1.3 Unités et ordres de grandeur

potentiel V en **volt (V)**

champ électrique $\|\vec{E}\|$ **en V · m^{-1}**

l'air sec s'ionise et devient conducteur s'il devient plus grand que le champ *disruptif* :

$$\|\vec{E}\| > \|\vec{E}\|_{\text{disruptif}} \simeq 3{,}6 \cdot 10^{6}\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

champ électrique résiduel, loin de toutes sources électromagnétiques :

$$\|\vec{E}\|_{\text{résiduel}} \simeq 10\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

⇒ **pour une particule *élémentaire* chargée, le poids est négligeable devant la force électrique**

poids d'un « gros » ion contenant une centaine de nucléons :

$$mg \simeq 100 \times 10^{-27} \times 10 \simeq 10^{-24}\ \text{N}$$

même si cet ion ne possède qu'une charge élémentaire $e \approx 10^{-19}$ C, il est soumis

à la force électrique : $eE \approx 10^{-19} \times 10 \simeq 10^{-18}\ \text{N} >> mg$

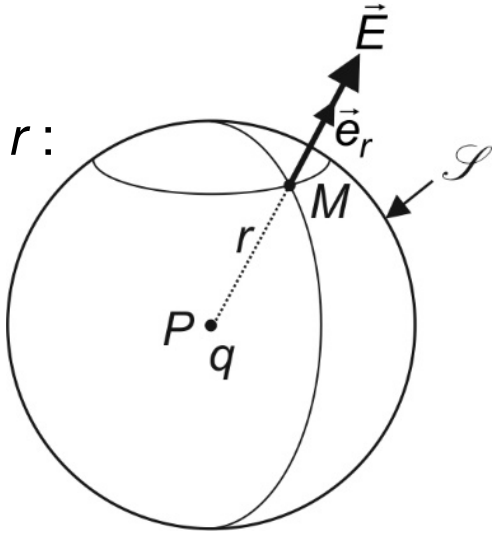
1.4 Calcul du champ et du potentiel électriques créés par des distributions de charges stationnaires

on cherche le champ électrique créé par une charge ponctuelle, placée en un point fixe P du référentiel du laboratoire.

Le potentiel $V(M)$ ne dépend que de la distance r de P à M : $V(P) = V(r)$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r = E_r(r)\vec{e}_r$$

flux de $\vec{E}$ à travers une sphère $\mathscr{S}$ de centre P et de rayon r :



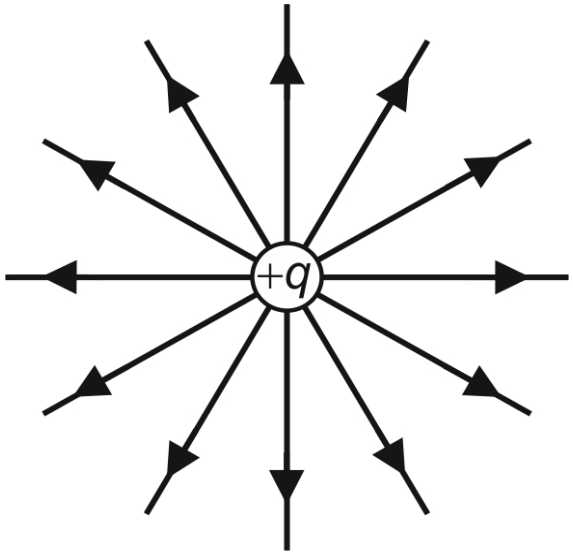
$$\iint_{\mathscr{S}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}} = \iint_{\mathscr{S}} E_r(r)\vec{e}_r\cdot \mathrm{d}^2\mathscr{S}\vec{e}_r = \iint_{\mathscr{S}} E_r(r)\mathrm{d}^2\mathscr{S}$$

$$= E_r(r)\iint_{\mathscr{S}} \mathrm{d}^2\mathscr{S} = E_r(r)\mathscr{S} = 4\pi r^2 E_r(r)$$

or $q_{\text{int}} = q \ \forall r > 0$

théorème de Gauss $\Rightarrow$ $\vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{e}_{P\to M}$

champ **radial** :



lignes de champ électrique
créé par une charge ponctuelle

une charge q_1 en P_1 crée en P_2 le champ : $\vec{E}_1(P_2) = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 P_1P_2^2}\vec{e}_{P_1\to P_2} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_{1\to 2}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{1/2} = q_2\vec{E}_1(P_2) = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_{1\to 2}$$ sur la charge q_2 en P_2

on retrouve la loi de Coulomb énoncée en 1795 pour la force entre deux charges ponctuelles

le potentiel créé par une charge ponctuelle s'obtient par intégration :

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + Cte$$

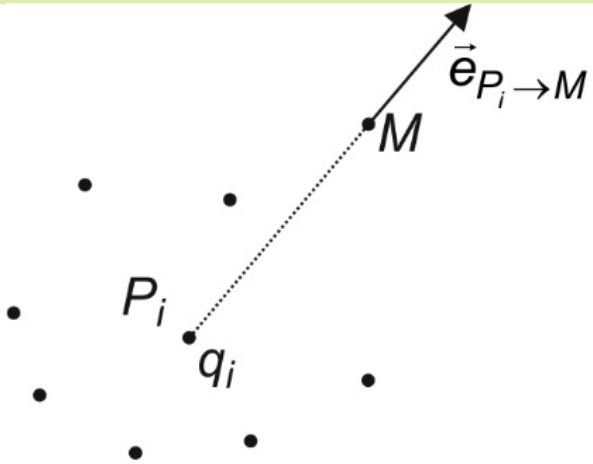
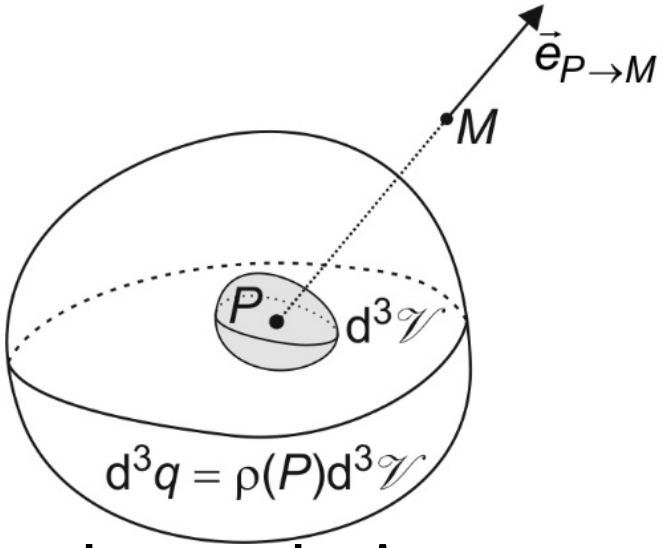
convention : **le potentiel est nul à l'infini d'une distribution de charges *localisée*** (pas de charges à l'infini les unes des autres)

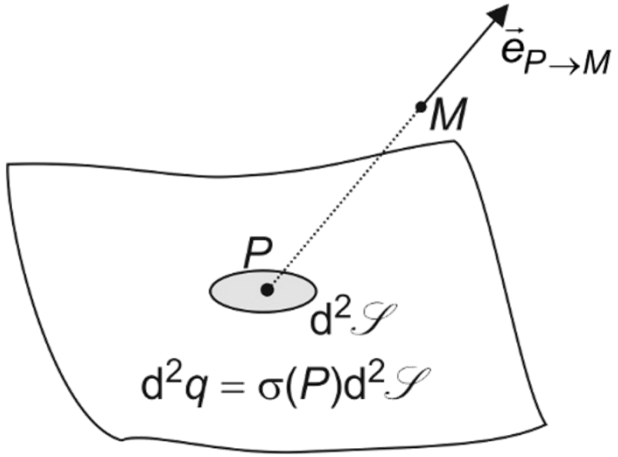
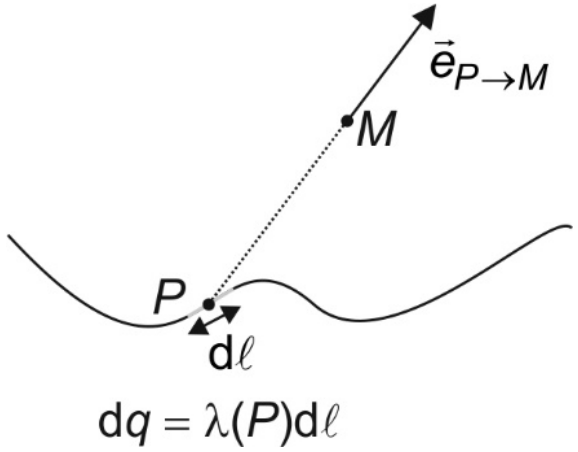
$$\Rightarrow \boldsymbol{V \underset{r\to\infty}{\to} 0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM}}$$

potentiel électrique créé en *M* par la charge ponctuelle *q* placée en *P*.

s'il y a plusieurs charges, les équations de Maxwell étant linéaires, il suffit de *sommer* les champs créés en *M* par chacune des charges pour obtenir champ et potentiel électriques

nature de D	expression de $\vec{E}(M)$	expression de $V(M)$
 charges ponctuelles	$\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 P_i M^2} \vec{e}_{P_i \to M}$	$\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 P_i M}$
 charges volumiques	$\iiint_{P \in D} \frac{\rho(P)d^3\mathscr{V}}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \vec{e}_{P \to M}$	$\iiint_{P \in D} \frac{\rho(P)d^3\mathscr{V}}{4\pi\varepsilon_0 PM}$

nature de D	expression de $\vec{E}(M)$	expression de $V(M)$
 **charges surfaciques**	$\iint_{P\in D} \frac{\sigma(P)d^2\mathscr{S}}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{e}_{P\to M}$	$\iint_{P\in D} \frac{\sigma(P)d^2\mathscr{S}}{4\pi\varepsilon_0 PM}$
 **charges linéiques**	$\int_{P\in D} \frac{\lambda(P)d\ell}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{e}_{P\to M}$	$\int_{P\in D} \frac{\lambda(P)d\ell}{4\pi\varepsilon_0 PM}$

les expressions du champ électrique sont toujours vraies, pas celles du potentiel qui ne sont vraies **que** pour des distributions localisées

1.5 Continuité / discontinuité des champs

on montre que le champ électrique est continu dans le cas d'une distribution volumique

comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, V est obtenu par intégration spatiale de $\vec{E}$

on peut donc imposer V continu en tout point où $\vec{E}$ est fini, même si $\vec{E}$ est discontinu en ce point, comme c'est le cas pour une distribution de charges surfacique.

distribution D	$\vec{E}$	V
ponctuelle	∞ sur D ; $\propto \frac{1}{r^2}$ au voisinage de D	∞ sur D ; $\propto \frac{1}{r}$ au voisinage de D
volumique	continu	continu
surfacique	discontinu : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{N}_{1\to 2}$	continu
linéique	∞ sur D ; $\propto \frac{1}{r}$ au voisinage de D	∞ sur D ; $\propto \ln r$ au voisinage de D

1.6 Caractère polaire du champ électrique

$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{e}_{P\to M}$ est indépendant de la règle d'orientation choisie pour l'espace

Le sens du champ électrique ne dépend pas de l'orientation de l'espace. On dit que c'est un *vecteur polaire*.

$\vec{F} = q\vec{E}$ qui s'exerce sur une charge q est bien sûr également un vecteur polaire

(le sens d'une force ne peut pas dépendre de l'orientation de l'espace !)

1.7 Symétries

les symétries de $\vec{E}$ sont celles de tout champ vectoriel polaire

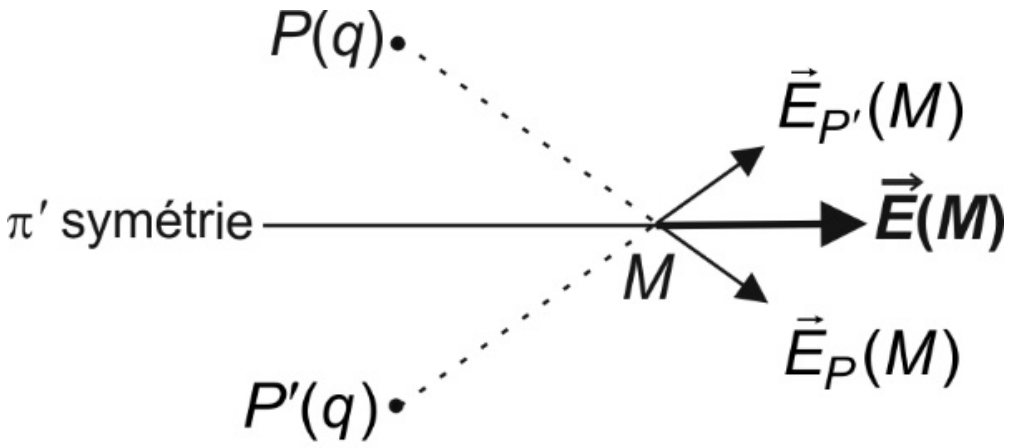
soit une distribution de charges D. Il faut distinguer :

— la recherche de ***plans de symétrie ou d'antisymétrie*** **de D** passant par un point M donné (pour montrer que **certaines composantes de $\vec{E}$ sur la base locale en M, judicieusement choisie, sont nulles**).

— Les ***invariances*** **de D** (ce qui permet de montrer que **les composantes de $\vec{E}$ sont indépendantes de certaines coordonnées de M**).

- **symétrie plane / antisymétrie plane**

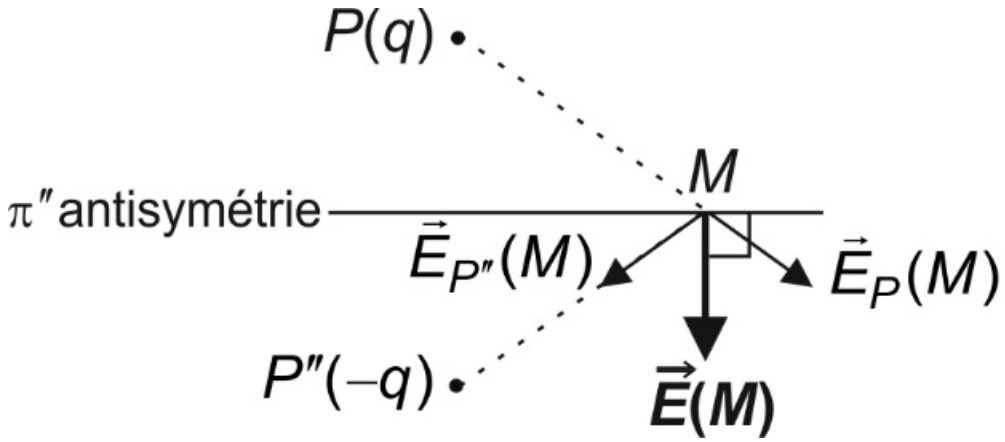
un plan π' est un plan de symétrie de D si les charges, en deux points *P* et *P'* symétriques par rapport à π', sont identiques



si *M* appartient à π', plan de symétrie de la distribution de charges D, alors

$\vec{E}(M)$ appartient à π'

un plan π'' est un plan d'antisymétrie de D si les charges, en deux points *P* et *P*′′ symétriques par rapport à π'', sont opposées



si *M* appartient à π'', plan d'antisymétrie de la distribution de charges D, alors

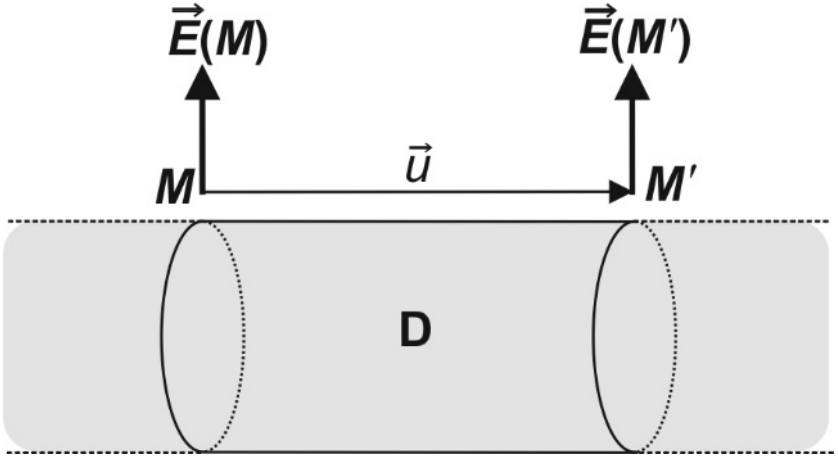
$\vec{E}(M)$ est orthogonal à π''

• invariance des distributions

si D est invariante par une **isométrie** I (translation, rotation, symétrie plane) et

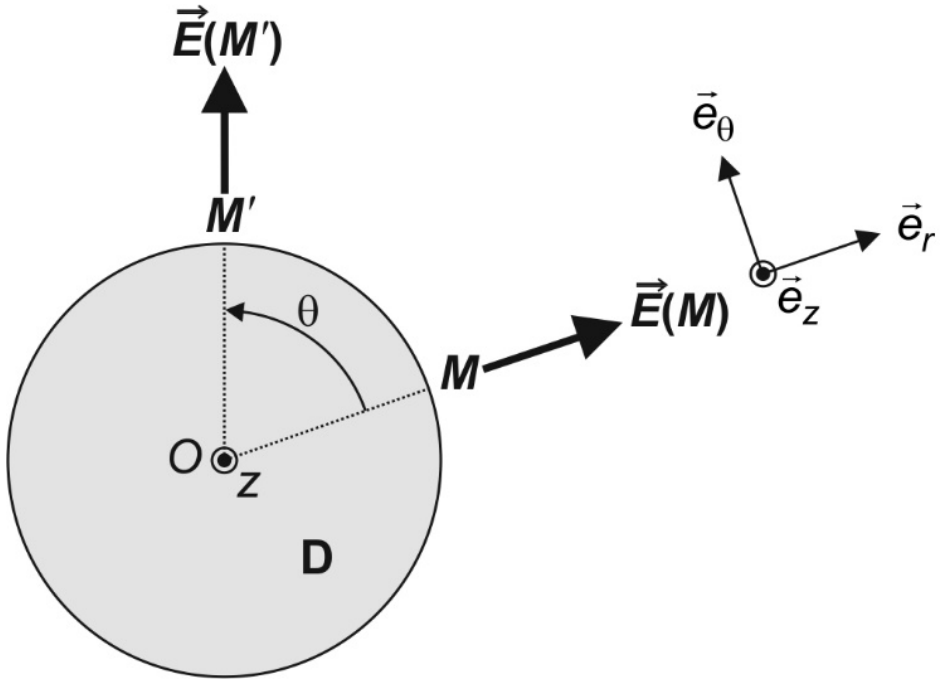
$M' = I(M)$, alors $\vec{E}(M') = I\left[\vec{E}(M)\right]$ et $V(M') = V(M)$

— si **une** translation T de vecteur $\vec{u}$ laisse invariante D (qui doit donc être de taille infinie), on doit avoir le même champ en M qu'au point M' qui se déduit de M par la translation T



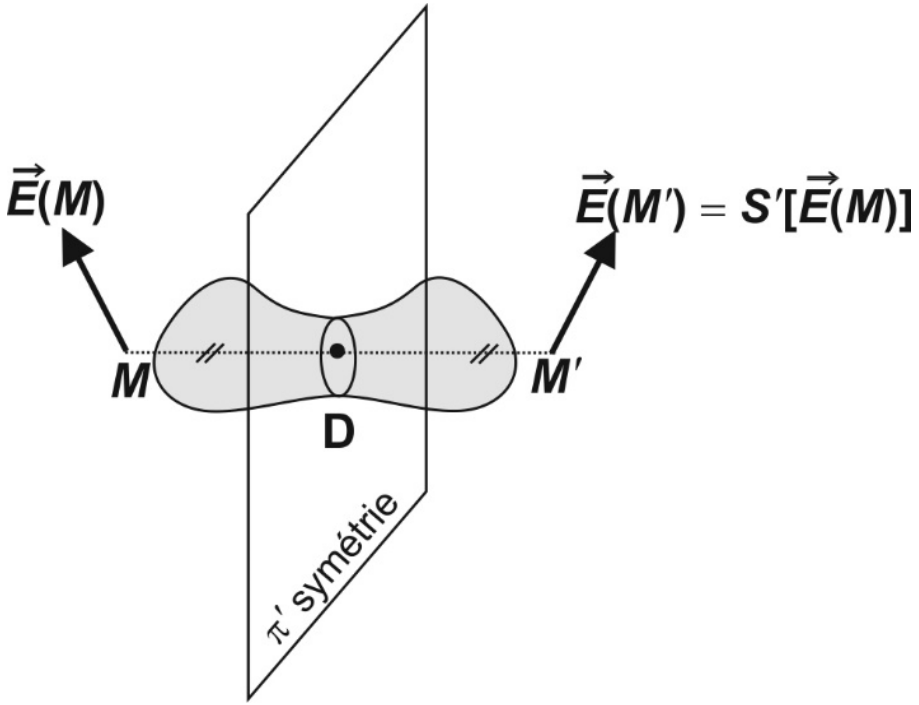
si **toute** translation selon $\vec{e}_z$ laisse invariante D, alors $\vec{E}$ est indépendant de z

— si **une** rotation *R* d'angle θ et d'axe *Oz* laisse invariante D, le champ $\vec{E}$ au point *M'* qui se déduit de *M* par *R*, se déduit de celui en *M* par la rotation *R*.

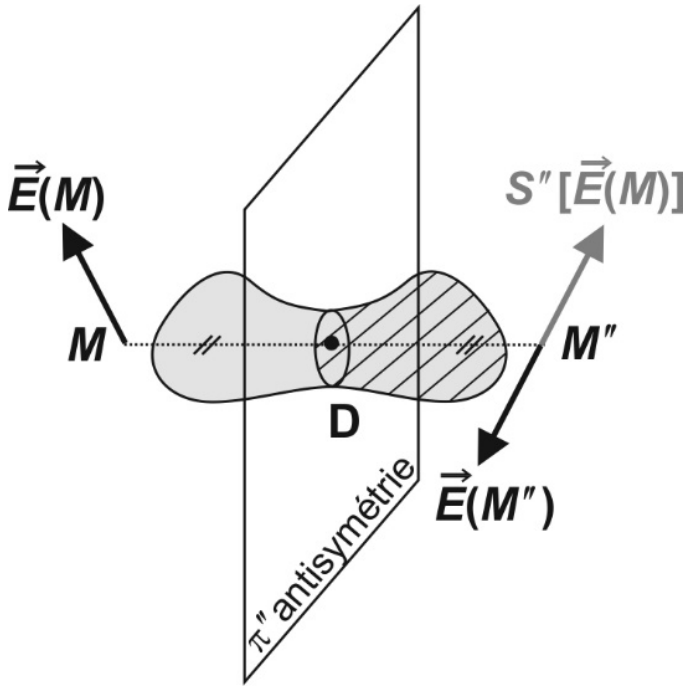


si **toute** rotation autour de *Oz* laisse invariante D, alors les composantes E_r, E_θ et E_z sont indépendantes de θ

— si une symétrie S' par rapport à un plan π' laisse invariante D, le champ électrique au point M', qui se déduit de M par S', est le symétrique par rapport à π' de celui en M

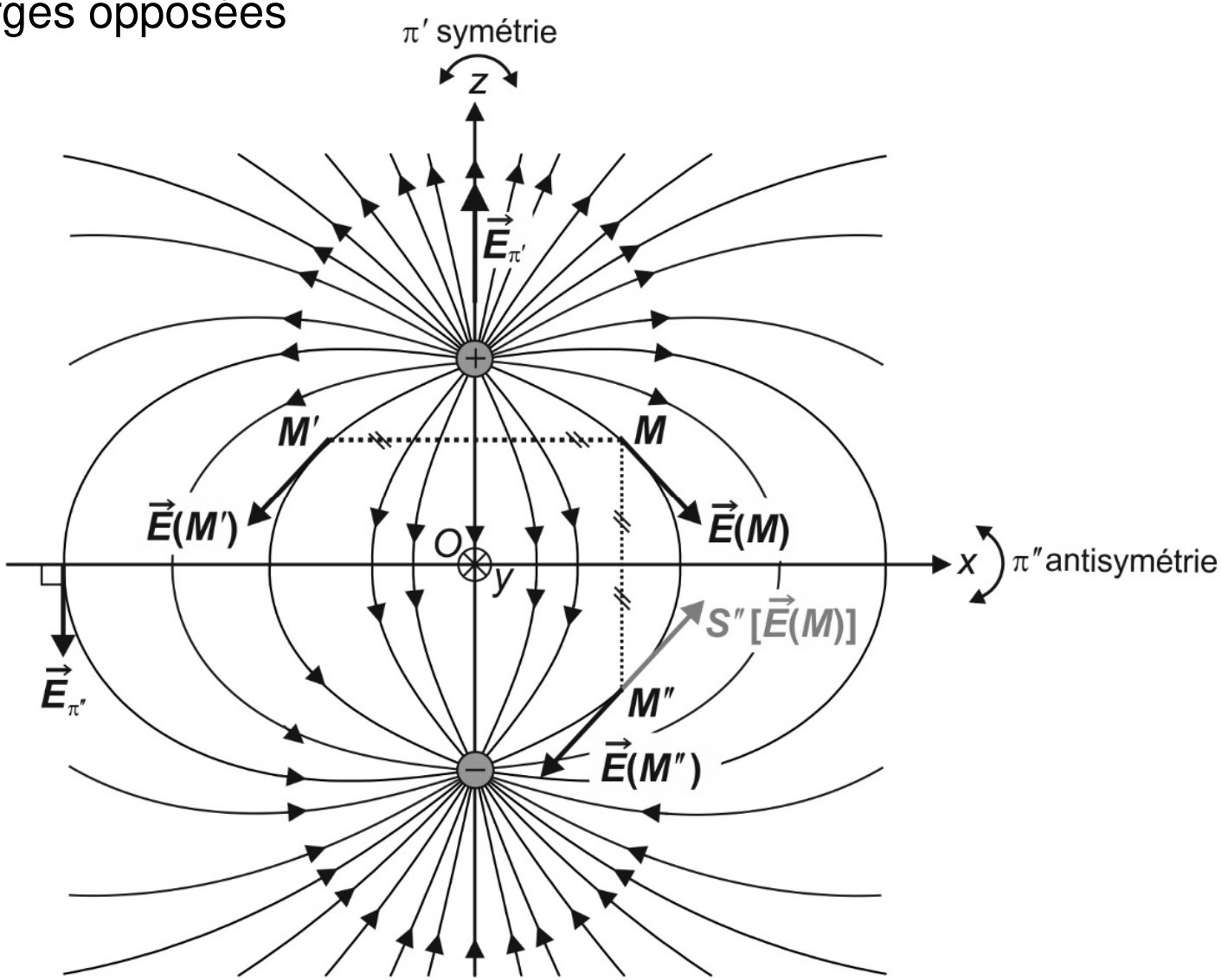


— si D possède un plan π'' d'antisymétrie et $M'' = S''(M)$, où S'' est la symétrie par rapport à π'', $\vec{E}(M'') = -S''\left[\vec{E}(M)\right]$ et $V(M'') = -V(M)$ en prenant $V = 0$ sur π''



exemple : doublet de charges opposées

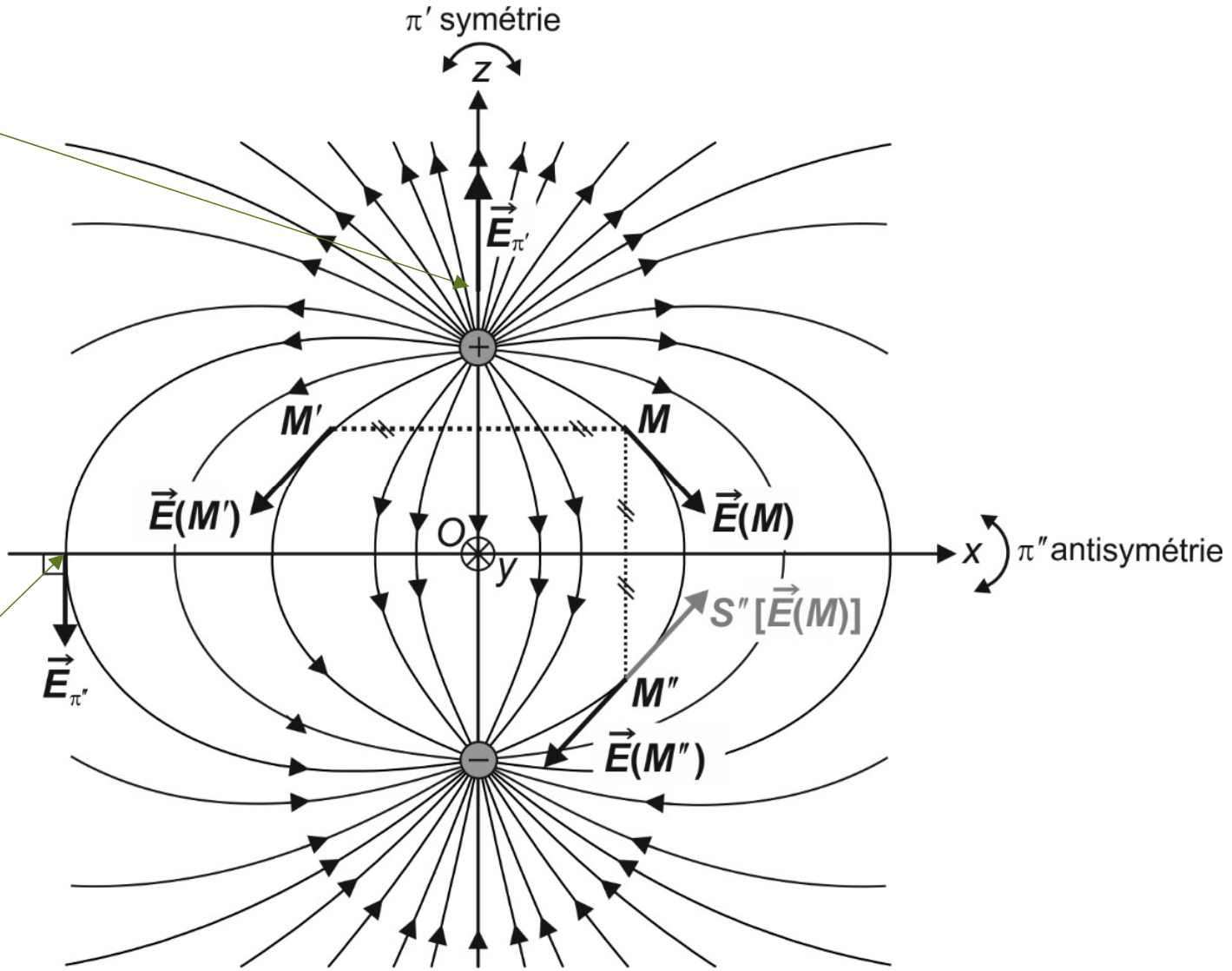
xOy (plan médiateur des charges) est un plan d'antisymétrie de *D*



yOz (ou tout plan contenant *Oz*) est un plan de symétrie de D

en $M \in Oz$, le champ doit être contenu dans tous les plans de symétrie passant par M, donc dans tout plan contenant Oz. On en déduit que le champ est porté par $\vec{e}_z$

en $M \in xOy$, le champ est normal à ce plan, donc porté par $\vec{e}_z$

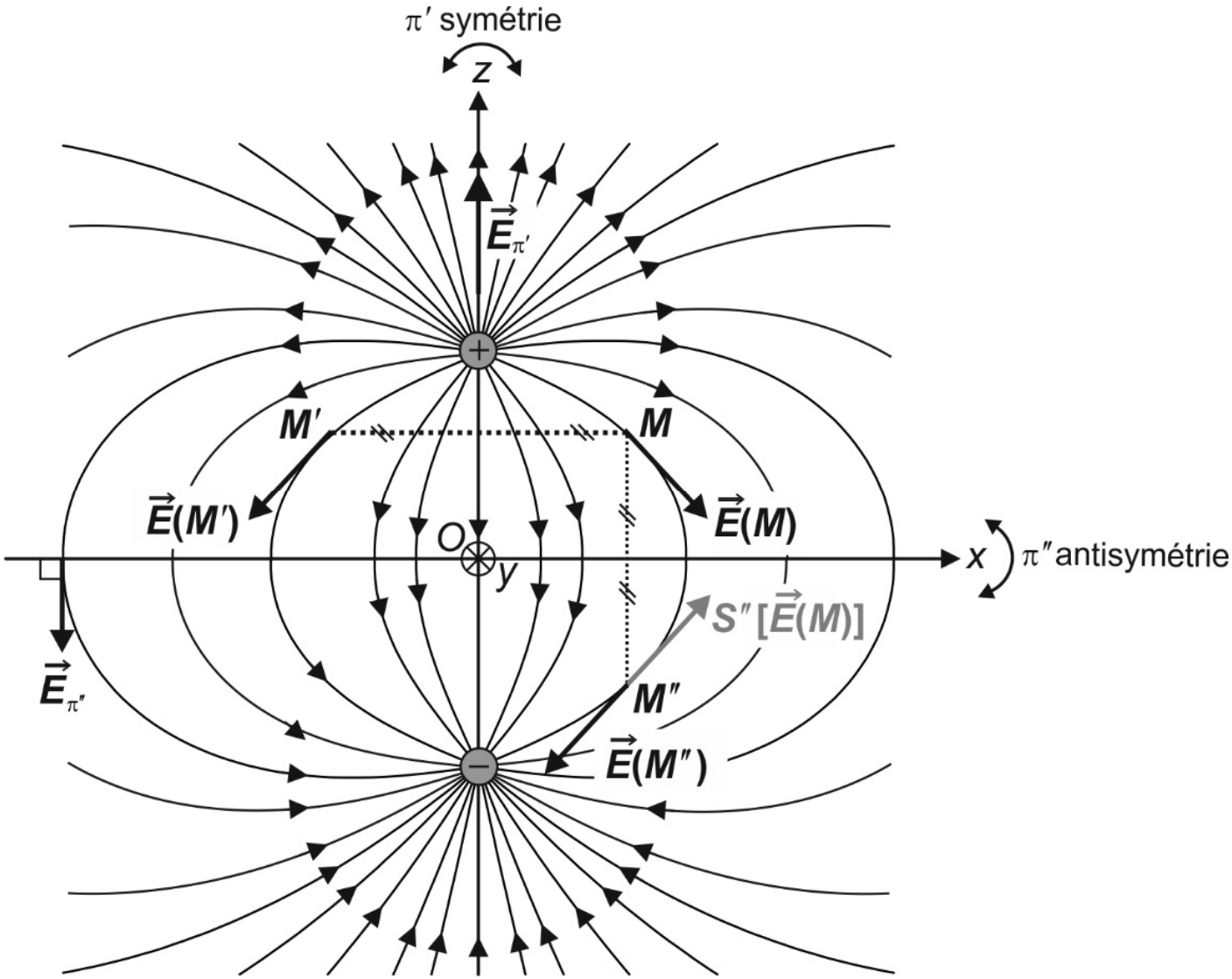


le plan de la figure ($y = 0$) est un plan de symétrie, donc il contient $\vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{E}(x,z) = E_x(x,z)\vec{e}_x + E_z(x,z)\vec{e}_z$$

avec :

$$\begin{cases} E_x(-x,z) = -E_x(x,z) \\ E_z(-x,z) = E_z(x,z) \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} E_x(x,-z) = -E_x(x,z) \\ E_z(x,-z) = E_z(x,z) \end{cases}$$