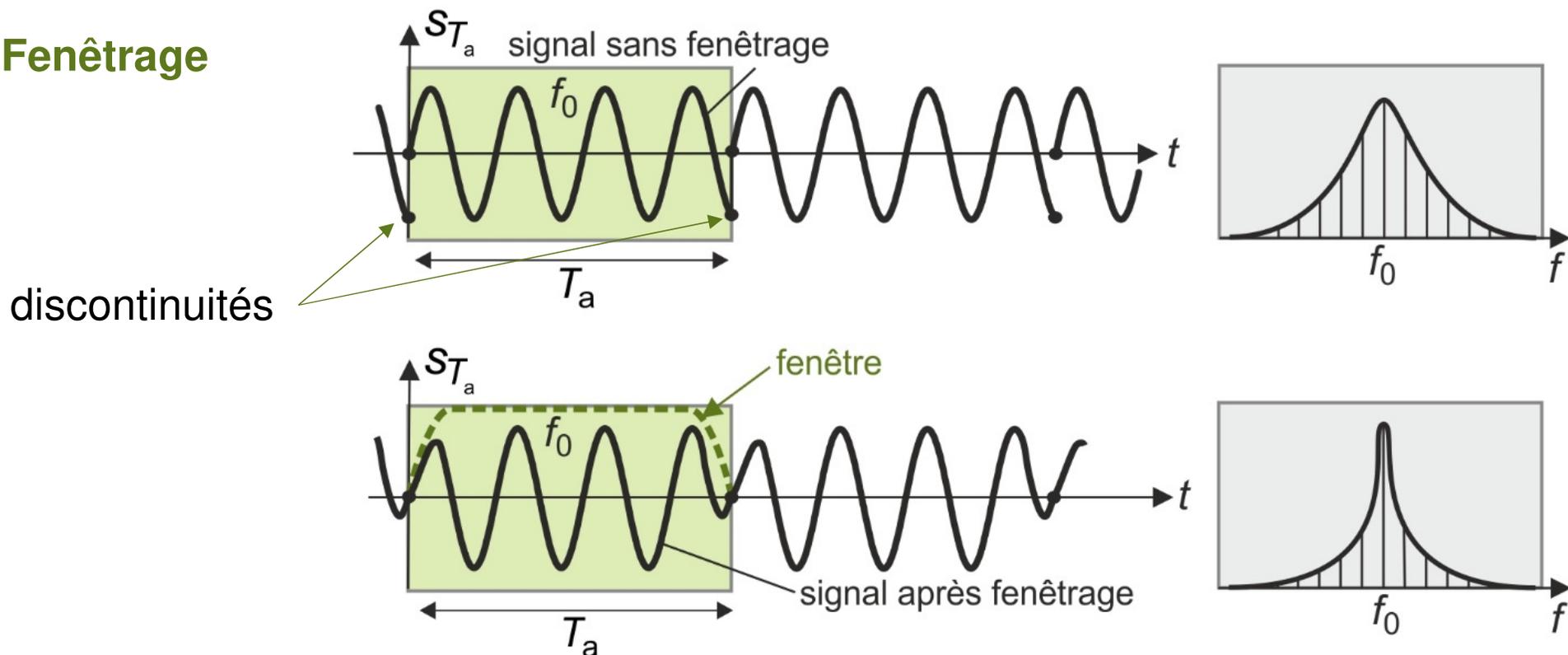
Le signal échantillonné  $s$  n'est connu que sur la durée  $T_a$ . Les calculs ne se font donc pas sur  $s$ , mais sur la fonction  $s_T$   $T_a$ -périodique, qui ne s'identifie à  $s$  que sur l'intervalle  $[0, T_a]$  (périodisée de  $s$ ) et dont on calcule les  $2^p$  premiers coefficients de Fourier :

$$C_n \text{ pour les fréquences } n / T_a = n f_e / 2^p \text{ avec } n \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$$

seuls sont affichés les  $|C_n|$  pour les fréquences  $n / T_a = n f_e / 2^p$  avec  $n \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$   
 : de  $f = 0$  (continu) à  $f = f_e / 2 = f_N$ , fréquence de Nyquist

La résolution en fréquence (écart  $1 / T_a$  entre deux raies du spectre calculé par l'algorithme) est d'autant meilleure que  $T_a$  est grand

● Fenêtrage



Pour un signal périodique, s'il n'y a pas un nombre entier de périodes pendant  $T_a$ , l'algorithme F.F.T réalise l'analyse de Fourier d'un signal périodique *discontinu* ⇒ raies parasites autour des raies réelles.

Un fenêtrage adapté (on multiplie  $s$  par une fonction qui s'annule sur les bords de la zone d'acquisition) réduit les discontinuités et améliore la précision des mesures de fréquence et d'amplitude

## 4.3 Paramètres optimaux

**Oscilloscope** :  $p = 11$  ( $N = 2048$  échantillons seulement).

Une bonne résolution spectrale nécessite  $T_a$  grand MAIS comme  $f_e = N / T_a$ , il faut limiter  $T_a$  pour vérifier le critère de Shannon  $f_e \geq 2 f_{\max}$  (attention au repliement de spectre)

**LatisPro** :  $N$  réglable ( $N_{\max} = 256\ 000$ ).

On peut avoir une excellente résolution spectrale (acquisitions de plusieurs secondes) tout en vérifiant le critère de Shannon

(attention, l'algorithme implémenté est peu performant et en pratique il faut prendre  $f_e \gg 2 f_{\max}$  pour que le spectre affiché soit correct en amplitude)