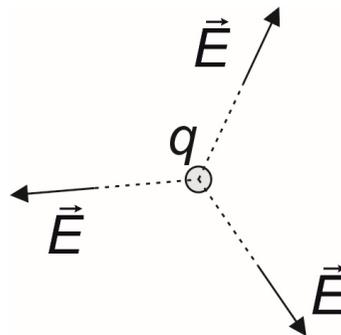


1. CHARGE ET COURANT ÉLECTRIQUE

1.1 Charge

- charge ponctuelle



soit un système Σ qui possède une charge électrique totale q , le modèle de charge ponctuelle est valable :

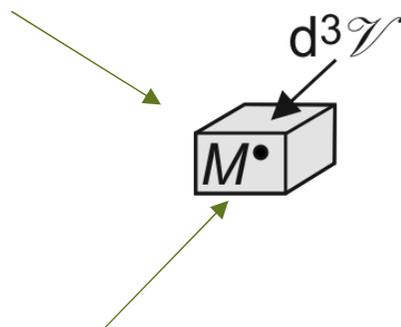
>>> si l'on s'intéresse au champ électrique créé par Σ en un point M situé à une distance grande devant la taille de Σ

>>> ou si Σ possède la symétrie sphérique de centre O , (on montre : théorème de Gauss), que le champ qu'il crée *hors de ses frontières* est le même que celui créé par une charge q placée au point O

ce modèle est souvent utilisé pour les particules élémentaires chargées (protons, électrons, ions)

● charge volumique

volume *mésoscopique* (intermédiaire entre l'échelle microscopique et macroscopique) de matière chargée autour d'un point M (noté $d^3\mathcal{V}$ car il est très petit à l'échelle macroscopique) contenant une charge d^3q



densité volumique de charges

$$\rho(M, t) = \frac{d^3q}{d^3\mathcal{V}} \quad (\text{C} \cdot \text{m}^{-3})$$

$d^3\mathcal{V}$ contient d^3N particules de charge q

densité volumique de particules de charge q :

$$n = \frac{d^3N}{d^3\mathcal{V}} \quad (\text{m}^{-3})$$

$$d^3q = q \cdot d^3N = nq d^3\mathcal{V} \Rightarrow \rho = nq$$

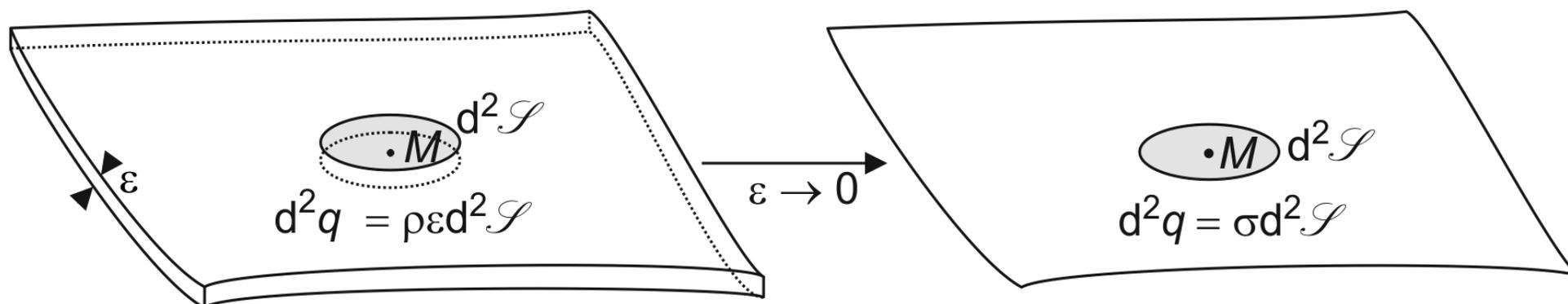
s'il existe *plusieurs* types de particules chargées (exemple : Fe^{3+} et Cl^-) de densité n_i et portant une charge q_i :

$$\rho = \sum_i n_i q_i$$

● charge surfacique

modèle valable lorsque le volume qui contient les charges possède une épaisseur ε très faible devant ses deux autres dimensions (exemple : feuille de papier)

on introduit dans ce cas un modèle où la distribution de charges est une surface, **en faisant tendre ε vers 0**



$$d^2q = \rho \varepsilon d^2\mathcal{J} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \sigma d^2\mathcal{J} \text{ avec}$$

$$\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\rho \varepsilon) \quad (\text{C} \cdot \text{m}^{-2})$$

densité *surfacique* de charges

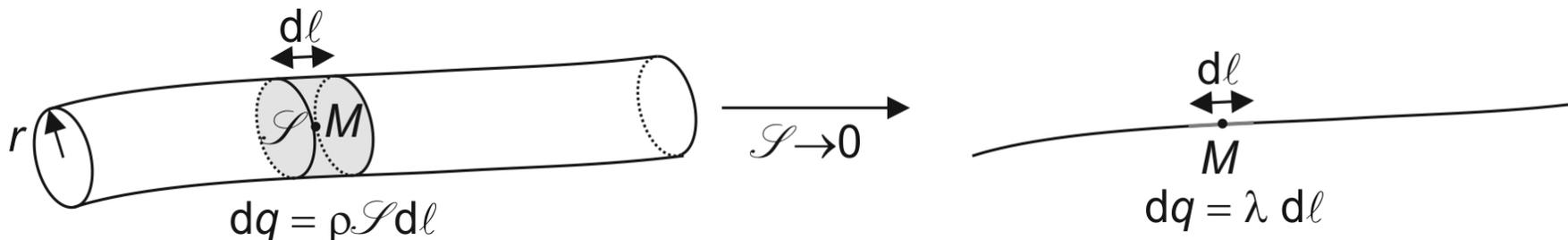
$$d^2q = \sigma d^2\mathcal{J}$$

$\sigma(M, t)$ étant fini, on a $\rho \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\rightarrow} \infty$ dans cette modélisation

● charge linéique

modèle valable si le volume qui contient les charges est un fil de longueur L et de rayon $r \ll L$

on introduit dans ce cas un modèle où la distribution est une courbe, **en faisant tendre la surface $\mathcal{S} = \pi r^2$ vers 0**



$$dq = \rho \mathcal{S} dl = \lambda dl \text{ avec } \lambda = \lim_{\mathcal{S} \rightarrow 0} (\rho \mathcal{S}) \text{ (C} \cdot \text{m}^{-1}\text{) densité linéique de charges}$$

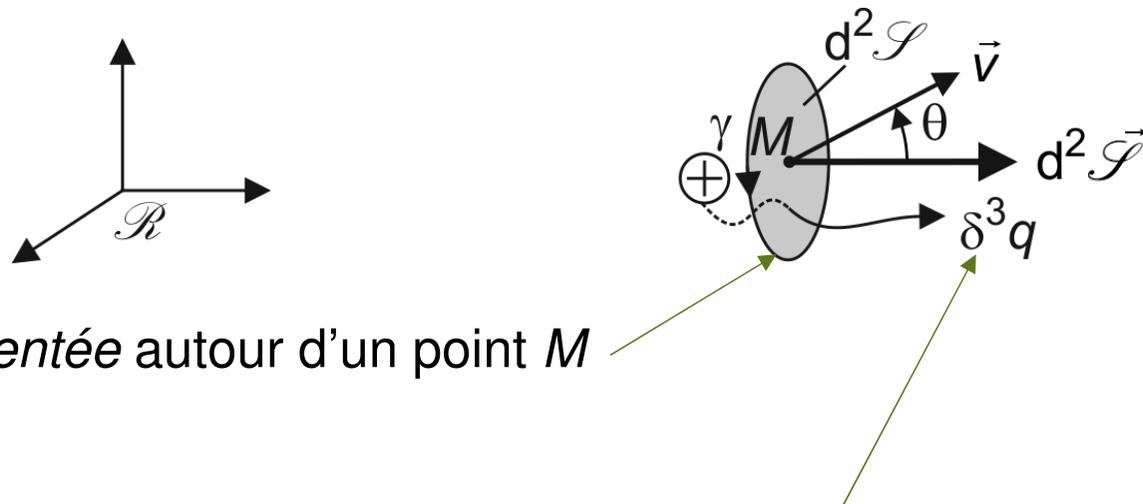
$$dq = \lambda dl$$

$\lambda(M, t)$ étant fini, on a $\rho \rightarrow \infty$ dans cette modélisation

1.2 Courant

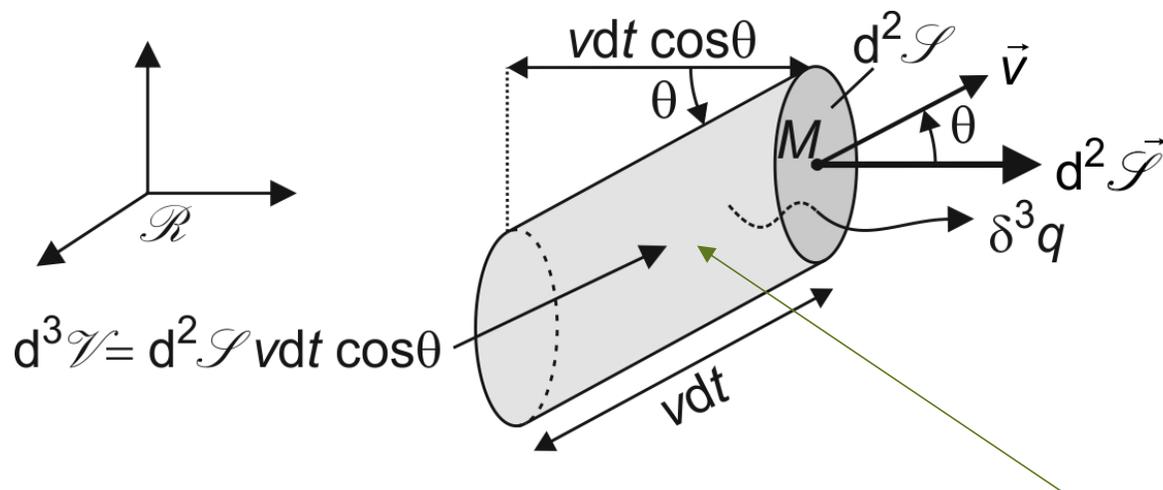
- courant volumique

>>> cas où il n'y a qu'un seul type de particules chargées mobiles qui se déplacent par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} avec un vecteur vitesse $\vec{v} = \vec{v}(M, t)$



surface élémentaire *orientée* autour d'un point M

charge algébrique qui traverse pendant dt la surface $d^2 \mathcal{S}$, dans le sens positif



savoir refaire ce
raisonnement
rigoureusement !

la charge δ^3q provient de ce cylindre
dont le volume est :

$$d^3\mathcal{V} = vdt \cos\theta d^2\mathcal{S} = \vec{v} \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} dt$$

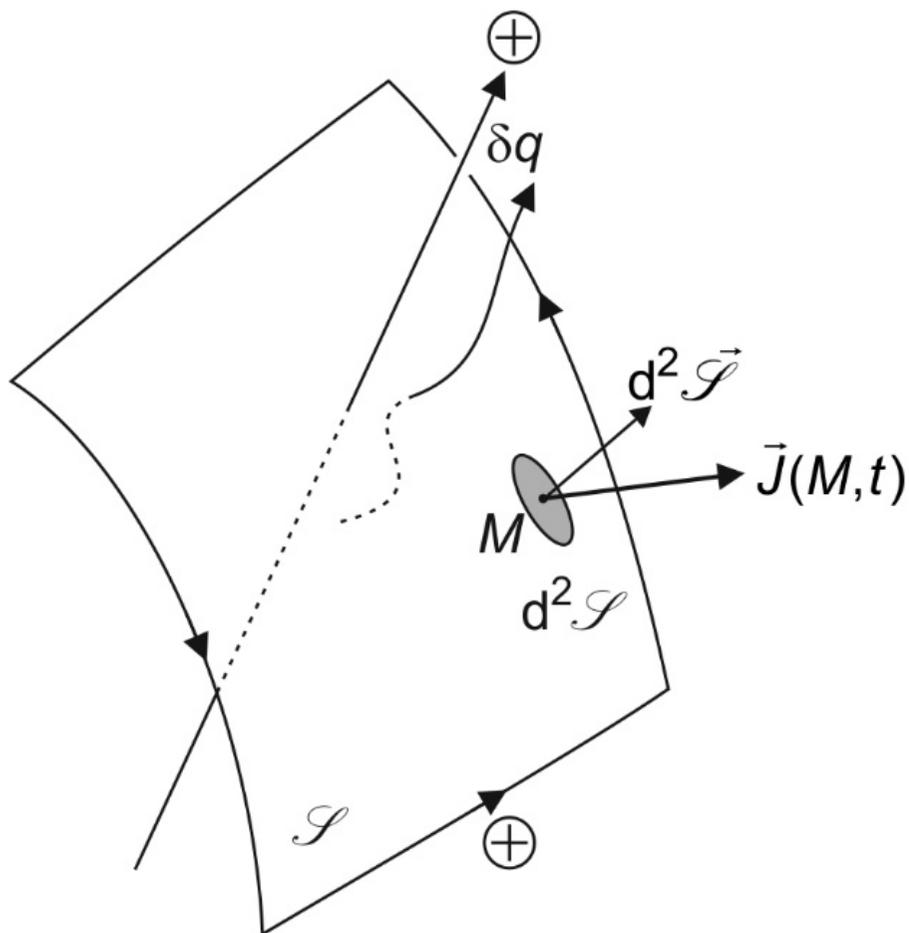
$\Rightarrow \delta^3q = \rho_m \vec{v} \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} dt$ avec $\rho_m = \rho_m(M, t)$ **densité volumique de charges mobiles**

(les charges fixes ne participent pas au courant)

$\vec{J} = \rho_m \vec{v}$ ($\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$) vecteur densité *volumique* de courants

$d^2i = \frac{\delta^3q}{dt} = \vec{J} \cdot d^2\vec{\mathcal{S}}$ intensité du courant traversant M à t

intensité du courant traversant une surface S *finie*, orientée grâce à la règle du tire-bouchon en fonction de l'orientation du contour γ sur lequel elle s'appuie



$$i = \frac{\delta q}{dt} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}}$$

flux du vecteur densité de courants à travers \mathcal{S}

>>> cas où il existe plusieurs types de particules chargées mobiles, de charge

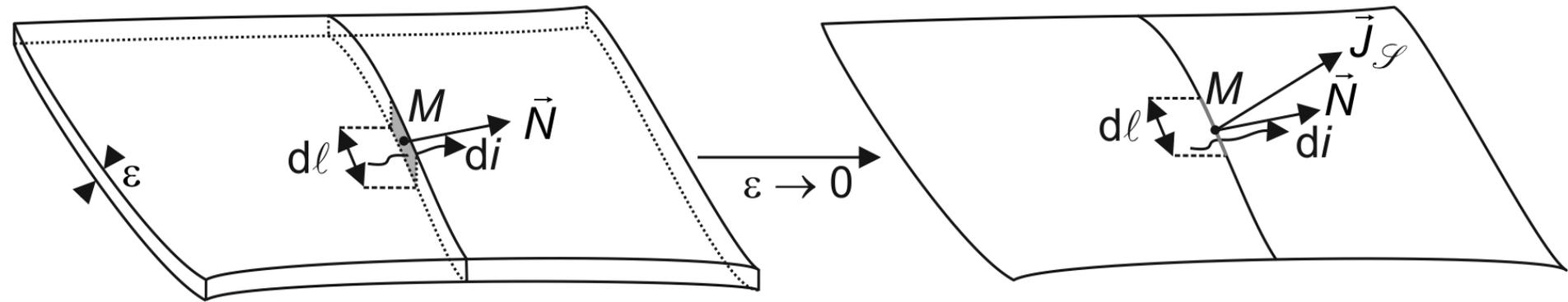
volumique $\rho_{m_i}(M,t)$ et de vitesse d'ensemble $\vec{v}_i(M,t)$:

$$\vec{J} = \sum_i \rho_{m_i} \vec{v}_i = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$

● **courant surfacique**

modèle valable lorsque le volume qui contient les courants possède une épaisseur ϵ très faible devant ses deux autres dimensions

on introduit un modèle de distribution *surfacique* de courants **en faisant tendre ϵ vers 0**



$$di = \vec{J} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \vec{J} \cdot \epsilon dl \vec{N} = \rho_m \vec{v} \epsilon dl \vec{N} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} di = \vec{J}_s \cdot dl \vec{N}$$

$$\sigma_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\rho_m \varepsilon)$$

↑
densité surfacique
de charges *mobiles*

$$\vec{J}_{\mathcal{S}} = \sigma_m \vec{v} \quad (\text{A} \cdot \text{m}^{-1})$$

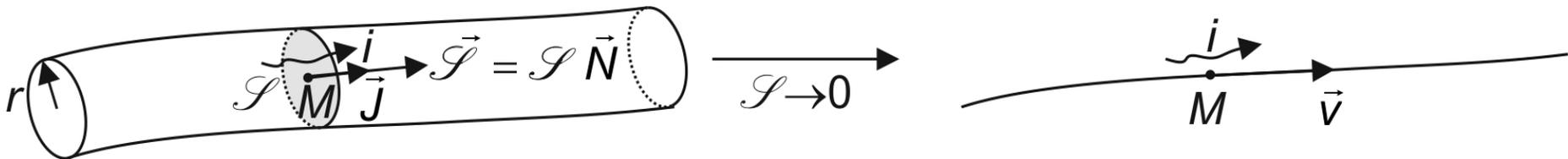
vecteur densité surfacique de courants

vecteur tangent par construction, comme \vec{N} , à la surface qui porte les courants

● courant linéique

modèle valable si le volume qui contient les courants est un fil de longueur L et de rayon $r \ll L$

on introduit dans ce cas un modèle où la distribution est une courbe, **en faisant tendre la surface $\mathcal{S} = \pi r^2$ vers 0**

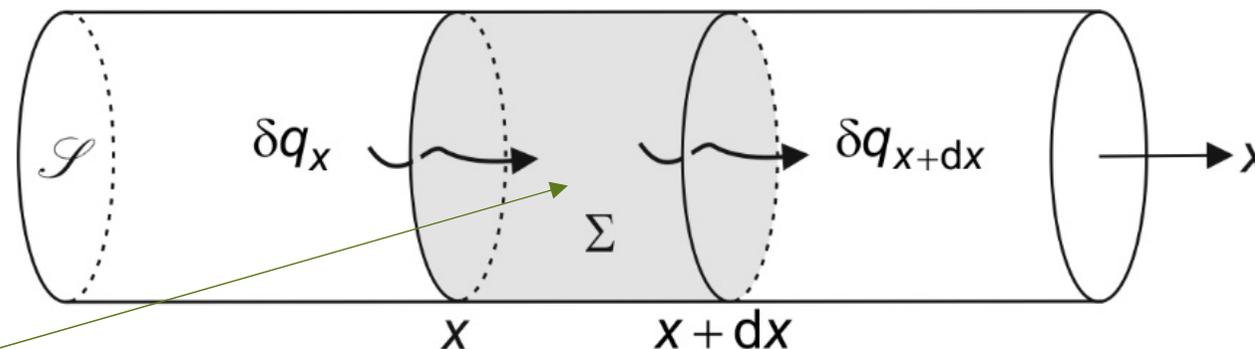


$$i = \vec{J} \cdot \vec{\mathcal{S}} = \vec{J} \cdot \mathcal{S} \vec{N} = \rho_m \mathcal{S} \vec{v} \cdot \vec{N} \quad \xrightarrow{\mathcal{S} \rightarrow 0} \quad \boxed{i = \lambda_m \vec{v} \cdot \vec{N} = \lambda_m v} \quad \text{car } \lambda_m = \lim_{\mathcal{S} \rightarrow 0} (\rho_m \mathcal{S})$$

1.3 Conservation de la charge à 1D

savoir faire un bilan 1D avec rigueur !

à 1D : $\rho(x,t)$, $\vec{v}(x,t) = v(x,t)\vec{e}_x$, $\vec{J}(x,t) = \rho_m(x,t)\vec{v}(x,t)$



système Σ étudié fixe par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} : ouvert, traversé par des charges mobiles

la charge de Σ à t est : $dq(t) = \rho(x,t)\mathcal{S} dx$

la charge de Σ à $t + dt$ est : $dq(t + dt) = \rho(x,t + dt)\mathcal{S} dx$

elle a donc varié entre t et $t + dt$ de : $d[dq(t)] = \underbrace{[\rho(x,t + dt) - \rho(x,t)]}_{\frac{\partial \rho}{\partial t} dt} \mathcal{S} dx$

soit : $d^2q = d[dq(t)] = \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathcal{S} dt dx$

$$\delta q_x = J(x, t) \mathcal{S} dt$$

charge qui traverse \mathcal{S} à l'abscisse x pendant la durée dt , *orientée dans le sens des x croissants*

$$\Rightarrow d^2q = \delta q_x - \delta q_{x+\mathbf{d}x} = \underbrace{[J(x, t) - J(x + \mathbf{d}x, t)]}_{-\frac{\partial J}{\partial x} \mathbf{d}x} \mathcal{S} \mathbf{d}t = -\frac{\partial J}{\partial x} \mathcal{S} \mathbf{d}x \mathbf{d}t$$

\Rightarrow bilan local de charge à 1D (traduit que la variation de charge n'est due qu'aux échanges, donc que la charge se conserve) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

1.4 Conservation de la charge à 3D

bilan local d'une grandeur extensive quelconque x :

$$\frac{\partial \rho_x}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_x = \sigma_x$$

ici, x est la charge q :

$$\begin{cases} \rho_q = \rho \\ \vec{J}_q = \vec{J} = \rho_m \vec{v} \\ \sigma_q = 0 \text{ la charge est une grandeur conservative} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0 \quad \text{équation locale de conservation de la charge}$$

à 1D : $\vec{J}(x, t) = J(x, t) \vec{e}_x$ et on retrouve $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$