2. FILTRES FONDAMENTAUX

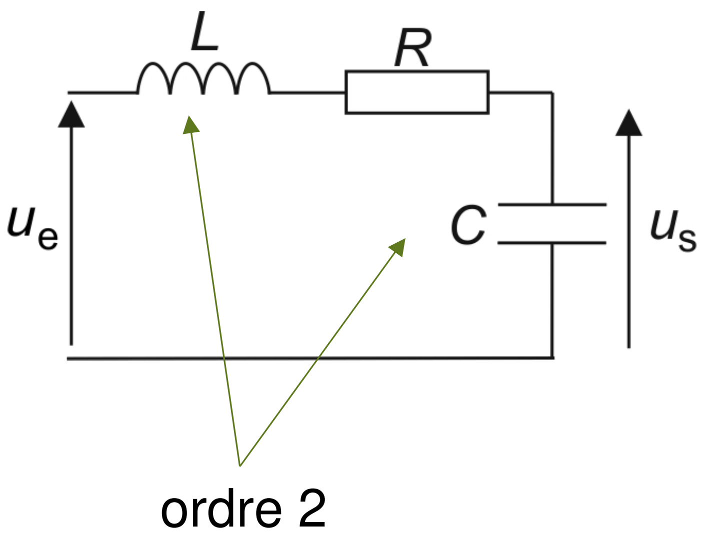
2.2 Filtres du second ordre

Passe-bas du second ordre

$$\boxed{H(jx) = \frac{H_0}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}}$$

On suppose $H_0 > 0$

- Exemple:

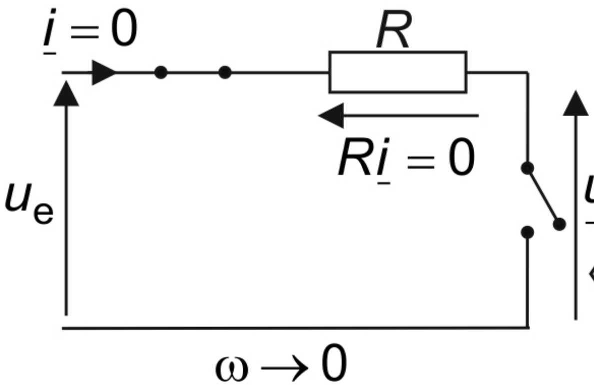


$$H_0 = 1$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

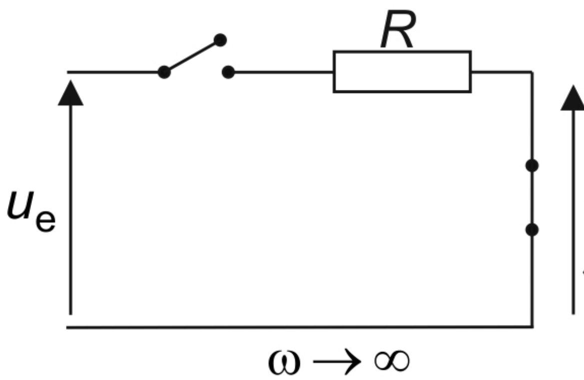
$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Prévision du comportement : passe-bas



$\underline{u_s} = \underline{u_e} \Leftrightarrow H = 1$

« le signal passe »



$\underline{u_s} = 0 \Leftrightarrow H = 0$

« le signal est coupé »

au lieu de $G \sim H_0 / x$ pour le passe-bas d'ordre 1 :
+ forte décroissance dans la bande coupée $x > 1$

- Étude asymptotique

$$x \to 0 \qquad H(jx) \sim H_0 \Rightarrow \begin{cases} G \sim H_0 \Rightarrow G_{dB} \sim 20\log H_0 \\ \varphi \sim 0 \end{cases}$$

$$x \to \infty \qquad H(jx) \sim -H_0 / x^2 \Rightarrow \begin{cases} G \sim \dfrac{H_0}{x^2} \Rightarrow G_{dB} \sim 20\log H_0 - 40\log x \\ \varphi \sim \pi \text{ ou } \boxed{-\pi} \end{cases}$$

φ décroît de 0 à $-\pi$

Les deux asymptotes se coupent pour $\begin{cases} \log x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ G_{dB} = 20\log H_0 \end{cases}$

$$H(j) = -jH_0Q \Rightarrow \varphi(x=1) = -\pi/2 \Rightarrow$$

$x = 1$

- Étude du gain $\quad G(x) = \dfrac{H_0}{\sqrt{\underbrace{\left(1-x^2\right)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}_{F(x)}}}$

$$F'(x) = 4x\left[x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right] \text{ s'annule en}$$

$$x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ si } \boxed{Q > 1/\sqrt{2}}$$

condition de résonance

2.3 Diagrammes de Bode des principaux filtres d'ordre $n \leq 2$

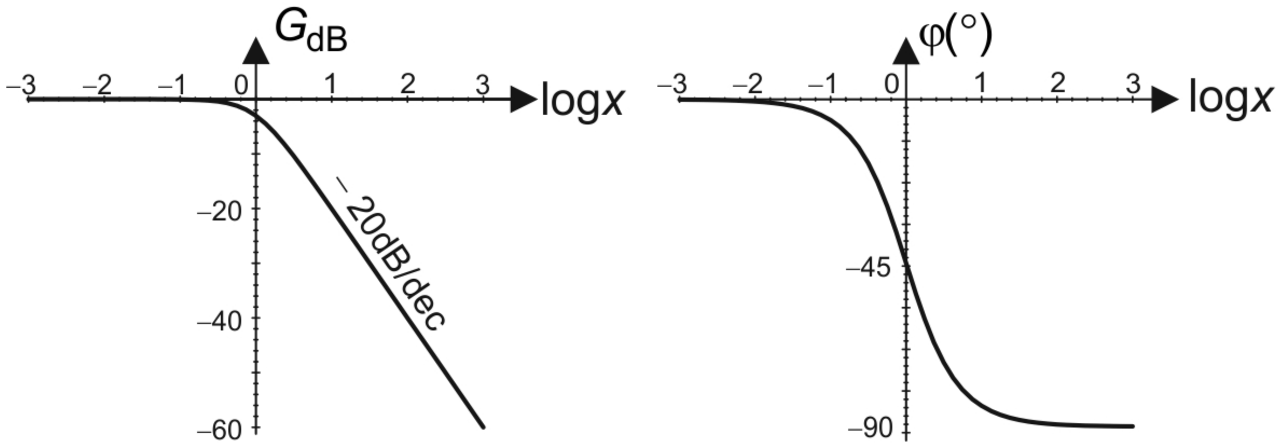
$|H_0|$ est le gain dans la bande passante pour tous les cas représentés

$H_0 = 1$ pour les tracés. Si $|H_0| \neq 1$, il suffit de translater le *gain* de $20\log|H_0|$

Si $H_0 < 0$, il faut translater φ de π ou $-\pi$

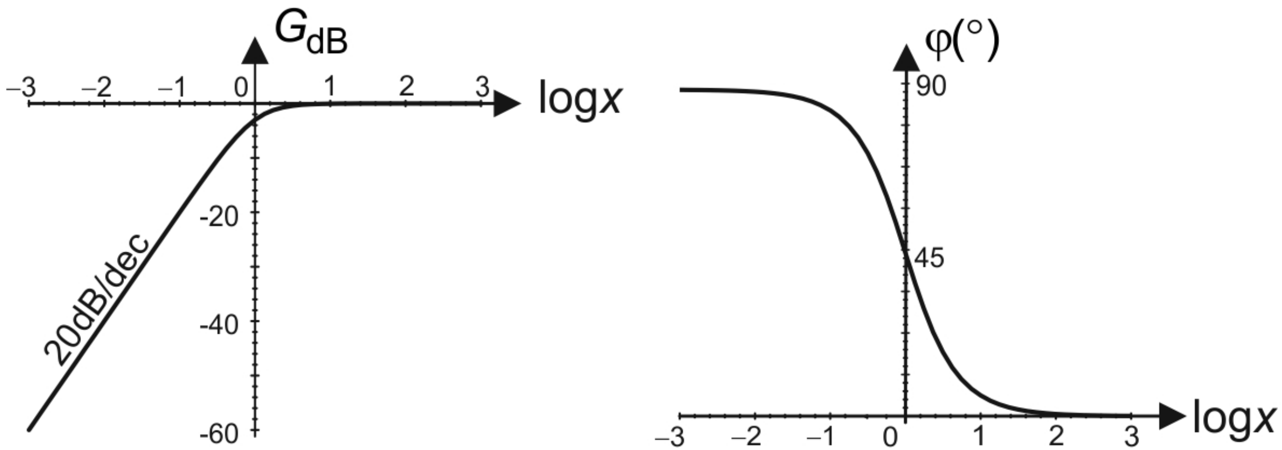
passe-bas du premier ordre

$$H(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}$$

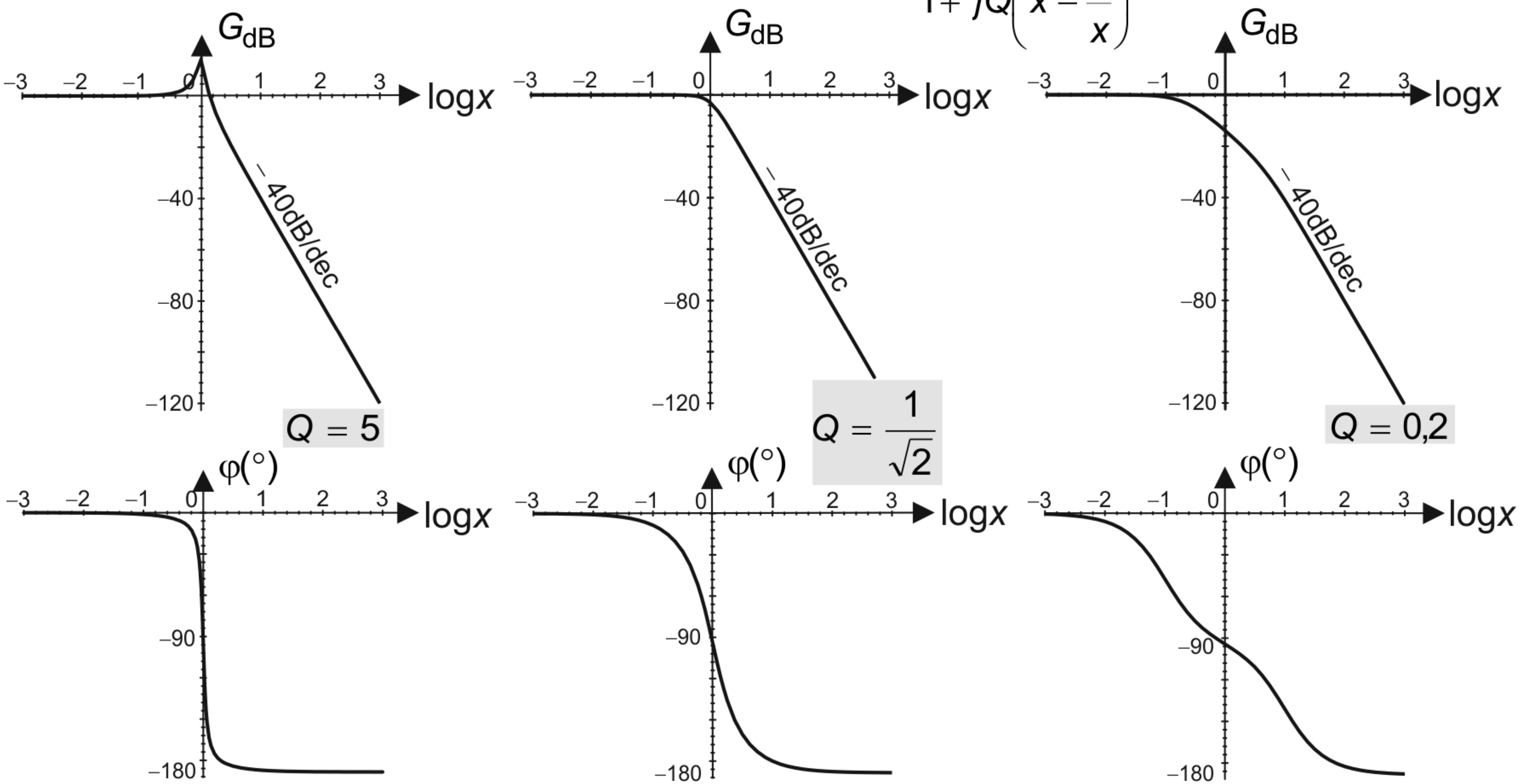


passe-haut du premier ordre

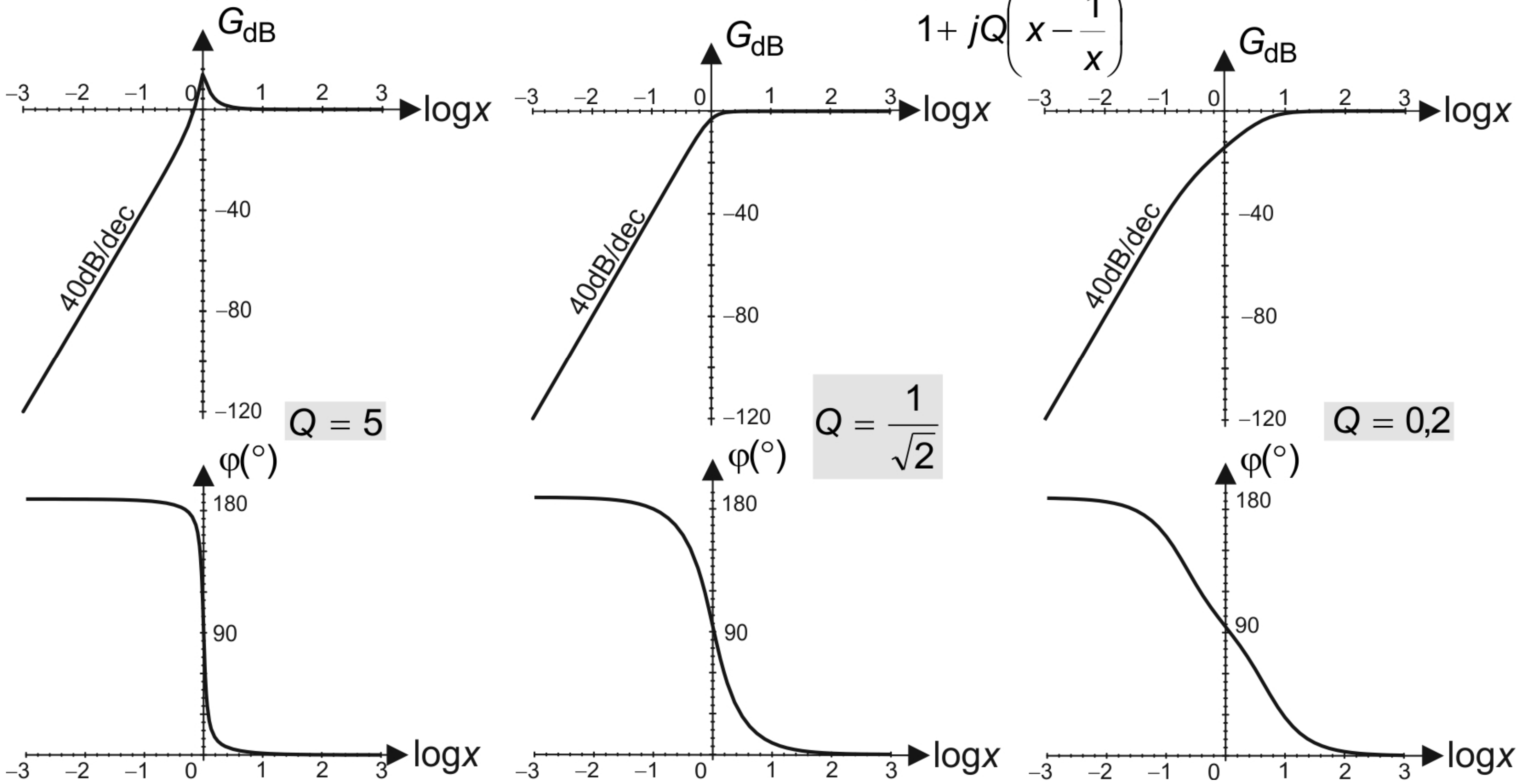
$$H(jx) = \frac{H_0 \cdot jx}{1 + jx}$$



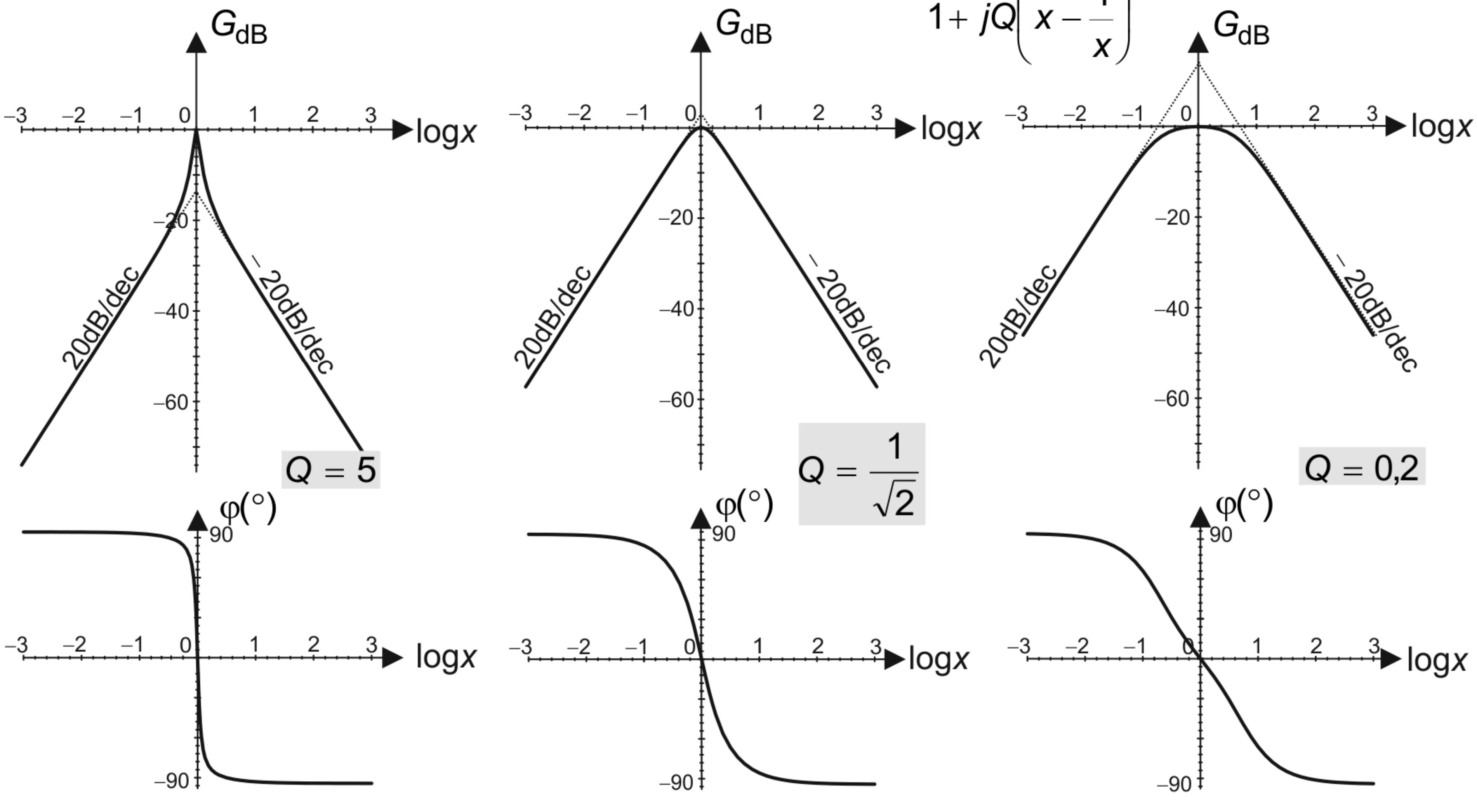
passe-bas du second ordre $H(jx) = \dfrac{H_0 \cdot Q/jx}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$



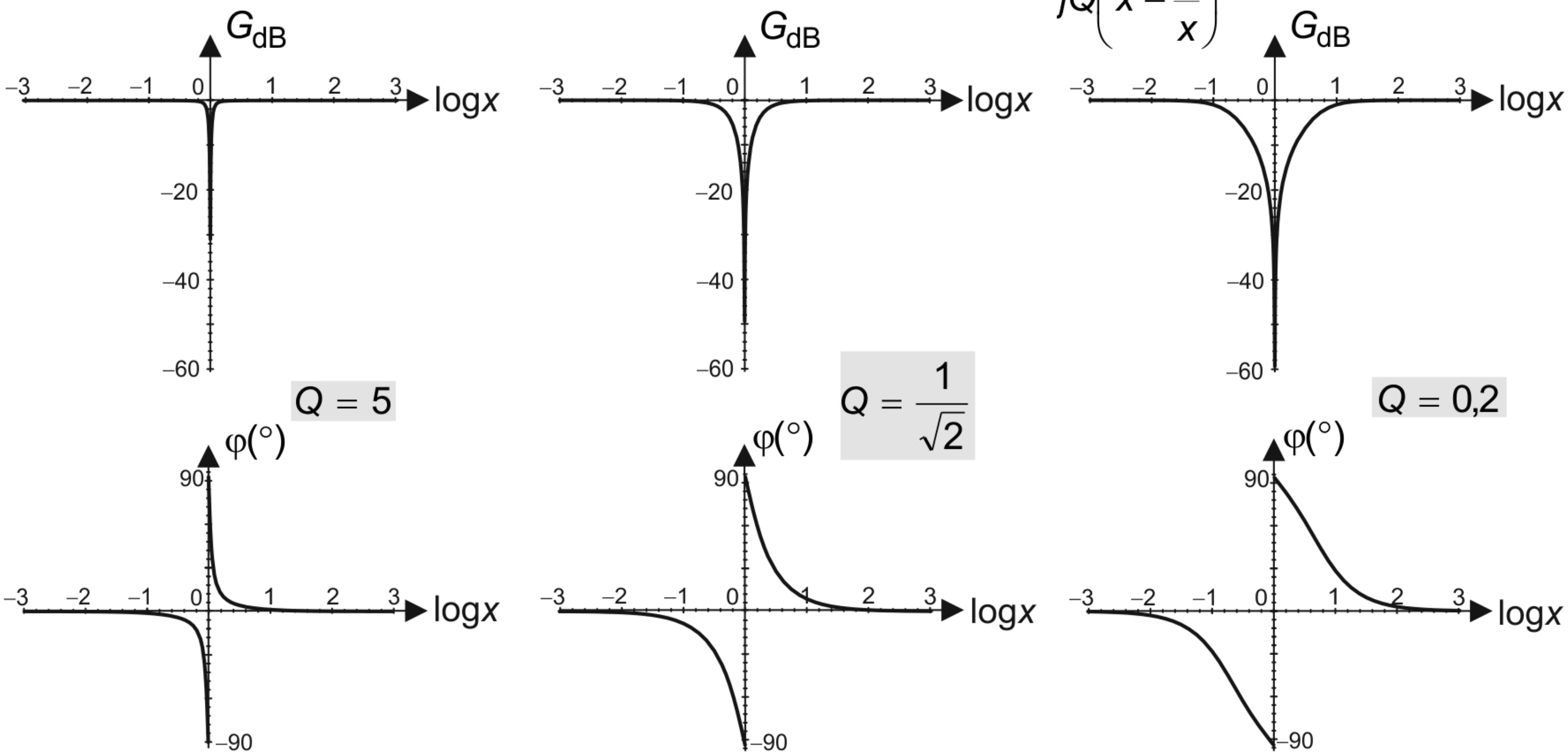
passe-haut du second ordre $H(jx) = \dfrac{H_0 \cdot jQx}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$



passe-bande du second ordre $H(jx)=\dfrac{H_0}{1+jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}$



coupe-bande du second ordre $H(jx) = \dfrac{H_0}{1 + \dfrac{1}{jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}}$



2.4 Lien entre réponse temporelle et réponse fréquentielle

Pour une réponse *indicielle* (à un échelon de hauteur E_0) :

— Le comportement à $t = 0^+$ se déduit du comportement de la fonction de transfert aux *hautes* fréquences :

$$s(0^+) = E_0 \cdot \lim_{p \to \infty} H(p)$$

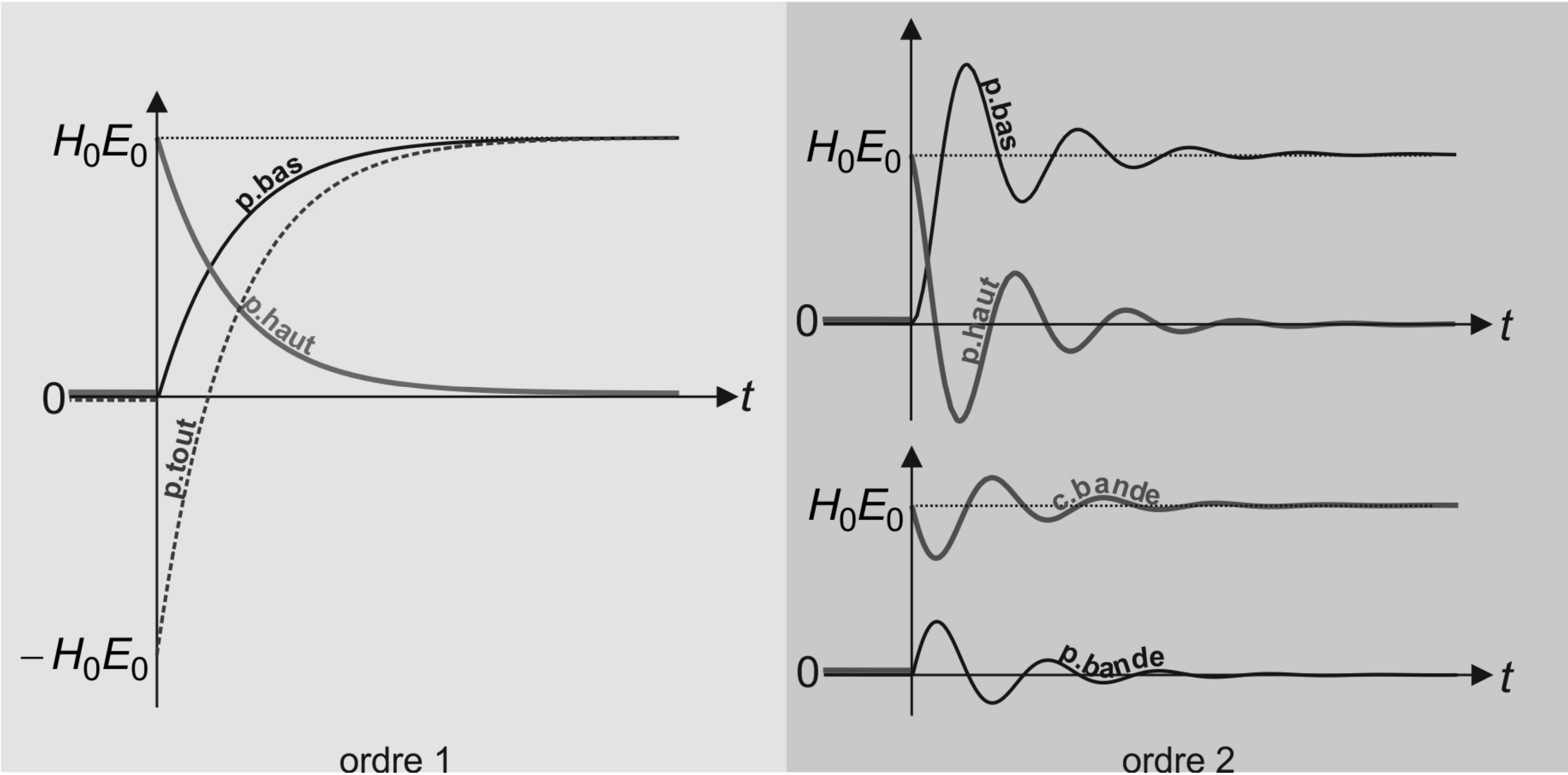
— Le comportement à $t \to \infty$ se déduit du comportement de la fonction de transfert aux *basses* fréquences :

$$s(+\infty) = E_0 \cdot \lim_{p \to 0} H(p)$$

Exemple : passe-bas (1er ou 2nd ordre)

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \tau p} \qquad H(p) = \frac{H_0}{1 + \dfrac{2\sigma p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{{\omega_0}^2}}$$

$$s(0^+) = E_0 \cdot \lim_{p \to \infty} H(p) = 0 \qquad s(+\infty) = E_0 \cdot \lim_{p \to 0} H(p) = H_0 E_0$$



H_0E_0
p.bas
p.haut
0
t
p.tout
$-H_0E_0$
ordre 1
H_0E_0
p.bas
0
p.haut
t
H_0E_0
c.bande
0
p.bande
t
ordre 2

3. FILTRAGE

3.1 Réponse à un signal *T*-périodique, de pulsation fondamentale $\Omega = 2\pi / T$

On étudie un système linéaire en régime forcé (établi) de fonction de transfert

$$H(j\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

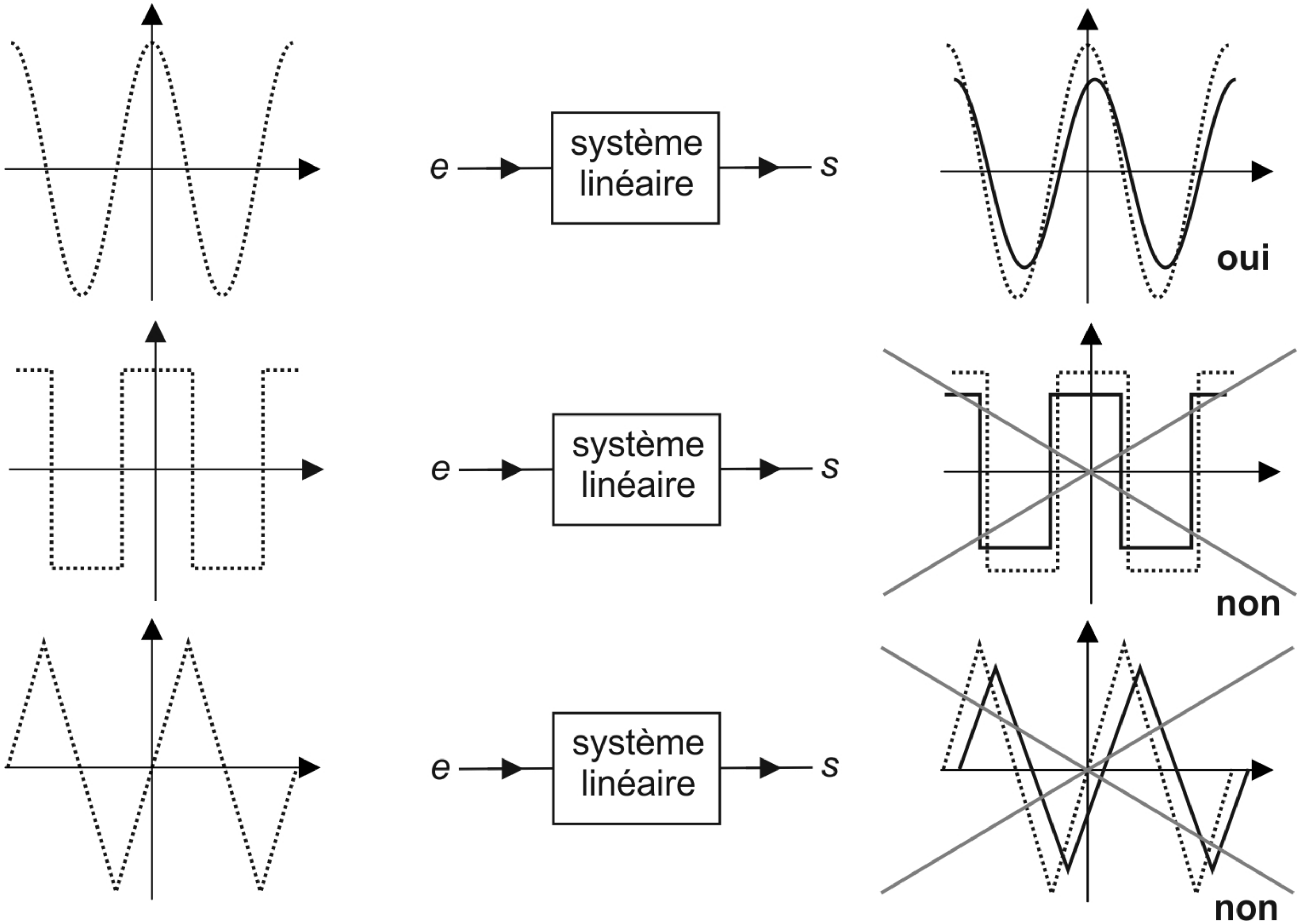
Premier cas : entrée sinusoïdale

$$\underline{e}(t) = E\sqrt{2}e^{j\Omega t} \Rightarrow \underline{s}(t) = H(j\omega)\cdot\underline{e}(t) = G(\Omega)E\sqrt{2}e^{j[\Omega t+\varphi(\Omega)]}$$

Signaux réels : $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\Omega t) \Rightarrow s(t) = G(\Omega)E\sqrt{2}\cos[\Omega t + \varphi(\Omega)]$

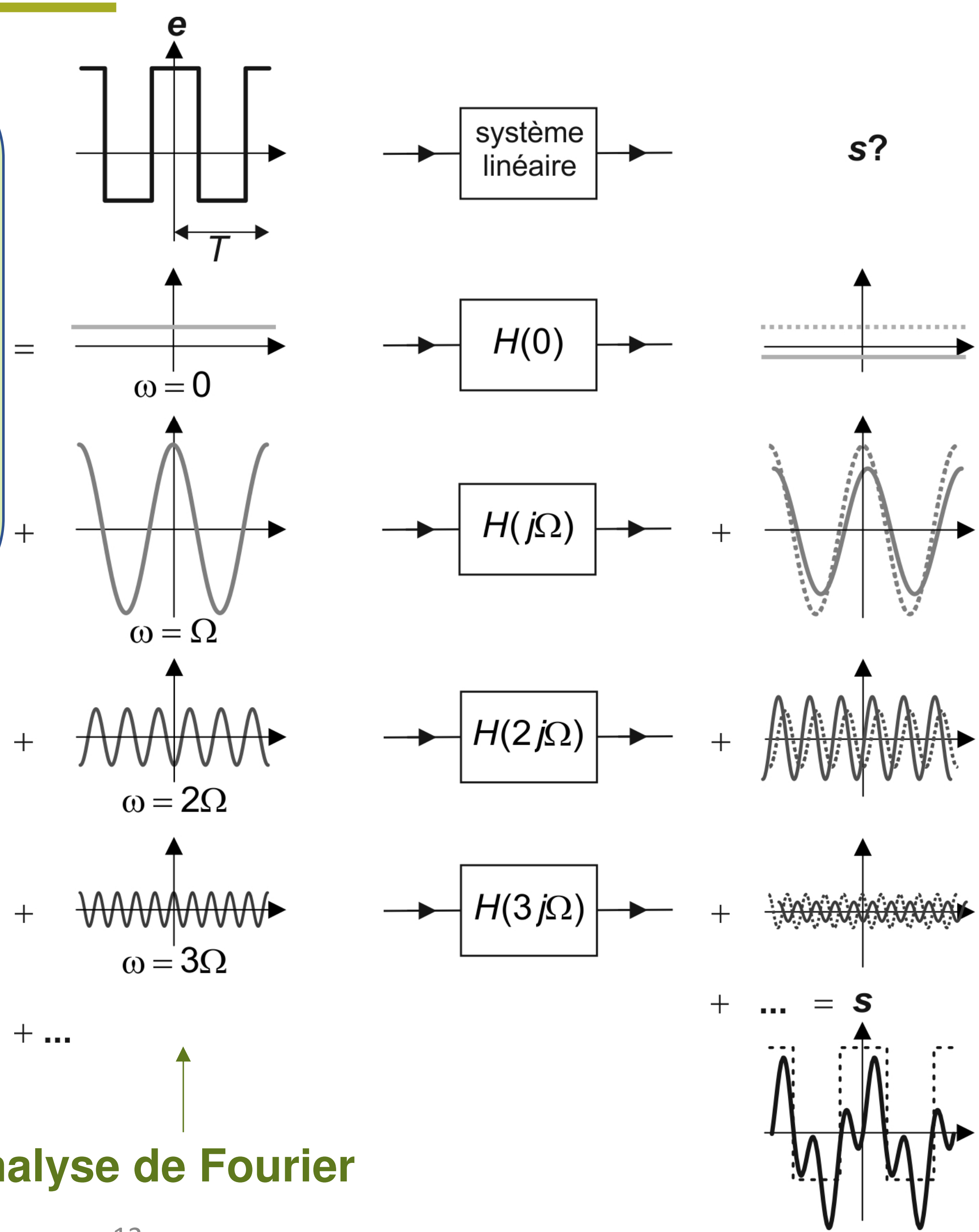
Deuxième cas : entrée *T*-périodique mais non sinusoïdale

La multiplication du signal par $H(j\Omega)$ n'a pas de sens puisque le signal ne contient pas que la pulsation Ω !


e
système linéaire
s
oui
e
système linéaire
s
non
e
système linéaire
s
non

En revanche, la ***linéarité*** du système

⇒ la *réponse à une somme* de signaux sinusoïdaux de différentes pulsations est la *somme des réponses* à chaque signal pris séparément.



Analyse de Fourier

$$e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos[n\Omega t + \psi_n] \Rightarrow s(t) = H(0)\cdot c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} G(n\Omega) c_n \cos[n\Omega t + \psi_n + \varphi(n\Omega)]$$

réponse exacte

3.2 Filtrage

Critère à 3 dB : on néglige dans le signal de sortie toute composante ne se trouvant pas dans la bande passante

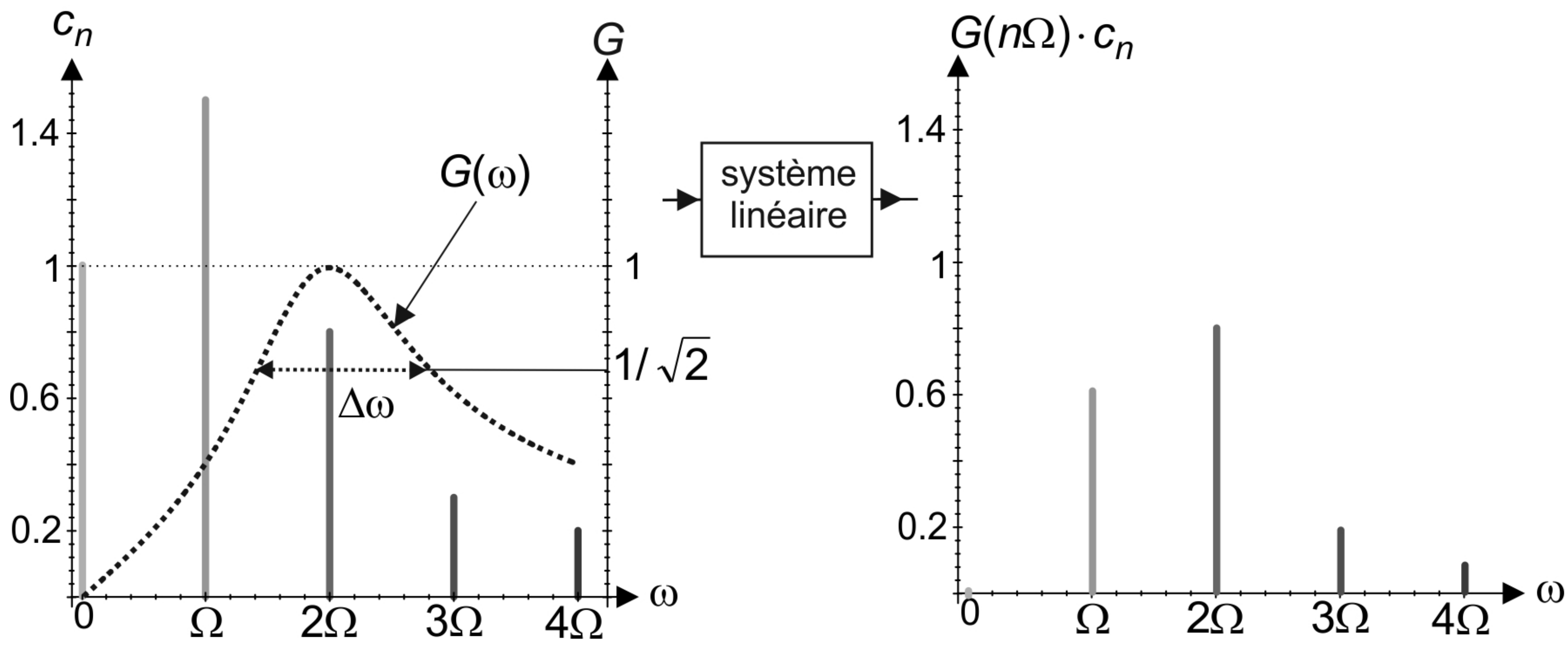
Inconvénient : ne tient pas compte du poids (amplitude) des harmoniques du signal d'entrée

exemple : passe-bande d'ordre 2 : $H(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$ avec $\omega_0 = 2\Omega$

pour ne sélectionner que l'harmonique de rang 2 de :

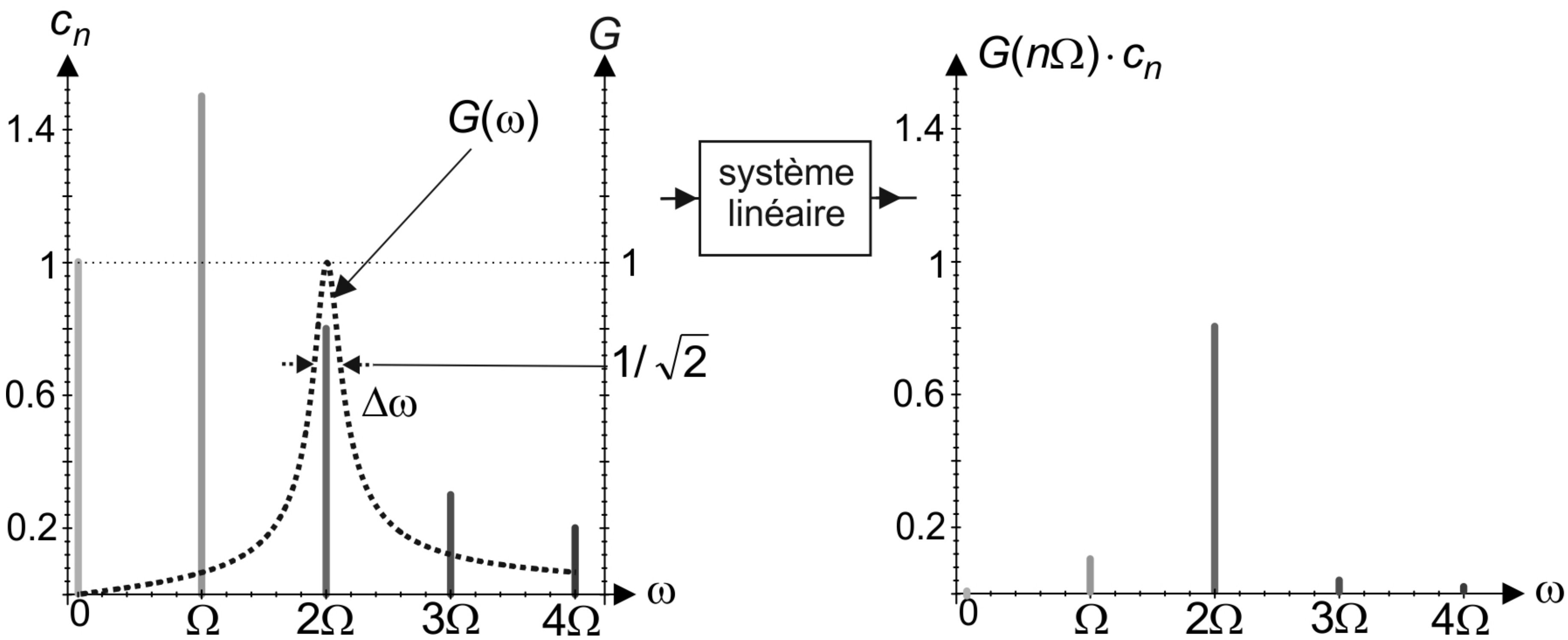
$$e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos[n\Omega t + \psi_n]$$

— Premier cas :



Seul l'harmonique de rang 2 est dans la bande passante, MAIS on ne peut pas négliger le fondamental dans le signal de sortie : le filtre n'est pas assez sélectif.

— Deuxième cas :



Le facteur de qualité Q est plus grand. On a bien :

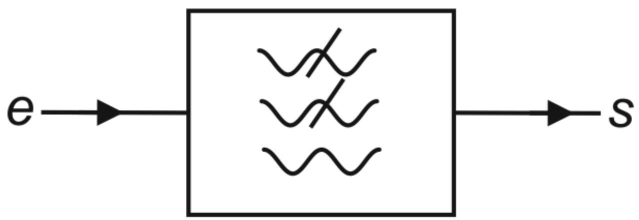
$$s(t) \simeq \underbrace{G(2\Omega)}_{=1 \text{ ici}} c_2 \cos\left[2\Omega t + \psi_2 + \underbrace{\varphi(2\Omega)}_{=0 \text{ ici}}\right]$$

Attention ! L'étude du gain suffit pour savoir quels harmoniques négliger, mais le calcul des déphasages $\varphi(n\Omega)$ est nécessaire pour connaître la réponse *s*.

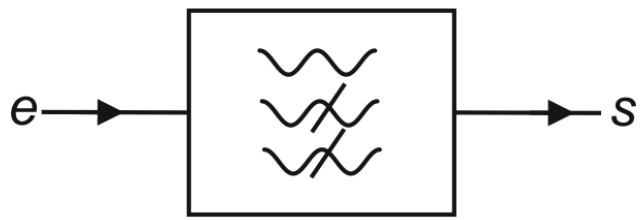
Exemple de critère plus efficace : on néglige dans *s* l'harmonique de rang n' devant celui de rang *n* si son amplitude est plus de 10 fois inférieure :

$$\boxed{G(n'\Omega)c_{n'} < \frac{G(n\Omega)c_n}{10}}$$

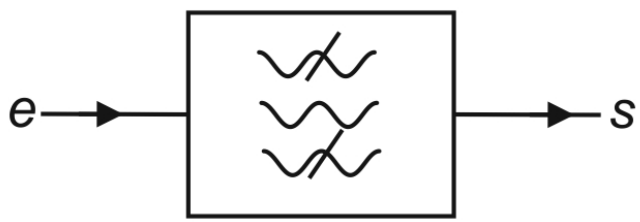
Schémas-blocs des principaux filtres :



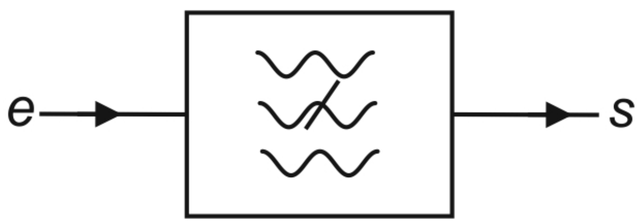
passe-bas



passe-haut



passe-bande



coupe-bande

3.3 Filtres actifs / passifs. Cascades de filtres

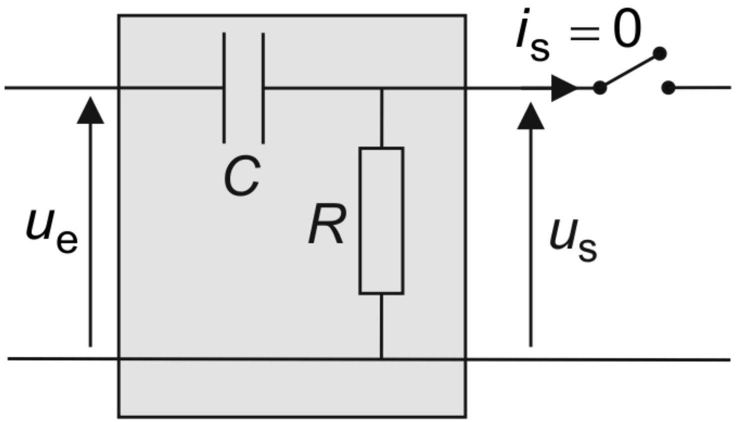
- **Filtre passif**

Ce sont des réseaux de composants *non alimentés*.

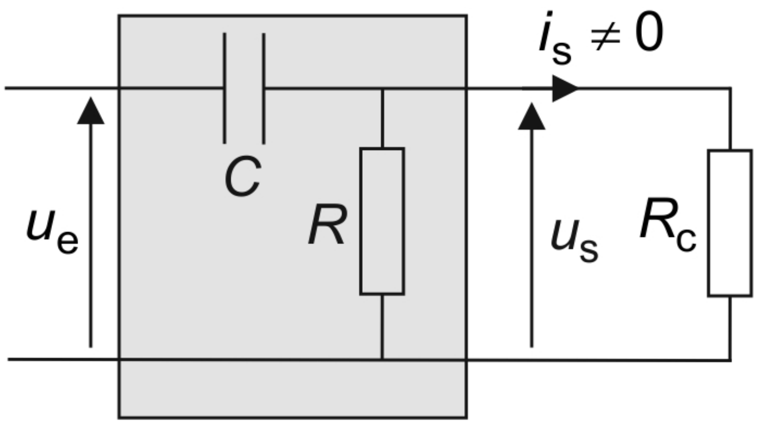
Deux limitations pour ce type de filtres :

>>> pas d'amplification dans la bande passante ($|H_0| \leq 1$ pour les filtres vus avant)
>>> **la fonction de transfert dépend de la charge.**

Exemple :



Sortie ouverte.



Avec charge.

$$H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \quad \text{si } i_s = 0$$

et $H_0 = 1$

$$H'(j\omega) = \frac{jR_{eq}C\omega}{1 + jR_{eq}C\omega} \neq H(j\omega)$$

avec $R_{eq} = \dfrac{RR_c}{R + R_c}$ si $i_s \neq 0$

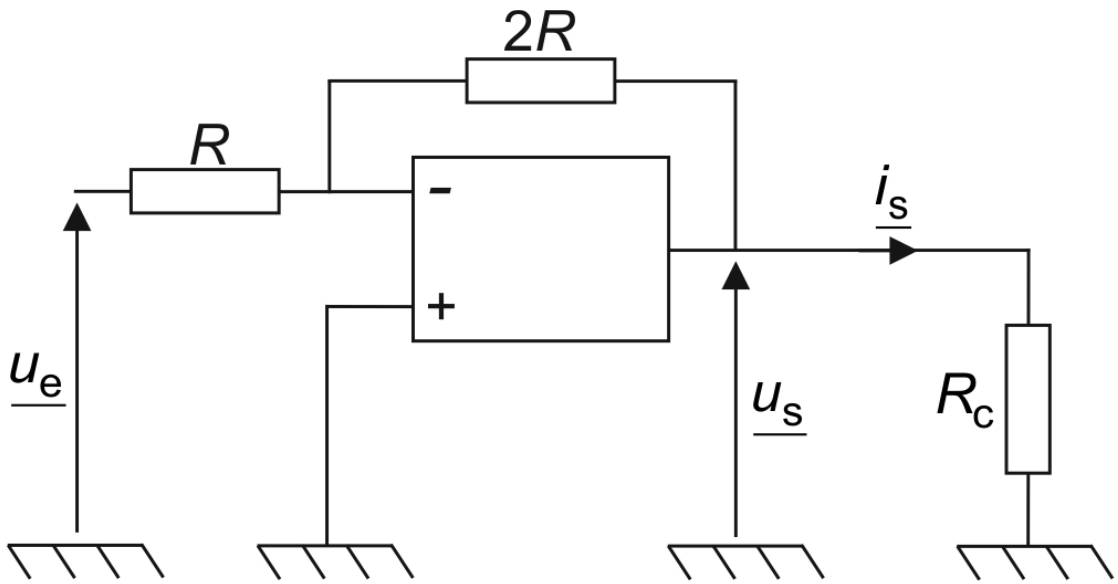
- **Filtre actif**

Contiennent des composants *alimentés* comme les A.L.I

Donnent la *possibilité* d'avoir

>>> amplification dans la bande passante
>>> **une fonction de transfert indépendante de la charge** (de $\underline{i_s}$)

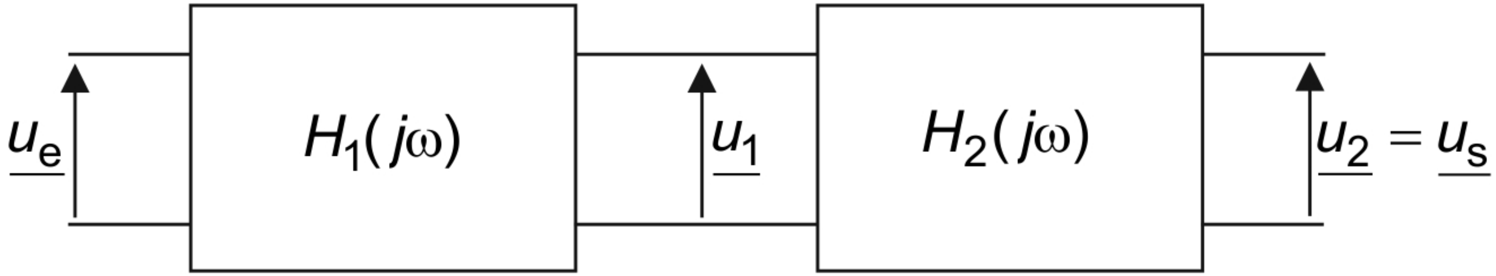
Exemple :



$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_0 = -2$$ indépendant de R_c

$$|\underline{H}_0| = 2$$ dans la bande passante

- **Cascade de filtres**



Cascade de filtres.

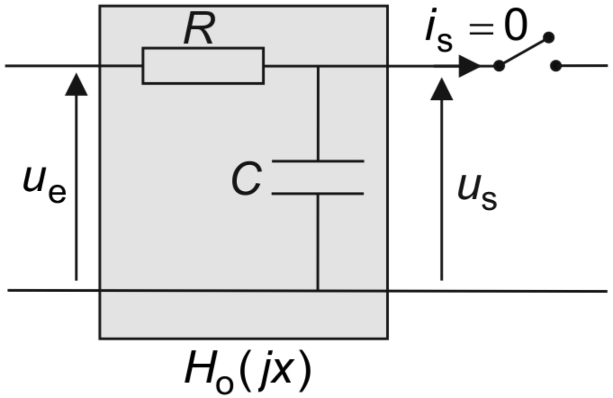
$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} \cdot \frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_e} = H_2(j\omega) \cdot H_1(j\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = G_{dB1} + G_{dB2} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$$

les diagrammes de Bode se somment (un de leurs intérêts…)

intérêt limité pour les filtres passifs…

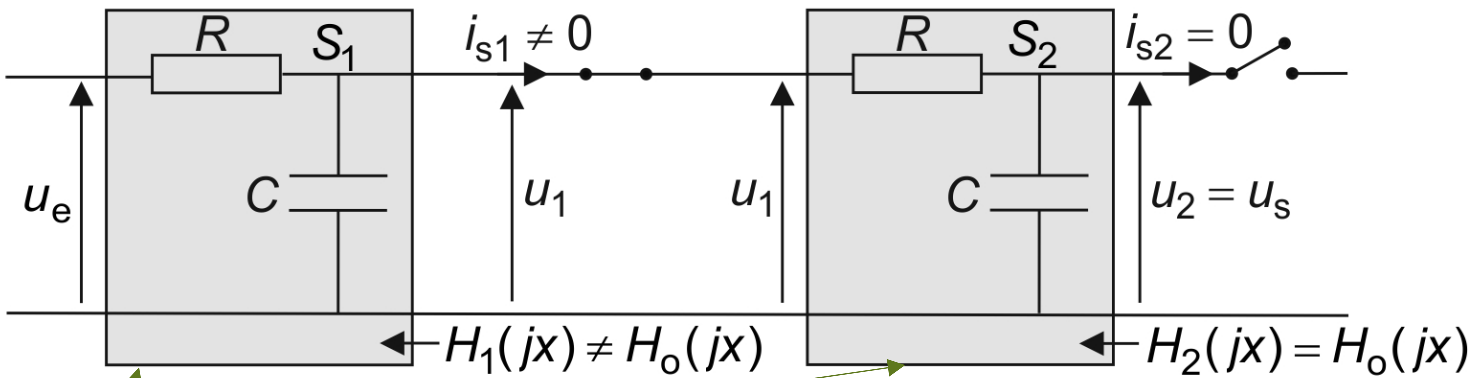
Exemple :



$$H_o(jx) = \frac{1}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad x = RC\omega$$

On veut un filtre tel que $H(jx) = H_o^{\,2}(jx)$

mauvaise idée :



mêmes boîtiers mais des fonctions de transfert différentes !

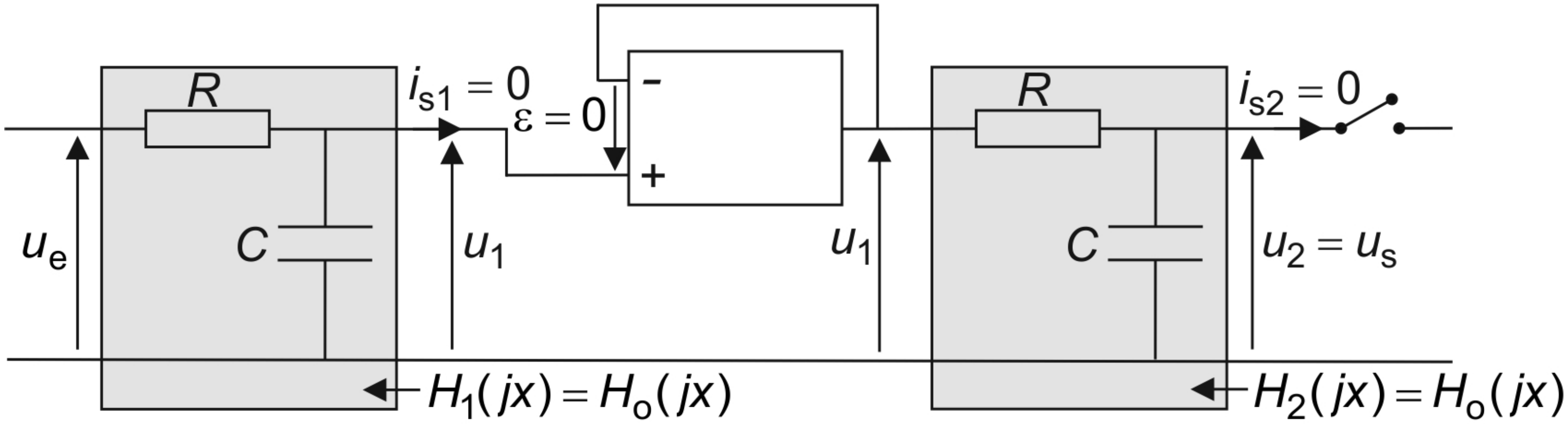
$$H(jx) = H_1(jx) \cdot H_2(jx) \neq H_o^{\,2}(jx)$$

pas intéressant ici

$$H(jx) = 1/(1 + 3jx - x^2)$$

Millman en S_1 et S_2

bonne idée :



$$\Rightarrow H(jx) = H_o^2(jx) = 1/(1 + 2jx - x^2)$$

Lorsqu'on place un montage suiveur en sortie d'un filtre, ce dernier est en sortie ouverte et sa fonction de transfert est donc indépendante de la charge.

4. CARACTÈRE INTÉGRATEUR / DÉRIVATEUR D'UN FILTRE

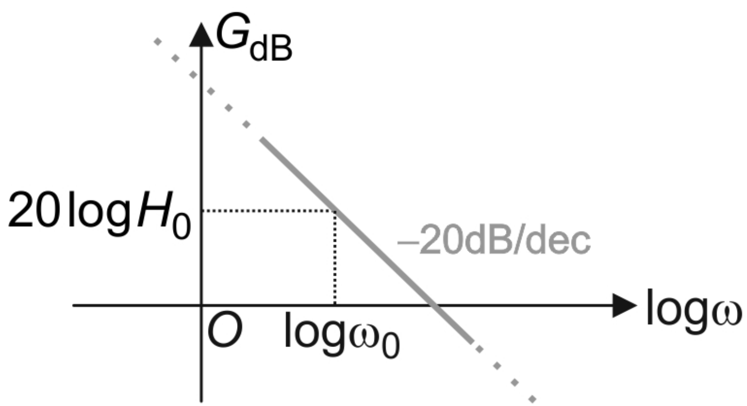
pulsation

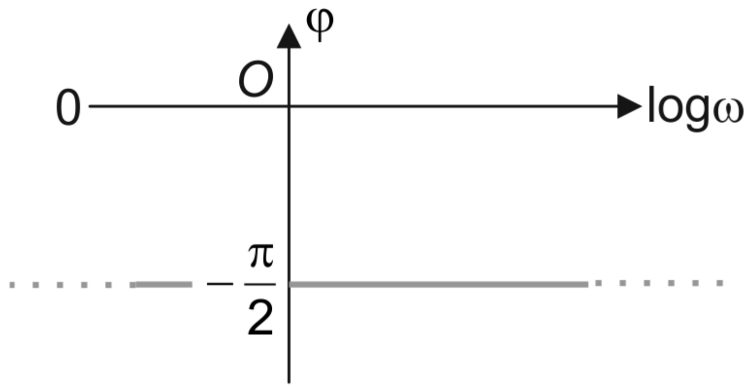
4.1 Intégrateur

On veut $\boxed{s = K\int e\,\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = Ke = H_0\omega_0 e \leftrightarrow j\omega\underline{s} = H_0\omega_0\underline{e}$

homogènes sans dimension

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0}{j\omega/\omega_0} \quad \textbf{intégrateur pur}}$$





(avec $H_0 > 0$)

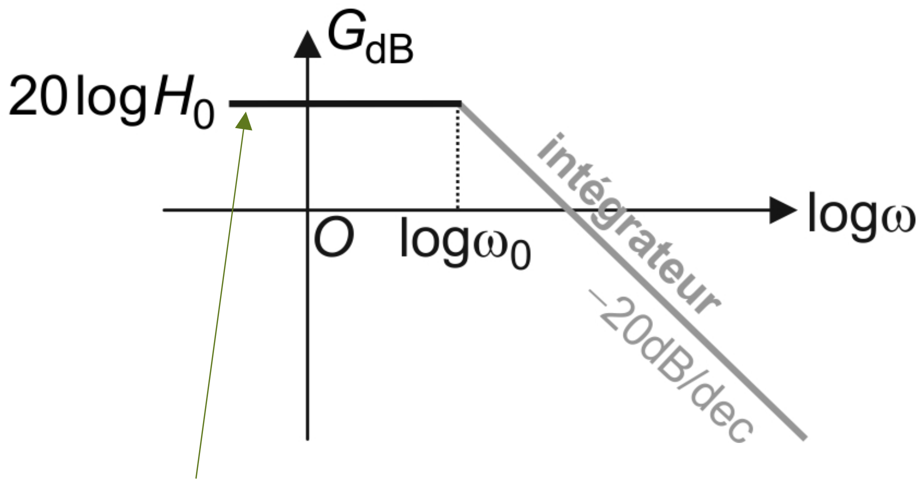
problème : si $\langle e \rangle \neq 0$, l'intégration de cette composante entraîne la saturation :

$$K\int \langle e \rangle \mathrm{d}t = K\langle e \rangle \cdot t + Cte$$

$\Rightarrow$ **pseudo-intégrateur**

— Exemple 1 : Passe-bas du premier ordre : $H(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + j\omega/\omega_0}$

pour $\omega >> \omega_0$ (bande coupée) $H(j\omega) \simeq \dfrac{H_0}{j\omega/\omega_0}$



comportement intégrateur dans la bande coupée ($\neq$ critère à 3 dB !)

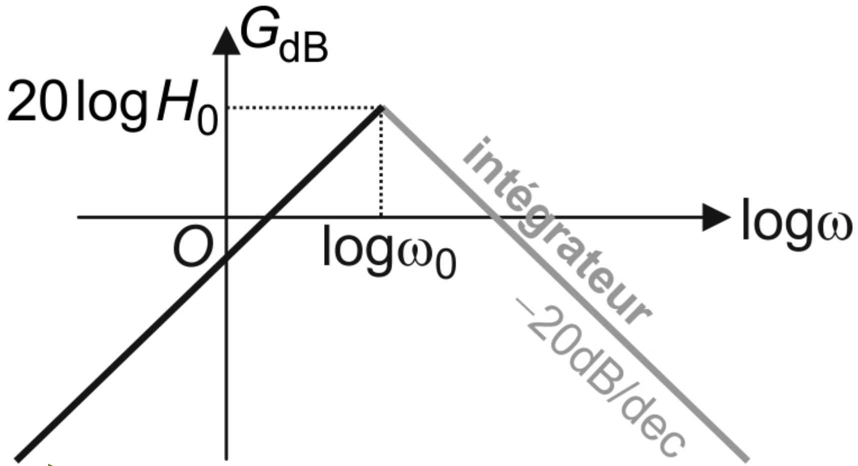
$\Rightarrow$ on peut prendre $|H_0| > 1$ pour amplifier la sortie

on n'intègre plus les composantes continues ($f = 0$), elles sont multipliées par H_0

— Exemple 2 : Passe-bande du second ordre : $H(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

$\begin{cases} \text{pour } \omega >> \omega_0 \ \text{(bande coupée)} \\ \text{et } \omega >> \omega_0' = \omega_0 / Q \end{cases} \Rightarrow H(j\omega) \simeq \dfrac{H_0}{j\omega / \omega_0'}$

on a intérêt à prendre $Q \geq 1$



comportement intégrateur dans la bande coupée (≠ critère à 3 dB !)

$\Rightarrow$ on peut prendre $|H_0| > 1$ pour amplifier la sortie

on n'intègre plus les composantes continues ($f = 0$), elles sont multipliées par 0

Intégration d'un signal *T*-périodique quelconque $\Omega = 2\pi / T$

Les deux filtres précédents sont des pseudo-intégrateurs dans le domaine $\omega >> \omega_0$ donc intègrent tout signal *sinusoïdal* dans ce domaine

signal NON sinusoïdal : $$e(t) = \underbrace{c_0}_{\langle e \rangle} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t + \psi_n)}_{\tilde{e}(t)}$$

si $\Omega >> \omega_0 \Rightarrow 2\Omega >> \omega_0$, $3\Omega >> \omega_0$, ... **toutes les composantes sinusoïdales de *e* se trouvent dans la bande intégrée**

MAIS PAS la composante continue ($\omega = 0$) $\langle e \rangle = c_0 \rightarrow \langle s \rangle = H(0) \cdot c_0$

$$\Rightarrow s(t) = \underbrace{H(0)c_0}_{\langle s \rangle} + \underbrace{K\int \left[\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t + \psi_n) \right] \mathrm{d}t}_{\tilde{s}(t)}$$

$\tilde{s}(t) = K\int \tilde{e}(t)\mathrm{d}t$ si $\Omega >> \omega_0$, on a intégration, à une constante multiplicative près, de la partie fluctuante du signal d'entrée.

4.2 Dérivateur

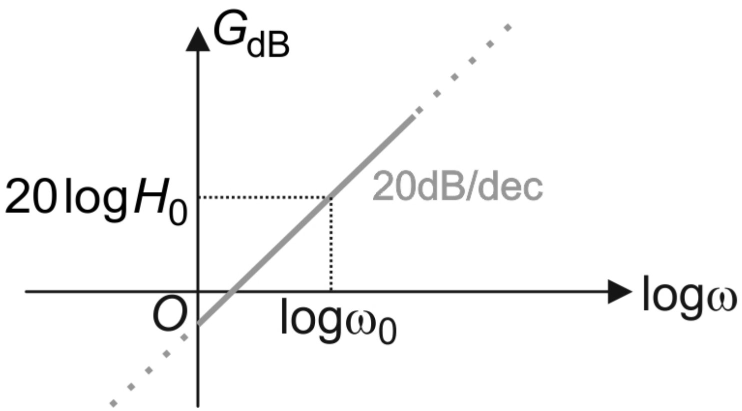
On veut $\boxed{s = K\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{H_0}{\omega_0}\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow \underline{s} = H_0\, j\dfrac{\omega}{\omega_0}\underline{e}$

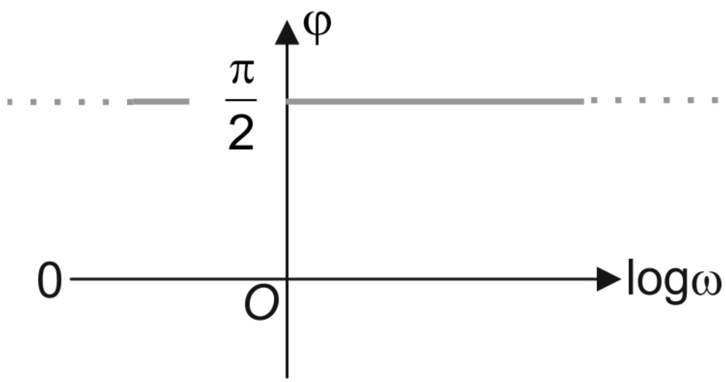
pulsation

s et e homogènes

sans dimension

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = H_0\, j\frac{\omega}{\omega_0} \quad \textbf{dérivateur pur}}$$





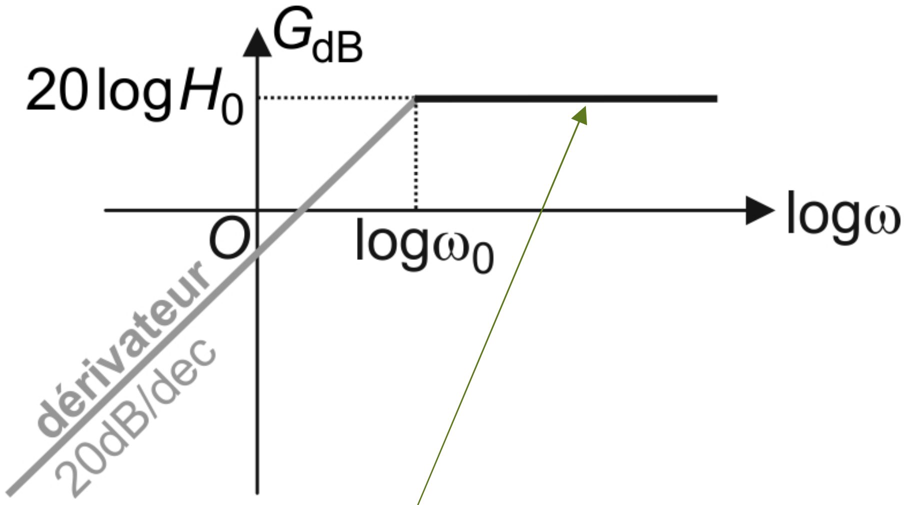
(avec $H_0 > 0$)

Les éventuels bruits et parasites de hautes fréquences sont très amplifiés par un tel système

⇒ **pseudo-dérivateur**

— Exemple 1 : Passe-haut du premier ordre : $H(j\omega) = \dfrac{H_0\, j\omega / \omega_0}{1 + j\omega / \omega_0}$

pour $\omega << \omega_0$ (bande coupée) $H(j\omega) \simeq H_0\, j \dfrac{\omega}{\omega_0}$



comportement dérivateur dans la bande coupée (≠ critère à 3 dB !)

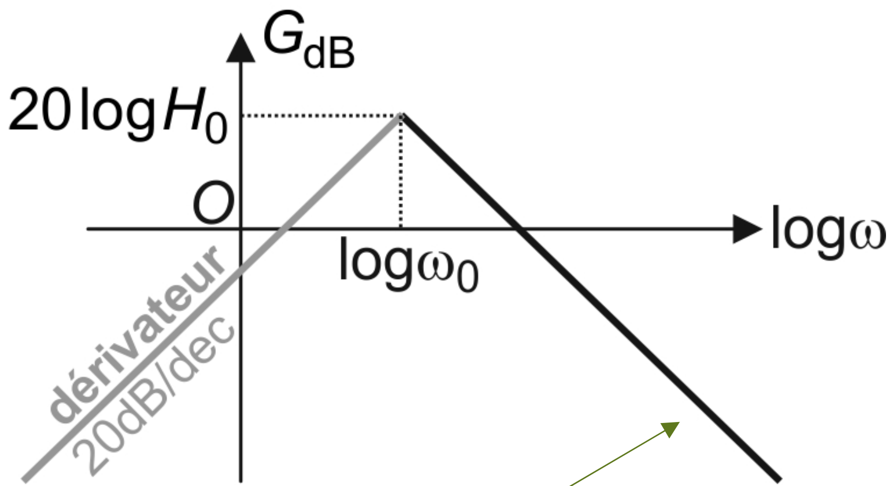
⇒ on peut prendre $|H_0| > 1$ pour amplifier la sortie

on n'amplifie plus les parasites de hautes fréquences

— Exemple 2 : Passe-bande du second ordre : $H(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

$\begin{cases} \text{pour } \omega \ll \omega_0 \\ \text{et } \omega \ll \omega'_0 = Q\omega_0 \end{cases} \Rightarrow H(j\omega) \simeq H_0 \, j \dfrac{\omega}{\omega'_0}$

on a intérêt à prendre $Q \geq 1$



comportement dérivateur dans la bande coupée (≠ critère à 3 dB !)

$\Rightarrow$ on peut prendre $|H_0| > 1$ pour amplifier la sortie

on n'amplifie plus les parasites de hautes fréquences

Dérivation d'un signal *T*-périodique quelconque $\Omega = 2\pi / T$

Les deux filtres précédents sont des pseudo-dérivateurs dans le domaine $\omega << \omega_0$ donc dérivent tout signal *sinusoïdal* dans ce domaine

signal NON sinusoïdal : $e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t + \psi_n)$

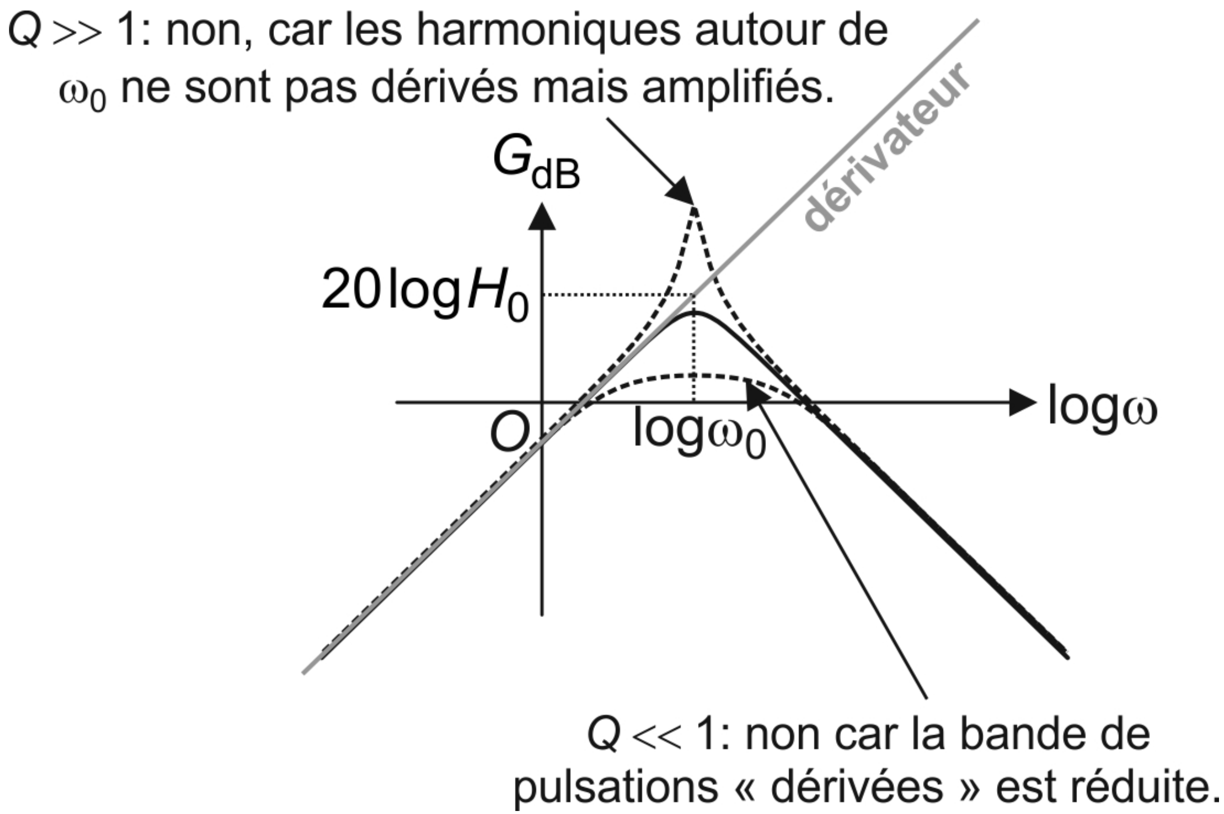
Si $\Omega << \omega_0$ le fondamental est dérivé, ainsi que tous les harmoniques vérifiant $n\Omega << \omega_0$ MAIS PAS ceux de rang trop élevé qui ne vérifient pas $n\Omega << \omega_0$

$\Rightarrow$ signal bien dérivé si les harmoniques de *s* « non dérivés » ont un poids négligeable devant ceux qui le sont

$\Rightarrow$ plus facile de dériver un signal en triangles : $c_n \propto 1/n^2$ qu'en créneaux : $c_n \propto 1/n$

$$s(t) \simeq H(0) \cdot c_0 + \sum_{n=1}^{N} G(n\Omega) c_n \cos[n\Omega t + \psi_n + \varphi(n\Omega)] \text{ avec } N\Omega << \omega_0 \Rightarrow s(t) \simeq K \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

Cas du passe-bande



$\Rightarrow$ Q doit être de l'ordre de 1