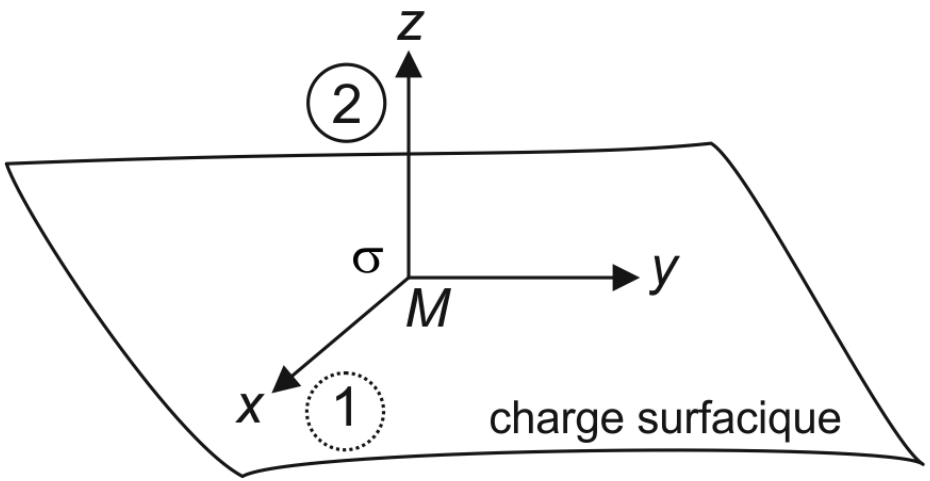
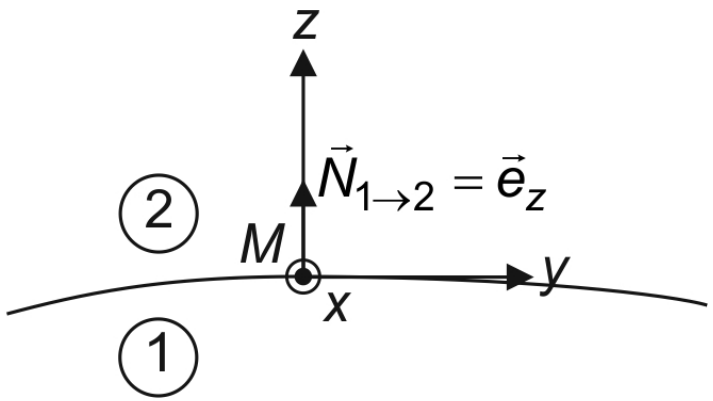
4. CONTINUITÉ / DISCONTINUITÉ SPATIALE DES CHAMPS À LA TRAVERSÉE D'UNE DISTRIBUTION SURFACIQUE DE CHARGES ET DE COURANTS

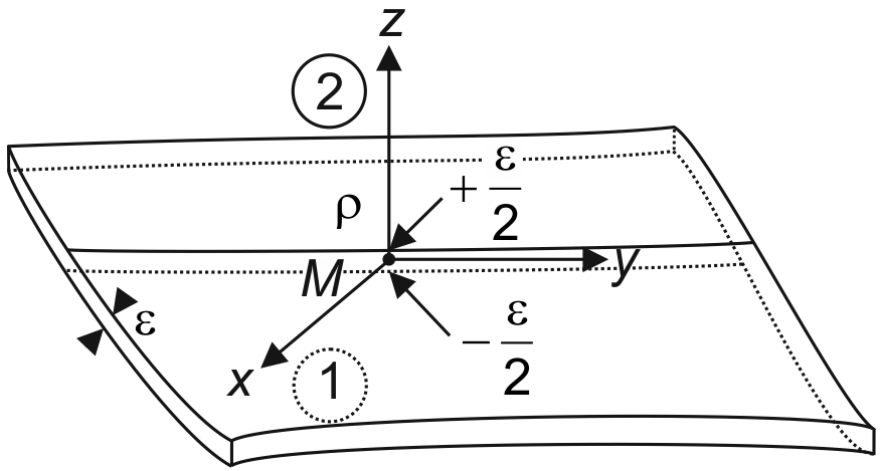
4.1 Relation de passage pour le champ électrique

modélisation surfacique : la charge volumique ρ tend vers l'infini $\Rightarrow$ on ne peut pas utiliser l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$





$\Rightarrow$ on revient à une distribution volumique d'épaisseur ε que l'on fait tendre vers 0



$\Rightarrow$ le champ peut subir une **discontinuité spatiale selon *z*** (mais pas selon *x* ni *y*).

$$\text{(1) M.G : } \operatorname{div}\vec{E} = \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{\text{borné}} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{\text{borné}} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \infty \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \infty$$

il y a discontinuité de la composante *normale* du champ électrique

$$\text{pour } \varepsilon \to 0 : \frac{\partial E_z}{\partial z} \simeq \frac{E_z\left(z=\frac{\varepsilon}{2}\right) - E_z\left(z=-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_z\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - E_z\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\rho\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

$$\underset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} E_z(0^+) - E_z(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ puisque } \sigma = \lim_{\varepsilon\to 0}(\rho\varepsilon)$$

on note $\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}(z=0^-) \\ \vec{E}_2 = \vec{E}(z=0^+) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{E_{2N} - E_{1N} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}}$ où E_N est orienté de 1 vers 2

(2) M.F : $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial y}}_{\text{borné}} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial x}}_{\text{borné}} \\ \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial x}}_{\text{borné}} - \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial y}}_{\text{borné}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial t}}_{\text{borné}} \\ \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial t}}_{\text{borné}} \\ \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial t}}_{\text{borné}} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\partial E_x}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial E_y}{\partial z}$ sont bornés

$\Rightarrow$ continuité de la composante *tangentielle* du champ électrique, ce que l'on note :

$$\boxed{\boldsymbol{E_{2T} = E_{1T}}}$$

résumé : relation de passage pour le champ électrique (formule *intrinsèque*) :

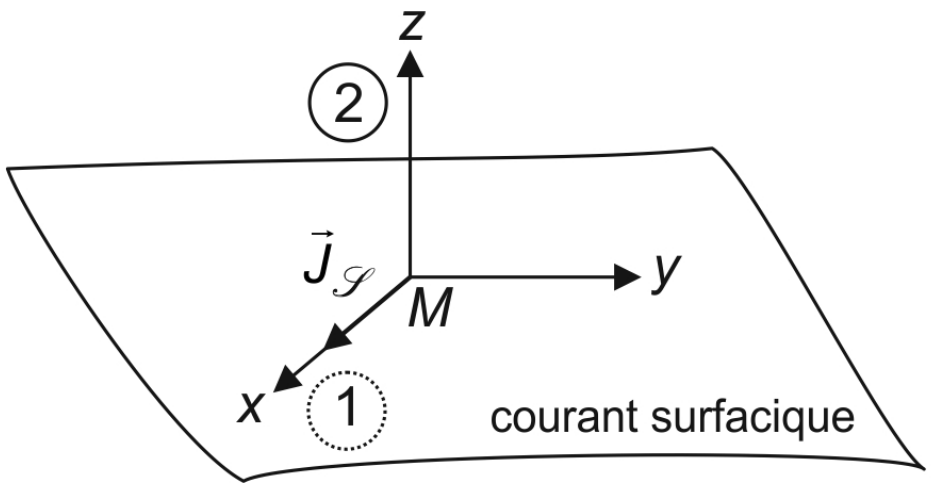
$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{N}_{1\to 2}$$

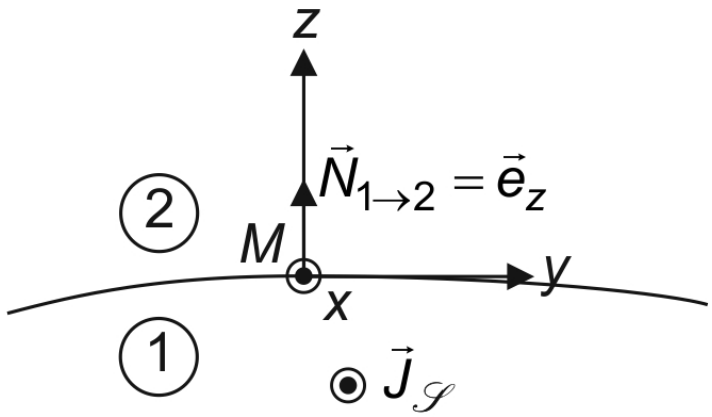
censée être fournie ; mieux vaut connaître…

4.2 Relation de passage pour le champ magnétique

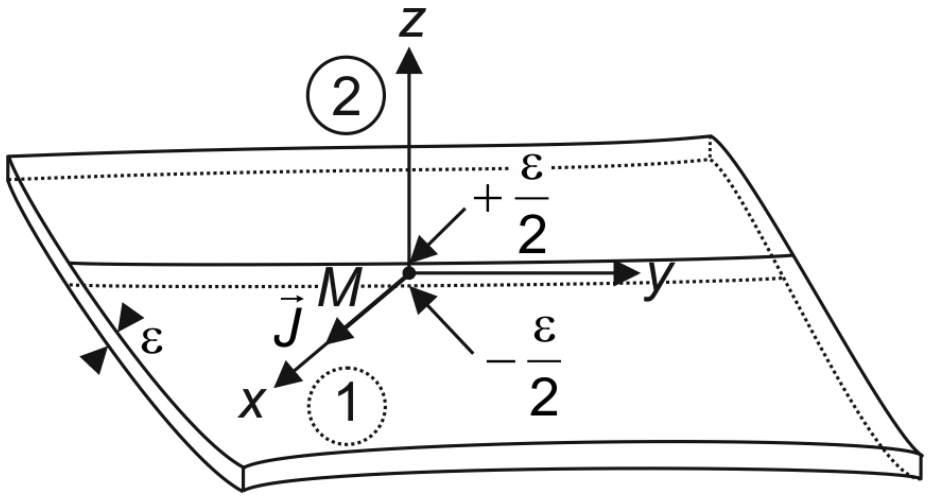
modélisation surfacique : la densité volumique de courants $J = \rho v$ tend vers l'infini

$\Rightarrow$ on ne peut pas utiliser l'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$





$\Rightarrow$ on revient à une distribution volumique d'épaisseur ε que l'on fait tendre vers 0



$$\text{(1) M.A : } \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial y}}_{\text{borné}} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial x}}_{\text{borné}} \\ \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial x}}_{\text{borné}} - \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial y}}_{\text{borné}} \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} J + \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial t}}_{\text{borné}} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \infty \\ \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial t}}_{\text{borné}} \\ \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial t}}_{\text{borné}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_y}{\partial z} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \infty \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} \text{ borné} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ continuité de la composante *tangentielle* B_x ($/ / \vec{J}_{\mathscr{S}}$) du champ magnétique

$\Rightarrow$ discontinuité de la composante *tangentielle* B_y ($\perp \vec{J}_{\mathscr{S}}$) du champ magnétique

pour $\varepsilon \to 0$: $-\dfrac{\partial B_y}{\partial z} \simeq -\dfrac{B_y\left(z=\dfrac{\varepsilon}{2}\right)-B_y\left(z=-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon} = \mu_0 \rho v \Rightarrow B_y\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)-B_y\left(-\dfrac{\varepsilon}{2}\right) = -\mu_0 \rho \varepsilon v$

$\underset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} B_y(0^+)-B_y(0^-) = -\mu_0 \sigma v = -\mu_0 J_{\mathscr{S}}$ puisque $\sigma = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\rho\varepsilon)$ et que $J_{\mathscr{S}} = \sigma v$

(2) M.T : $\mathrm{div}\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\dfrac{\partial B_x}{\partial x}}_{\text{borné}} + \underbrace{\dfrac{\partial B_y}{\partial y}}_{\text{borné}} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial B_z}{\partial z}$ est borné

$\Rightarrow$ continuité de la composante *normale* du champ magnétique, ce que l'on note :

$$\boldsymbol{B_{2N} = B_{1N}}$$

avec : $\begin{cases} \vec{B}_1 = \vec{B}(z=0^-) \\ \vec{B}_2 = \vec{B}(z=0^+) \end{cases}$

résumé : relation de passage pour le champ magnétique (formule *intrinsèque*) :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_{\mathscr{S}} \wedge \vec{N}_{1\to 2}$$

censée être fournie…

en effet : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 J_{\mathscr{S}} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = -\mu_0 J_{\mathscr{S}} \vec{e}_y$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot \vec{e}_x = 0 \\ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot \vec{e}_y = -\mu_0 J_{\mathscr{S}} \\ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot \vec{e}_z = 0 \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} B_x(0^+) = B_x(0^-) \\ B_y(0^+) - B_y(0^-) = -\mu_0 J_{\mathscr{S}} \\ B_z(0^+) = B_z(0^-) \end{cases}$$