



**RECUEIL DE TD**  
**ÉLECTROMAGNÉTISME**





# LES ÉQUATIONS DE MAXWELL

## 1. Potentiels électromagnétiques 🐦 🐦

- 1) Montrer en utilisant les équations de Maxwell-Thomson et de Maxwell-Faraday que  $\vec{E}(M,t)$  et  $\vec{B}(M,t)$  peuvent s'exprimer à l'aide de dérivées spatio-temporelles d'un champ potentiel scalaire  $V(M,t)$  et d'un champ potentiel vecteur  $\vec{A}(M,t)$ .
- 2) Il y a-t-il unicité du couple  $(V_0, \vec{A}_0)$  dont dérive un champ donné  $(\vec{E}, \vec{B})$  ?

*réponses* : 1)  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  et  $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  2) non

## 2. Une résolution des équations de Maxwell dans le vide 🐦

- 1) Donner les équations de Maxwell dans le vide.

On cherche une solution sous la forme  $\vec{E} = f(z)e^{-t/\tau}\vec{e}_x$  et  $\vec{B} = g(z)e^{-t/\tau}\vec{e}_y$

- 2) Montrer que M.T et M.G sont bien vérifiées.  
 3) Déterminer le système d'équations différentielles liant  $f$  et  $g$ .  
 4) On impose que  $f$  est paire et que  $\vec{E}(x=0, y=0, z=0, t=0) = E_0\vec{e}_x$ .  
 En déduire l'expression du champ électromagnétique.

*réponses* : 2) On a bien  $\text{div } \vec{B} = 0$  et  $\text{div } \vec{E} = 0$  3)  $g = \tau f'$  et  $f = \tau c^2 g'$  4)  $\vec{E} = E_0 \text{ch}\left(\frac{z}{\tau c}\right) e^{-t/\tau} \vec{e}_x$  et  $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \text{sh}\left(\frac{z}{\tau c}\right) e^{-t/\tau} \vec{e}_y$

## 3. Analyse dimensionnelle 🐦

- 1) Montrer à partir des équations de Maxwell que  $[\epsilon_0 \mu_0] = \text{T}^2 \text{L}^{-2}$

## 4. Distributions inconnues 🐦 🐦

- 1) On considère une distribution de charges créant un champ électrique stationnaire :  
 $\vec{E} = E_0\vec{e}_z$  pour  $z > 0$  et  $\vec{E} = -E_0\vec{e}_z$  pour  $z < 0$ . Quelle est cette distribution ?
- 2) On considère une distribution de courants créant un champ magnétique stationnaire :  
 $\vec{B} = -B_0\vec{e}_y$  pour  $z > 0$  et  $\vec{B} = B_0\vec{e}_y$  pour  $z < 0$ . Quelle est cette distribution ?

*réponses* : 1) charges dans plan  $z=0$  ;  $\sigma = 2\epsilon_0 E_0$  2) courants dans le plan  $z=0$  ;  $\vec{J}_{\mathcal{C}} = 2B_0 / \mu_0 \vec{e}_x$

## 5. Émission isotrope de charges 🐦 🐦 🐦

Une boule quasi ponctuelle de centre  $O$  émet avec une vitesse  $v_0$  en norme  $\alpha$  électrons par unité de temps de façon isotrope à partir de l'instant  $t=0$ .

On néglige toute interaction électromagnétique entre les électrons éjectés.

Le problème possédant la symétrie sphérique, les champs sont de la forme  $\vec{A}(r,t) = A(r,t)\vec{e}_r$  en coordonnées sphériques.

- 1) Calculer la densité volumique de charge  $\rho(r,t)$  pour  $r > v_0 t$  puis pour  $0 < r < v_0 t$ . En déduire la densité volumique de courants  $\vec{J}(r,t)$ .
- 2) Montrer que le champ électromagnétique suivant vérifie bien les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \vec{E}(r,t) = \vec{0} \text{ pour } r > v_0 t \text{ et } \vec{E}(r,t) = \frac{\alpha e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( t - \frac{r}{v_0} \right) \vec{e}_r \text{ pour } 0 < r < v_0 t \\ \vec{B}(r,t) = \vec{0} \quad \forall r \end{cases}$$

- 3) Calculer le vecteur de Poynting ainsi que la puissance électromagnétique qui traverse une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O$ .

4) Calculer la densité d'énergie électromagnétique  $u$  ainsi que la puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges. Mettre en relation ces deux grandeurs et commenter.

5) Représenter  $E_r(r,t)$  en fonction de  $r$  à différents instants.

$$\text{réponses : 1) } \rho = \begin{cases} 0 & \text{pour } r > v_0 t \\ -\frac{\alpha e}{4\pi r^2 v_0} & \text{pour } 0 < r < v_0 t \end{cases} \quad \text{et } \vec{J} = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } r > v_0 t \\ -\frac{\alpha e}{4\pi r^2} \vec{e}_r & \text{pour } 0 < r < v_0 t \end{cases}$$



# CHAMP ÉLECTRIQUE EN RÉGIME STATIONNAIRE

## • Théorème de Gauss

### 1. Potentiel de Yukawa

Chaque point de l'espace étant repéré par la distance  $r$  à un point fixe  $O$ , on considère le système de charges créant le potentiel

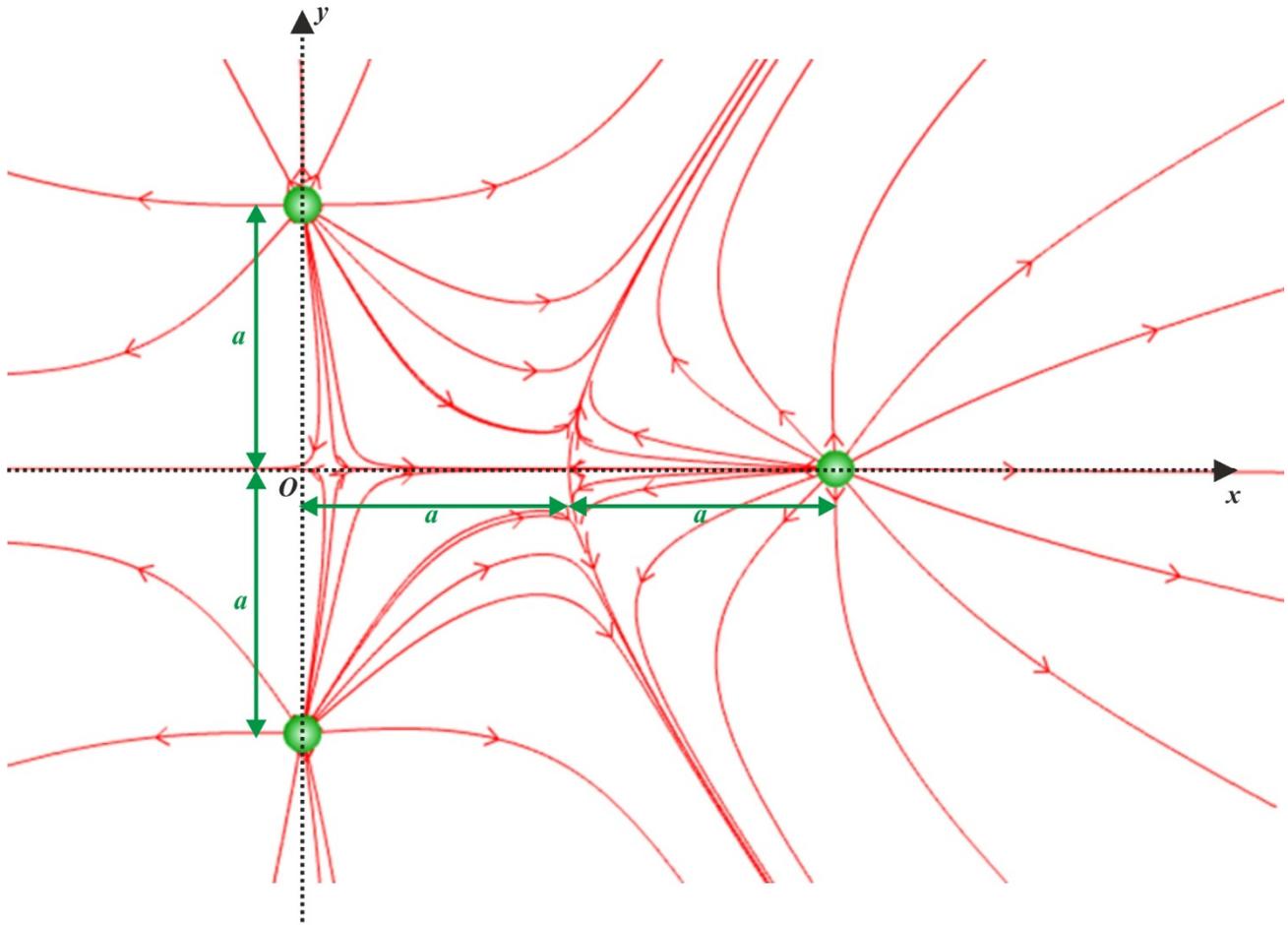
électrostatique  $V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{a}}$ , où  $e$  est la charge d'un proton et  $a = 0,53 \cdot 10^{-10}$  m.

- 1) Déterminer la charge  $q(r)$  contenue dans une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ . En déduire la charge contenue dans tout l'espace puis la charge ponctuelle située en  $O$ . Quel est le système physique créant le potentiel de Yukawa ?
- 2) En plus de la charge ponctuelle en  $O$ , il existe dans tout l'espace une distribution volumique de charge non uniforme de densité  $\rho(r)$ . Calculer  $\rho(r)$ .
- 3) Quelle est l'expression du potentiel  $V_1(r)$  créé par la charge ponctuelle en  $O$  ? En déduire l'expression du potentiel  $V_2(r)$  créé par la distribution volumique de densité  $\rho(r)$ . Calculer  $V_2$  en  $O$ . Commenter son expression.

réponses : 1)  $q(r) = e \left[ 1 + \frac{r}{a} \right] e^{-\frac{r}{a}}$  2)  $\rho(r) = \frac{-e}{4\pi a^2 r} e^{-\frac{r}{a}}$  3)  $V_2(O) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 a}$

### 2. Charges inconnues

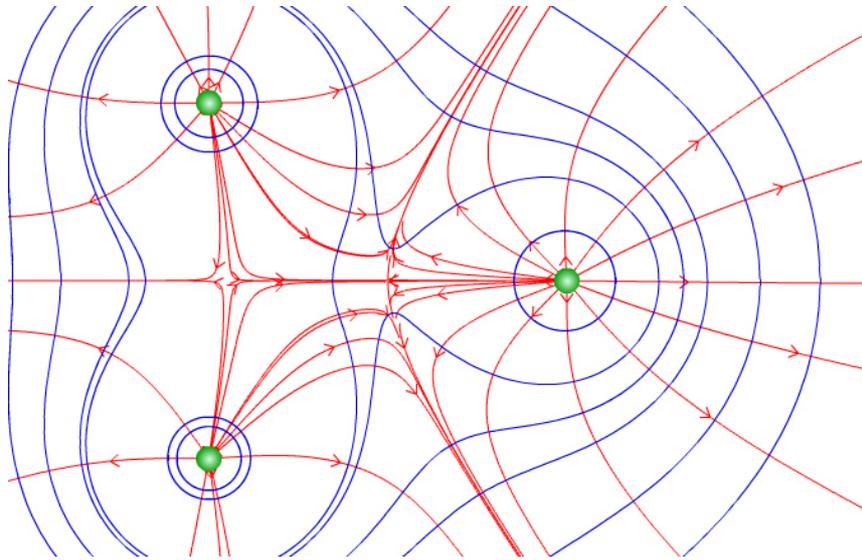
On considère la carte de champ électrique ci-dessous.



- 1) Quel est le signe des charges représentées par des ronds ? Il y a-t-il des charges ailleurs ?
- 2) Évaluer tous les rapports de charge.
- 3) Donner l'allure de quelques équipotentielles.

*réponses* : 1) trois particules chargées positivement dont deux identiques de charge  $Q$  sur  $Oy$  2) la troisième charge vaut  $\frac{Q}{\sqrt{2}}$

3)



### 3. Fil infini chargé 📐 🦋 🦋

On considère un fil rectiligne infini chargé avec une charge linéique uniforme  $\lambda$ .

- 1) Calculer le champ électrique  $\vec{E}(M)$  en tout point  $M$  de l'espace, puis le potentiel  $V(M)$ .

*réponses* : 1)  $E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$

## • Énergie

### 4. Évaluation du rayon d'un noyau atomique 📐 🦋 🦋

- 1) Calculer de deux manières différentes l'énergie électrostatique d'une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$ , portant une charge  $Q$  uniformément répartie en volume.

- 2) On considère deux noyaux supposés sphériques de même rayon  $R$ , uniformément chargés en volume :  ${}^A_Z X$  et  ${}^A_{Z+1} Y$ . Calculer leur différence d'énergie électrostatique  $\Delta U_e$  en fonction de  $Z$  et de  $R$ .

A.N :  $\Delta U_e = 2,79 \text{ MeV}$  entre  ${}^{11}_5 B$  et  ${}^{11}_6 C$  : calculer  $R$  en fermis (1 fermi vaut  $10^{-15} \text{ m}$ ).

*réponses* : 1)  $U_e = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$  2)  $\Delta U_e = \frac{3(2Z+1)e^2}{20\pi\epsilon_0 R}$  ;  $R = 3,4 \text{ fm}$

### 5. Évolution d'un système de quatre charges identiques 📐 🦋 🦋 🦋

- 1) On considère quatre particules ponctuelles de masse  $m$  et de charge  $q$  situées aux sommets d'un tétraèdre régulier de côté  $d$ . On les abandonne sans vitesse initiale. Déterminer la trajectoire des charges et la vitesse limite de chaque charge.

*réponses* : 1)  $v_\infty = \sqrt{\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 md}}$

## • Dipôle électrique

### 6. Modèle de Thomson

Lorsqu'un atome ou une molécule est placé dans un champ électrique extérieur uniforme  $\vec{E}_0$ , il acquiert un moment dipolaire  $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_0$  où  $\alpha$  est la polarisabilité de l'atome.

1) Quelle est la dimension de  $\alpha$  ?

On s'intéresse par la suite au modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène (proposé en 1904) et dans lequel l'électron de charge  $-e$  se déplace à l'intérieur d'une boule de centre  $O$  et de rayon  $a$ , uniformément chargée.

2) Déterminer la densité volumique de charges positives, puis le champ électrique  $\vec{E}(M)$  créé à l'intérieur de la boule par cette distribution.

3) En déduire que l'électron est soumis à une force harmonique analogue à celle qu'exercerait un ressort. Donner la raideur  $k$  du ressort équivalent et la position d'équilibre de l'électron.

4) On applique maintenant un champ extérieur uniforme  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$ . Déterminer la nouvelle position d'équilibre de l'électron puis le moment dipolaire  $\vec{p}$  de l'atome d'hydrogène. Exprimer la polarisabilité  $\alpha$  et commenter.

*réponses* : 4)  $\alpha = 4\pi a^3$

### 7. Champ et potentiel créés par deux fils infinis chargés, approximation dipolaire

On considère le système formé par deux fils infinis parallèles à l'axe  $Oz$  et distants de  $2a$ . L'un, chargé uniformément avec  $-\lambda$ , passe par le point  $A(-a, 0, 0)$  du plan  $xOy$ , l'autre, chargé uniformément avec  $\lambda$ , par le point  $B(a, 0, 0)$ .

On donne en coordonnées cylindriques le potentiel créé par un seul fil chargé uniformément avec  $\lambda$ , confondu avec l'axe  $Oz$  :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

1) Déterminer le potentiel électrostatique  $V(r, \theta)$  en un point  $M$  du plan  $xOy$  repéré par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , tel que  $r \gg a$ .

2) En déduire l'équation polaire des courbes équipotentielles, intersection des surfaces équipotentielles avec le plan  $xOy$ .

3) Déterminer l'équation polaire des lignes de champ.

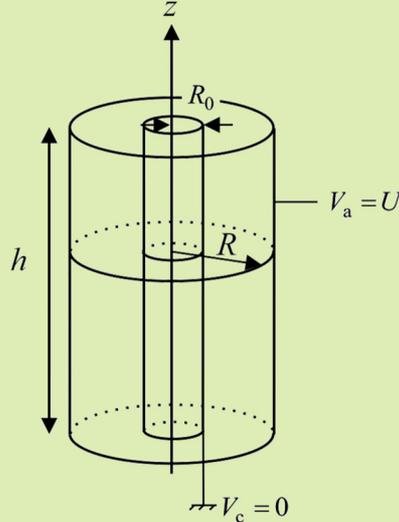
4) Tracer l'allure de la carte de champ et des courbes équipotentielles dans le plan  $xOy$ .

1)  $V(r, \theta) = \frac{\lambda a}{\pi\epsilon_0 r} \cos \theta$  2) les surfaces équipotentielles sont des cylindres dont les bases sont des cercles passant par  $O$  et dont le centre est sur  $Ox$  3)  $E_r = \frac{\lambda a}{\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$  et  $E_\theta = \frac{\lambda a}{\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta$  ; les lignes de champ sont des cercles passant par  $O$  et dont les centres sont sur  $Oy$

## • Équations locales

### 8. Charges d'espace

Une cathode cylindrique (potentiel  $V_c = 0$ ) de rayon  $R_0$  est chauffée : elle peut libérer des électrons avec une vitesse nulle. Elle est entourée par une anode métallique cylindrique de rayon  $R \gg R_0$ , de même axe et même hauteur  $h \gg R$  que la cathode. L'anode est portée au potentiel  $U = V_a > 0$ . On se place en régime permanent. On note  $I > 0$  le courant traversant le dispositif.



1) Montrer qu'il existe des charges d'espace entre l'anode et la cathode. Déterminer la charge volumique  $\rho(r)$  à une distance  $r$  de l'axe en fonction de  $I$ ,  $r$ ,  $h$  et la vitesse  $v(r)$  d'un électron.

2) Quelle relation lie  $v(r)$  au potentiel  $V(r)$  ?

3) On donne le laplacien  $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$  en coordonnées cylindriques. Établir l'équation régissant  $V(r)$ .

On pose  $\Gamma = \frac{I}{2\pi h r v} \sqrt{\frac{m}{2e}}$  où  $m$  et  $e$  sont respectivement la masse et la valeur absolue de la charge de l'électron.

Résoudre cette équation en cherchant des solutions sous la forme  $V(r) = Ar^\alpha$ .

4) Quelle est l'équation de la caractéristique  $U = f(I)$  de ce dipôle ? Pourquoi le système considéré ici constitue-t-il une diode (diode à vide).

5) Calculer la puissance volumique fournie par le champ électrique aux charges en mouvement. En déduire la puissance  $P$  absorbée par la diode.

**réponses :** 1)  $\rho(r) = -\frac{I}{2\pi h r v(r)}$  2)  $v(r) = \sqrt{\frac{2eV(r)}{m}}$  3)  $\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} - \frac{\Gamma}{r} V^{-\frac{1}{2}} = 0$  ;  $\alpha = \frac{2}{3}$  4)  $I \propto U^{\frac{3}{2}}$  si  $U > 0$ ,  $I$  est nul sinon

5) on retrouve  $P = UI$

## • Analogies avec la gravitation

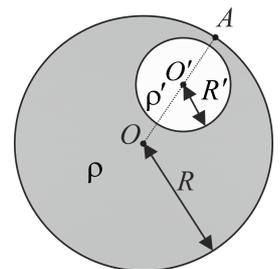
### 9. Détection de gisements par gravimétrie

1) On modélise la Terre comme une sphère de rayon  $R$  et homogène avec une masse volumique  $\rho$ .

Calculer le champ de gravitation  $\vec{\mathcal{G}}_0$  à la surface de la Terre.

2) On considère un gisement correspondant à un défaut d'homogénéité de la Terre : dans une sphère de centre  $O'$  et de rayon  $R'$ , entièrement enfouie dans la Terre à une profondeur  $h > R'$ , la masse volumique est  $\rho' < \rho$ . Quelle est alors la variation  $\frac{\delta \mathcal{G}}{\mathcal{G}_0}$  de la norme du champ de pesanteur au point

A situé à la surface de la Terre, à la verticale de  $O'$  ? Commenter l'influence de  $R'$  et de  $h$ .



**réponses :** 2)  $\frac{\delta \mathcal{G}}{\mathcal{G}_0} = \frac{\rho' - \rho}{\rho} \frac{R'^3}{Rh^2}$



# CONDENSATEUR

## • Calcul de capacités

### 1. Distribution plane

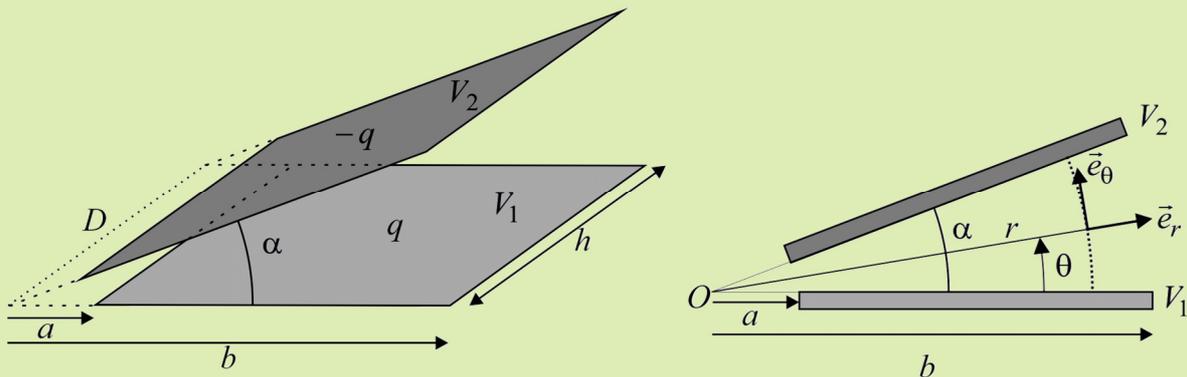
On considère deux plans infinis parallèles et distants de  $e$ . L'un possède une charge surfacique  $\sigma$  uniforme, l'autre une charge surfacique  $-\sigma$ , également uniforme.

1) Calculer  $\vec{E}(M)$  en tout point de l'espace, puis la capacité pour deux plans de surface  $\mathcal{S}$  en regard. Commenter le résultat obtenu.

*réponses* : 1)  $\vec{E}$  nul à l'extérieur, uniforme à l'intérieur

### 2. Capacité d'un condensateur diédrique

Les deux armatures rectangulaires en regard se déduisent l'une de l'autre d'une rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'arête  $D$  du dièdre formé par les plans contenant les armatures. Elles sont comprises entre les cylindres de révolution autour de  $D$ , de rayons  $a$  et  $b > a$ . Leur largeur dans la direction parallèle à  $D$  vaut  $h$ . Un point  $M$  de l'espace entre les armatures est repéré en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .



1) Justifier que l'on recherche des solutions de l'équation de Laplace sous la forme  $V(\theta)$ . En déduire la loi  $V(\theta)$ .

On donne le laplacien en coordonnées cylindriques :  $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

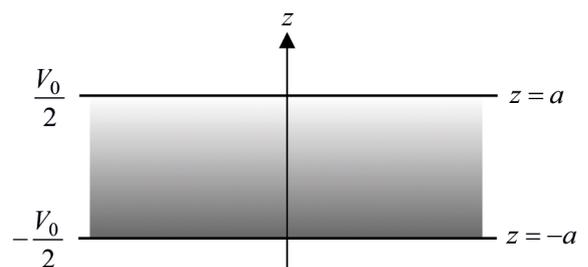
2) Calculer la charge surfacique sur les armatures. En déduire la capacité  $C$  du condensateur. Commenter sa limite si  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow \infty$  avec  $\alpha a = Cte = \ell$  et  $b - a = Cte = e$ .

3) Calculer l'énergie emmagasinée par le condensateur de deux manières différentes.

*réponses* : 1)  $V = \frac{V_2 - V_1}{\alpha} \theta + V_1$  2)  $C = \frac{\epsilon_0 h}{\alpha} \ln \frac{b}{a}$  3)  $U_C = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 h}{\alpha} \left[ \ln \frac{b}{a} \right] (V_1 - V_2)^2$

### 3. Électrolyte dans un condensateur plan

On place un électrolyte entre les deux armatures d'équations  $z = -a$  et  $z = a$  d'un condensateur plan portées respectivement aux potentiels  $-\frac{V_0}{2}$  et  $\frac{V_0}{2}$ . L'ensemble est thermostaté à la température  $T$ . Lorsqu'il n'y a pas de différence de potentiel entre les deux armatures ( $V_0 = 0$ ), l'électrolyte est globalement neutre : il contient  $n_0$  cations de charge  $+q$  et  $n_0$  anions de charge  $-q$  par unité de volume.



1) On donne la loi de Boltzmann : la probabilité qu'un système en équilibre thermique avec un thermostat de température  $T$  soit dans un état d'énergie  $E$  est proportionnelle à  $e^{-\frac{E}{k_B T}}$ , où  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  est la constante de Boltzmann. En utilisant la loi de Boltzmann, calculer à l'équilibre thermodynamique les densités de charge  $\rho_+(z)$  et  $\rho_-(z)$  dues aux cations et aux anions, lorsqu'on applique une différence de potentiel  $V_0 > 0$ .

2) Déterminer l'équation différentielle qui régit le potentiel  $V(z)$ . La résoudre dans le cas  $k_B T \gg qV_0$ . En déduire le champ électrostatique  $\vec{E}$  entre les armatures. Tracer  $E_z(z)$  et  $V(z)$ .

3) On note  $\mathcal{S}$  la surface des armatures. Calculer la capacité  $C$  du condensateur, la comparer à sa valeur  $C_0$  en l'absence d'électrolyte. Expliquer physiquement l'origine de l'inégalité.

**réponses :** 1)  $\rho_+(z) = \frac{2aqn_0 e^{-\frac{qV(z)}{k_B T}}}{\int_{-a}^a e^{-\frac{qV(z)}{k_B T}} dz}$  ;  $\rho_-(z) = -\frac{2aqn_0 e^{\frac{qV(z)}{k_B T}}}{\int_{-a}^a e^{\frac{qV(z)}{k_B T}} dz}$  2) pour  $k_B T \gg qV_0$  :  $\frac{d^2 V}{dz^2} - \frac{2q^2 n_0}{\epsilon_0 k_B T} V = 0$  ;  $\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2q^2 n_0}}$ , on a  $V(z) = \frac{V_0}{2} \text{sh}\left(\frac{z}{\lambda}\right) / \text{sh}\left(\frac{a}{\lambda}\right)$  et  $E_z = -\frac{V_0}{2\lambda} \text{ch}\left(\frac{z}{\lambda}\right) / \text{sh}\left(\frac{a}{\lambda}\right)$  3)  $C = \epsilon_0 \mathcal{S} / 2\lambda \text{th}\left(\frac{a}{\lambda}\right) > C_0$

## • Influence électrostatique

### 4. Influence / images électriques

Un plan conducteur d'équation  $z=0$  est maintenu au potentiel  $V=0$ . On approche une charge ponctuelle  $q$  à une distance  $a$  du plan conducteur (la charge se trouve au point  $C(0,0,a)$ )

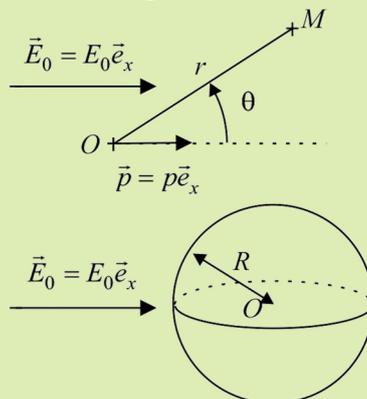
- 1) Montrer que le plan se charge.
- 2) Montrer que la détermination du potentiel  $V$  à l'équilibre en un point  $M$  du domaine  $z > 0$  peut se faire en raisonnant sur un système de deux charges ponctuelles. Si  $P$  est un point du plan conducteur à une distance  $r$  de l'origine  $O$  du repère, calculer la charge surfacique  $\sigma(r)$ .
- 3) Calculer la charge totale  $Q$  du plan.

**réponses :** 1) charge par influence 2) utiliser le théorème de Helmholtz pour trouver un problème équivalent puis le théorème de Coulomb pour déterminer  $\sigma$  :  $\sigma = \frac{-qa}{2\pi(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$  3)  $Q = -q$

### 5. Sphère métallique dans un champ électrostatique uniforme

On place en un point  $O$  un dipôle de moment dipolaire  $\vec{p} = p\vec{e}_x$ . Il règne en outre dans tout l'espace un champ électrique uniforme  $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x$

- 1) Calculer le potentiel total en un point  $M$  repéré par ses coordonnées sphériques :  $V(r,\theta,\varphi)$ . Montrer qu'il existe une surface équipotentielle sphérique de centre  $O$ . Calculer son rayon.
- 2) On considère d'une sphère métallique neutre de rayon  $R$  placée dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x$ .



Déterminer le potentiel et le champ électrique créés par le système en un point du vide. Donner l'allure des lignes de champ électrique. Calculer en coordonnées sphériques la densité surfacique de charges  $\sigma$  qui apparaît sur la sphère.

### CONDENSATEUR

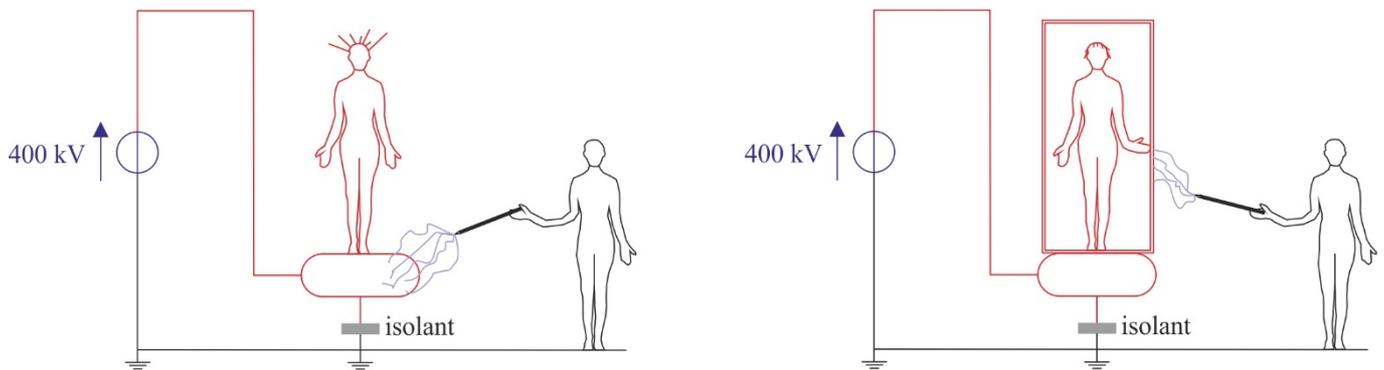
*réponses* : 1)  $V(r, \theta) = \left[ \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \right] \cos \theta + Cte$  2)  $\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$

## 6. Expériences d'électrostatique au palais de la découverte

Parmi les nombreuses expériences proposées, l'une de plus spectaculaires consiste à faire monter une personne aux cheveux longs sur une base métallique (de surface totale  $2,2 \text{ m}^2$ ), sans aspérités, portée à  $V = 400\,000 \text{ V}$  par rapport au sol (le Palais de la Découverte dispose d'une machine électrostatique permettant d'obtenir de telles tensions en continu).

Le conférencier commence par expliquer que bien que cette tension semble très dangereuse, c'est la charge traversant le corps qui l'est ; or la base métallique ne contient que 100 000 milliards d'électrons, de quoi faire briller une ampoule LED de 0,2 W alimentée en continu sous 12 V pendant seulement une ms ! Effectivement, il tend vers cette base une baguette métallique et des éclairs surgissent entre l'extrémité de la baguette et la base, très discontinus d'abord, puis pratiquement constamment lorsque la baguette est assez proche, sans que le conférencier ne semble ressentir la moindre douleur.

La personne sur la base voit ses cheveux se dresser sur sa tête dès que les décharges entre la baguette et la base cessent, mais cet effet disparaît quand que le conférencier l'entoure d'une cage métallique. La cage protège la personne à l'intérieur qui ne ressent rien même lorsque le conférencier provoque des décharges à proximité de sa main posée sur l'intérieur de la cage.



- 1) Retrouver en modélisant la base par une sphère de  $R = 40 \text{ cm}$  de rayon l'ordre de grandeur de la charge portée par la base ainsi que de la durée pendant laquelle l'ampoule brille. Préciser le type de charges portées par la base.
- 2) Proposer une explication des phénomènes décrits. On rappelle que l'air s'ionise et devient donc conducteur quand il est soumis à un champ électrique dont la norme dépasse  $E_{\text{disr.}} = 4 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  (« champ disruptif »).

*réponses* : 1)  $Q = 4\pi\epsilon_0 R V$

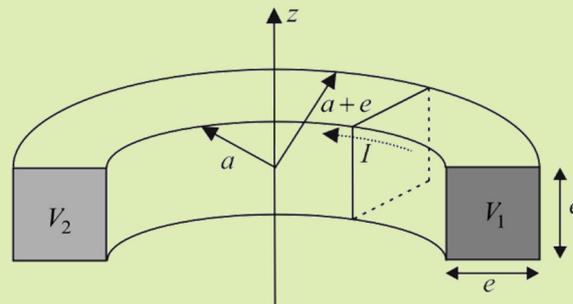


# TRANSPORT DE CHARGES

## • Calcul de résistances

### 1. Résistance électrique d'un demi-tore de section carrée

On considère un demi-tore en cuivre de section carrée de longueur  $e$ , de rayon interne  $a$  et de rayon externe  $a+e$ . On note  $\gamma$  la conductivité électrique du cuivre. On impose une différence de potentiel  $U = V_1 - V_2$  entre les deux faces extrêmes du tore.



- 1) Déterminer la forme du potentiel  $V$  compatible avec la géométrie et les conditions aux limites du problème.
  - 2) En déduire la résistance électrique  $R$  du demi-tore.
- Retrouver le cas particulier du cylindre droit.

A.N :  $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $e = 1 \text{ cm}$ .

*réponses* : 1)  $V = V(\theta)$  2)  $R = \frac{\pi}{\gamma e \ln \left[ 1 + \frac{e}{a} \right]}$  ; faire l'équivalent quand  $a \rightarrow \infty$  ;  $R = 7,8 \cdot 10^{-6} \Omega$

### 2. Relation entre résistance et capacité pour une même géométrie

1) On note  $R$  est la résistance d'un conducteur de conductivité  $\gamma$  constituant un tube de courant entre deux surfaces  $\mathcal{S}_1$  au potentiel  $V_1$  et  $\mathcal{S}_2$  au potentiel  $V_2$ . On note  $C$  la capacité d'un condensateur ayant la même géométrie que le conducteur : les armatures en regard sont  $\mathcal{S}_1$  au potentiel  $V_1$  et  $\mathcal{S}_2$  au potentiel  $V_2$ , le tube de courant est un tube de champ électrostatique.

Montrer que l'on a  $RC = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$

2) On considère un condensateur hémisphérique (les surfaces en regard sont des demi-sphères concentriques de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ ). L'isolant placé entre les deux armatures est un fluide de conductivité  $\gamma = 10^{-9} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$  très faible. Calculer sa résistance si  $R_1 = 10 \text{ cm}$  et  $R_2 = 20 \text{ cm}$ , puis l'intensité « de fuite » pour  $V_1 - V_2 = 1000 \text{ V}$ .

*réponses* : 2)  $R = 7,96 \cdot 10^8 \Omega$  et  $I = 1,26 \mu\text{A}$

## • Autres

### 3. Modèle statistique de Drude

On considère un conducteur métallique constitué de cations fixes de charge  $+e$ , et d'électrons libres de charge  $-e$ , de masse  $m$ . On note  $n$  le nombre de cations par unité de volume.

- 1) Quel est le nombre d'électrons libres par unité de volume ? En déduire la densité volumique de charges mobiles  $\rho$ .
- 2) On considère à la date  $t$  un volume mésoscopique du métal. Un électron libre  $\text{él}_i$  donné de ce volume a subi son dernier choc avec un cation à la date  $t_i < t$ . Juste après le choc, sa vitesse est  $\vec{v}_{0,i}$ .

Sous l'action d'un champ électrique uniforme et constant  $\vec{E}$ , sa vitesse passe de  $\vec{v}_{0,i}$  (à la date  $t_i$ ) à  $\vec{v}_i$  (à la date  $t$ ). On effectue à la date  $t$  une moyenne d'ensemble  $\vec{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i$  (notée simplement  $\vec{v}$  par la suite) sur le volume considéré.

Déterminer  $\vec{v}_i$ . Donner la signification de  $\tau = \overline{t - t_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (t - t_i)$  puis calculer  $\vec{v}$  en supposant la distribution des vitesses isotrope suite à un choc.

3) Exprimer, en régime permanent, le vecteur densité volumique de courant  $\vec{J}$ . Pourquoi peut-on ne prendre en compte que les électrons pour calculer  $\vec{J}$  ?

Montrer que la loi d'Ohm locale  $\vec{J} = \gamma \vec{E}$  est vérifiée et que la

conductivité électrique  $\gamma$  du conducteur vaut  $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$ .

Pour du cuivre, on a  $Z = 1$  électron libre par atome, et on donne :  $\gamma = 5,9 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$  ;  $M = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ; masse volumique  $\mu = 8,96 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . On donne également :

$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  ;  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  ;  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

Calculer  $n$  puis  $\tau$ . Conclure quant au domaine de validité de la loi d'Ohm.

Recommencer pour de l'aluminium en utilisant les tableaux fournis qui donnent  $Z$ ,  $n$ , ainsi que la résistivité (inverse de la conductivité) en microohms centimètre à 77 K et 273 K.

4) Calculer  $v$  pour un fil de cuivre de diamètre  $d = 1,5 \text{ mm}$  parcouru par un courant d'intensité  $I = 1 \text{ A}$ . Comparer à la

vitesse moyenne quadratique  $u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$  à 273 K. Commenter.

Element	Z	n (10 <sup>22</sup> /cm <sup>3</sup> )	Element	77 K	273 K
Li (78 K)	1	4.70	Li	1.04	8.55
Na (5 K)	1	2.65	Na	0.8	4.2
K (5 K)	1	1.40	K	1.38	6.1
Rb (5 K)	1	1.15	Rb	2.2	11.0
Cs (5 K)	1	0.91	cs	4.5	18.8
Cu	1	8.47	Cu	0.2	1.56
Ag	1	5.86	Ag	0.3	1.51
Au	1	5.90	Au	0.5	2.04
Be	2	24.7	Be		2.8
Mg	2	8.61	Mg	0.62	3.9
Ca	2	4.61	Ca		3.43
Sr	2	3.55	Sr	7	23
Ba	2	3.15	Ba	17	60
Nb	1	5.56	Nb	3.0	15.2
Fe	2	17.0	Fe	0.66	8.9
Mn ( $\alpha$ )	2	16.5	Zn	1.1	5.5
Zn	2	13.2	Cd	1.6	6.8
Cd	2	9.27	Hg	5.8	Melted
Hg (78 K)	2	8.65	Al	0.3	2.45
Al	3	18.1	Ga	2.75	13.6
Ga	3	15.4	In	1.8	8.0
In	3	11.5	Tl	3.7	15
Tl	3	10.5	Sn	2.1	10.6
Sn	4	14.8	Pb	4.7	19.0
Pb	4	13.2	Bi	35	107
Bi	5	14.1	Sb	8	39
Sb	5	16.5			

**réponses :** 1) cristal électriquement neutre :  $n$  électrons par unité de volume et  $\rho = -ne$  2)  $\vec{v} = -\frac{e\tau\vec{E}}{m}$  3) A.N :  $n = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  et  $\tau = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s}$

#### 4. Puissance dissipée par effet joule

1) Rappeler l'expression de la puissance reçue par les charges d'un système de volume  $\mathcal{V}$  de la part du champ électromagnétique. D'autre part, quelle forme l'équation locale de conservation de la charge prend-elle en régime stationnaire ?

2) Ce système est un dipôle délimité par deux sections équipotentielles  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  (de potentiels respectifs  $V_1$  et  $V_2$ ) et par le tube de courant de surface  $\mathcal{S}_{\text{lat}}$  reliant ces deux sections. On ne suppose pas encore qu'il obéit à la loi d'Ohm  $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ . On note  $I$  le courant circulant de  $\mathcal{S}_1$  vers  $\mathcal{S}_2$ .

En utilisant la relation  $\text{div}(V\vec{J}) = V\text{div}\vec{J} + \text{grad}V \cdot \vec{J}$ , montrer que  $P = (V_1 - V_2)I$ . Conclure dans le cas d'un conducteur ohmique.

**réponses :** 2) utiliser G.O et  $\text{div}\vec{J} = 0$

#### 5. Relaxation d'un conducteur

1) Supposons qu'une charge volumique  $\rho_0$  apparaisse localement dans un conducteur. Évaluer numériquement l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour que se rétablisse la neutralité du conducteur. Commenter ce résultat.

**réponses :** 1)  $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$

## 6. Effet Hall

Le germanium pur Ge est un bon isolant électrique. Lorsqu'on introduit des impuretés en très faible concentration, par exemple de l'antimoine Sb, la conductivité électrique du germanium augmente fortement : on obtient un « semi-conducteur dopé », noté Ge/Sb, dont les propriétés électriques dépendent à la fois du nombre d'atomes Sb introduits par unité de volume, noté  $n$ , et de la température absolue  $T$ .

On propose le modèle suivant de conduction dans le germanium dopé : dans Ge pur, tous les électrons (de charge  $-e$ , de masse  $m$ ) sont engagés dans des liaisons chimiques et ne peuvent participer à la conduction électrique. Dans Ge/Sb, à température ambiante, chaque atome Sb libère un électron dans le réseau cristallin. Sous l'action d'un champ électrique uniforme et constant  $\vec{E}$ , les charges libres sont animées d'une vitesse  $\vec{v}$ . On modélise l'action des atomes ou ions du réseau sur ces charges par une force de frottement du type  $\vec{f} = -m \frac{\vec{v}}{\tau}$  (modèle de Drude), où  $\vec{v}$  est la vitesse de l'électron par rapport au référentiel du laboratoire, supposé galiléen, associé au repère  $Oxyz$  de base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On a  $\vec{E} = E\vec{e}_x$ .

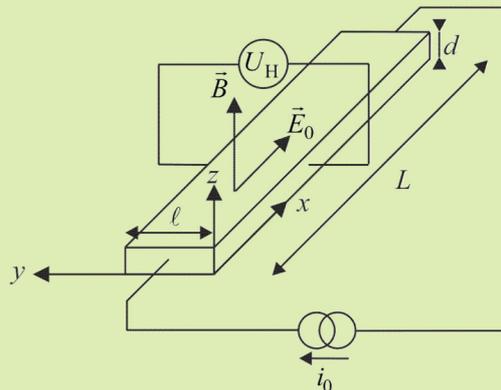
1) Montrer que l'électron atteint une vitesse limite  $\vec{v}_\infty$  et exprimer, en régime permanent, le vecteur densité de courant  $\vec{J}$ .

Montrer que la résistivité électrique  $\rho$  de Ge/Sb est :  $\rho = \frac{m}{ne^2\tau}$ .

A.N :  $\rho = 1,22 \cdot 10^{-2} \Omega \cdot m$  pour un échantillon de « concentration » atomique  $n = 1,6 \cdot 10^{21} m^{-3}$ , charge élémentaire :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$ , masse d'un électron  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$ , masse molaire atomique de Ge :  $M = 72,6 g \cdot mol^{-1}$ , masse volumique de Ge :  $\mu = 5,32 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$ . Constante d'Avogadro :  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} mol^{-1}$ .

Calculer le nombre d'atomes Ge par  $m^3$  d'échantillon et en déduire le nombre d'atomes Sb par atome de germanium. Calculer  $\tau$  et commenter.

2) L'échantillon Ge/Sb est découpé sous forme d'un ruban de longueur  $L = 20 mm$  parallèle à l'axe  $Ox$ , de section rectangulaire de largeur  $\ell = 1 mm$  parallèle à  $Oy$ , et d'épaisseur  $d = 0,2 mm$  parallèle à  $Oz$ . Un générateur de courant continu ( $i = i_0$ ) crée un champ électrique uniforme  $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x$ . On place l'échantillon dans un champ magnétique constant uniforme :  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ .



Montrer que la force magnétique entraîne l'apparition d'une distribution de charges sur les bords du matériau, créant un champ électrique  $\vec{E}_H$  (appelé champ de Hall), considéré comme uniforme, colinéaire à l'axe  $Oy$ , et dont on précisera le sens.

En régime permanent, le vecteur densité de courant et la vitesse des électrons est colinéaire à l'axe  $Ox$ . La norme de la vitesse des électrons est notée  $v_0$ . Écrire l'équation différentielle du mouvement d'un électron libre, en déduire le champ  $E_H$  en fonction de  $v_0$  et  $B$ .

En déduire la différence de potentiel  $U_H$  que l'on peut mesurer entre les deux bords de l'échantillon de part et d'autre de sa largeur en fonction de  $B$ ,  $i_0$ ,  $n$ ,  $e$  et  $d$ .

A.N : Calculer  $U_H$  pour une intensité  $i_0 = 10 mA$ , dans un champ  $B = 0,1 T$ . Donner une application du phénomène étudié.

**réponses :** 2)  $E_0 = \frac{\rho i_0}{\ell d}$ ,  $E_H = -\frac{i_0 B}{ne\ell d}$ ,  $U_H = \frac{i_0 B}{ned} = 19,5 mV$

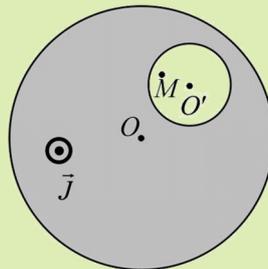


# CHAMP MAGNÉTIQUE EN RÉGIME STATIONNAIRE

## • Théorème d'Ampère

### 1. Cavité cylindrique

Un conducteur cylindrique de section circulaire est parcouru par un courant caractérisé par un vecteur densité de courant  $\vec{j}$  parallèle à l'axe du cylindre. Une cavité cylindrique d'axe parallèle à celui du conducteur est présente à l'intérieur du conducteur.

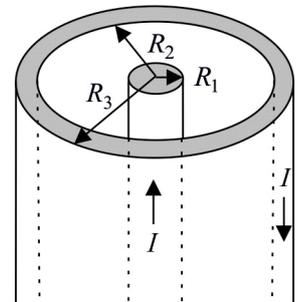


- 1) Montrer que le champ magnétostatique créé en un point  $M$  peut se décomposer en deux grâce au principe de superposition.
- 2) Calculer  $\vec{B}(M)$  en un point quelconque de la cavité, conclure.

réponses : 2)  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \overrightarrow{OO'}$  uniforme dans la cavité

### 2. Câble coaxial

On considère un câble constitué d'un conducteur cylindrique de rayon  $R_1$  entouré d'un deuxième conducteur coaxial de rayon intérieur  $R_2$  et de rayon extérieur  $R_3$ . Aucun courant ne circule entre les deux conducteurs. Un courant d'intensité  $I$  circule dans le cylindre intérieur et un courant de même intensité  $I$  circule dans la périphérie, mais en sens inverse.



- 1) Calculer  $\vec{B}(M)$  en tout point de l'espace.
- 2) Tracer  $\|\vec{B}(M)\|$  en fonction de la distance  $r$  de  $M$  à l'axe du câble.

réponses : 1)  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R_1^2} \vec{e}_\theta$  pour  $0 \leq r \leq R_1$ ,  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$  pour  $R_1 \leq r \leq R_2$ ,

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \vec{e}_\theta$  pour  $R_2 \leq r \leq R_3$ ,  $\vec{B} = \vec{0}$  pour  $r \geq R_3$

### 3. Distribution plane

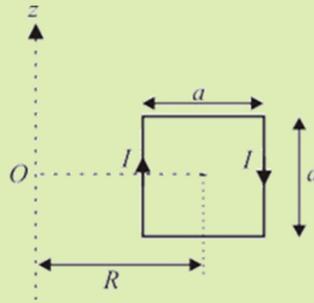
1) On considère un plan infini uniformément parcouru par des courants de densité surfacique  $\vec{J}_s$ . Analyser les symétries et en déduire la direction et le sens de  $\vec{B}(M)$  en tout point  $M$  de l'espace. Calculer  $\vec{B}(M)$ .

réponses : 1)  $\vec{B}$  parallèle au plan, orthogonal à  $\vec{J}_s$  et uniforme dans un demi-espace,  $B = \frac{\mu_0 J_s}{2}$

## • Calculs d'inductances

### 4. Inductance d'un tore à section carrée

On considère une bobine torique à section carrée dont les côtés ont pour longueur  $a$ , de centre  $O$ , de révolution autour de  $Oz$ . On note  $R$  la distance de  $O$  au centre d'une section droite du tore.  $N$  spires parcourues par un courant permanent  $I$  sont régulièrement enroulées sur le tore.



- 1) Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace. A.N :  $N = 1000$  ;  $I = 1 \text{ A}$  ;  $R = 10 \text{ cm}$  et  $a = 3 \text{ cm}$ . Quel courant  $I'$  devrait-on faire passer dans un fil rectiligne infini pour obtenir le même champ à la même distance ?
- 2) Calculer la densité surfacique de courants équivalente à ce bobinage sur la face intérieure et la face du dessus. Vérifier les relations pour  $\vec{B}$  au passage de la surface du tore.
- 3) Calculer le flux du champ magnétique propre à travers une section droite. En déduire l'inductance du solénoïde. Faire l'A.N.

*réponses* : 1)  $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$  à l'intérieur du solénoïde, nul ailleurs ;  $I' = 1000 \text{ A}$  2) par exemple  $\vec{J}_\mathcal{S}(R - \frac{a}{2}) = \frac{NI}{\pi(2R - a)} \vec{e}_z$

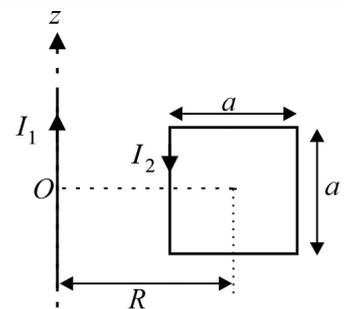
$$3) L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left[ \left( R + \frac{a}{2} \right) / \left( R - \frac{a}{2} \right) \right] = 1,18 \text{ mH}$$

### 5. Mutuelle inductance entre un fil et un solénoïde torique

On considère une bobine torique à section carrée dont les côtés ont pour longueur  $a$ , de centre  $O$ , de révolution autour de  $Oz$ . On note  $R$  la distance de  $O$  au centre d'une section droite du tore.  $N$  spires parcourues par un courant permanent  $I_2$  sont régulièrement enroulées sur le tore.

- 1) Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace.
- 2) Un fil infini confondu avec l'axe  $Oz$  est parcouru par  $I_1$ . Déterminer de deux manières différentes l'inductance mutuelle du fil et du solénoïde.

*réponses* : 1)  $\vec{B}_{\text{int}} = -\frac{\mu_0 N I_2}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ ,  $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$  2)  $M = -\frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln \left[ \left( R + \frac{a}{2} \right) / \left( R - \frac{a}{2} \right) \right]$



## • Dipôle magnétique

### 6. Champ magnétique terrestre

Le moment magnétique terrestre vaut  $\|\vec{m}\| = 7 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . On suppose la terre sphérique de rayon  $R_T = 6400 \text{ km}$ , de centre  $O$ . Les pôles géographiques et magnétiques sont supposés confondus.

- 1) On note  $S$  et  $N$  les pôles nord et sud géographiques, et  $Oz$  l'axe  $SN$ . Préciser le sens de  $\vec{m}$  par rapport à l'axe  $Oz$ .
- 2) Calculer les composantes horizontale et verticale du champ magnétique terrestre à l'équateur, à la latitude  $\lambda = 45^\circ$  ainsi qu'au pôle nord. Faire l'A.N.
- 3) Une boussole est placée horizontalement à la latitude  $\lambda$ . On donne pour l'aiguille de la boussole  $\vec{m}_b$  le moment magnétique et  $J_b$  le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation. Déterminer la position d'équilibre stable. Calculer la période des petites oscillations autour de cette position.
- 4) Calculer l'énergie magnétique contenue dans l'espace extérieur à la Terre.

*réponses* : 3) équilibre stable quand  $\vec{m}_b$  et  $\vec{B}_h$  alignés et de même sens ;  $T = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi R_T^3 J_b}{\mu_0 m m_b \cos \lambda}}$  4)  $U_m = \frac{\mu_0 m^2}{12\pi R_T^3}$

## 7. Sphère supraconductrice

Une sphère supraconductrice pleine de centre  $O$ , de rayon  $a$  est plongée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . Il y a pour un tel matériau supraconducteur apparition de courants surfaciques tels que le champ magnétique total est nul à l'intérieur du matériau.

1) Calculer  $\vec{J}_{\mathcal{S}}$  en coordonnées sphériques sachant que les courants surfaciques créent à l'extérieur de la sphère un champ magnétique dipolaire.

2) Calculer le champ créé par ces courants surfaciques en  $O$ . On donne la loi de Biot et Savart permettant de calculer la contribution en  $M$  du champ créé par l'élément de courant  $\vec{J}_{\mathcal{S}} d^2 \mathcal{S}$  en  $P$  :  $d^2 \vec{B}_p(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}_{\mathcal{S}} d^2 \mathcal{S} \wedge \vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2}$ .

**réponses :** 1)  $\vec{J}_{\mathcal{S}} = -\frac{3B_0}{2\mu_0} \sin \theta \vec{e}_\phi$  2)  $\vec{B}_{\vec{J}_{\mathcal{S}}}(O) = -\vec{B}_0$

## • Équations locales

### 8. lame supraconductrice placée dans un champ magnétique uniforme

La lame occupe le volume compris entre les plans  $x = -a$  et  $x = a$ . Elle est placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . Le milieu supraconducteur est caractérisé par la relation  $\text{rot } \vec{J} = -\Lambda \vec{B}$  entre le vecteur densité volumique de courants et le champ magnétique.

1) Déterminer le champ  $\vec{B}$  dans le supraconducteur, ainsi que  $\vec{J}$ . Tracer  $B(x)$  et  $J(x)$ . Montrer que le champ extérieur n'est pas perturbé par l'apparition de courants volumiques dans le supraconducteur.

2) Calculer la force s'exerçant sur une portion de supraconducteur de surface  $\mathcal{S}$  comprise entre  $x = -a$  et  $x = 0$ .

On donne  $\Lambda = 1,69 \cdot 10^{21} \text{ C}^2 \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Montrer que la force précédente s'exerce en fait sur la surface  $x = -a$  et que

$$\frac{\vec{F}}{\mathcal{S}} \approx -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \vec{e}_x.$$

**réponses :** 1)  $\vec{B}(x) = B_0 \text{ch } \frac{x}{\delta} / \text{ch } \frac{a}{\delta} \vec{e}_z$  et  $\vec{J}(x) = -\frac{B_0}{\mu_0 \delta} \text{sh } \frac{x}{\delta} / \text{ch } \frac{a}{\delta} \vec{e}_y$ , avec  $\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \Lambda}}$  2)  $\delta = 21,7 \mu\text{m}$  : effet de peau : champ et courants surfaciques, nuls dans le supraconducteur

## • Autres

### 9. Champ sur l'axe d'un solénoïde

1) On donne le champ magnétique en un point  $M$  de l'axe d'une spire circulaire de rayon  $R$  parcourue par un courant d'intensité  $I$  dont

l'orientation est donnée sur le schéma ci-contre :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \beta \vec{e}_z$ , où  $\beta$

est l'angle sous lequel est vue la spire depuis  $M$ . Comment modifier ce résultat si  $N$  spires identiques en série sont confondues ?

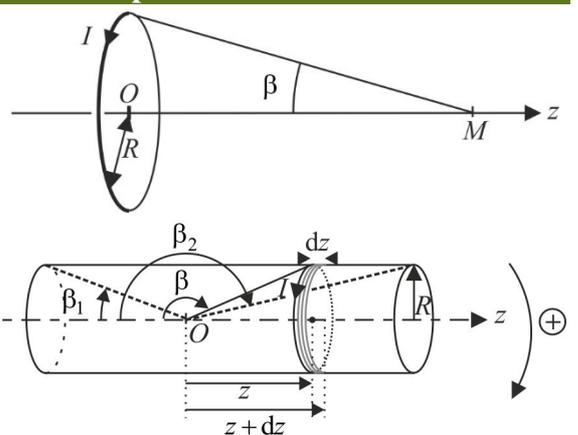
2) On cherche maintenant à déterminer le champ sur l'axe d'un solénoïde droit à base circulaire de rayon  $R$ , constitué par un enroulement régulier de spires parcourues par un courant d'intensité  $I$ . On note  $n$  le nombre de spires par unité de longueur.

On se place en un point  $O$  quelconque de l'axe sous lequel les spires en bout de solénoïde sont vues sous les angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Une spire est repérée par la distance algébrique  $z$  de son centre au point  $O$  ou par l'angle orienté  $\beta$  sous lequel elle est vue depuis  $O$ .

Calculer le champ élémentaire créé en  $O$  par les  $dN = ndz$  spires situées entre  $z$  et  $z + dz$ . En déduire que le champ total en  $O$

vaut  $\vec{B}(O) = \frac{1}{2} \mu_0 n I [\cos \beta_1 - \cos \beta_2] \vec{e}_z$ . Étudier le cas du solénoïde infini.

**réponses :** 2) faire le changement de variable  $z \rightarrow \beta$





# ÉLECTROMAGNÉTISME DANS L'A.R.Q.S

## • Induction de Neumann

### 1. Courants de Foucault dans un barreau conducteur cylindrique

On considère un barreau conducteur cylindrique d'axe  $Oz$ , de rayon  $a$ , de longueur  $h \gg a$ , de conductivité  $\gamma$ , placé dans un champ magnétique  $\vec{B}_0 = B_0 \cos \omega t \vec{e}_z$ .

- 1) Calculer le champ électrique induit  $\vec{E}_1$  et la densité volumique de courants  $\vec{J}_1$  qui apparaissent dans le conducteur (courants de Foucault). Quelle est la puissance moyenne dissipée par effet Joule par ces courants dans le conducteur ?
- 2) Les courants volumiques  $\vec{J}_1$  créent un champ magnétique  $\vec{B}_1$  variable, et donc source d'un champ électrique induit  $\vec{E}_2$ . Calculer  $\vec{B}_1$  et  $\vec{E}_2$  à l'intérieur du conducteur. À quelle condition a-t-on  $\|\vec{B}_1\| \ll \|\vec{B}_0\|$  et  $\|\vec{E}_2\| \ll \|\vec{E}_1\|$  ? Commenter.
- 3) On remplace le barreau par de nombreux barreaux de rayons  $a' \ll a$  d'axes parallèles à  $Oz$ , isolés électriquement, et disposés de façon à couvrir la surface maximale à l'intérieur d'une section droite d'aire  $\pi a^2$  du barreau précédent. Quelle est la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans une portion de ce système de longueur  $h$  ? La comparer à celle dissipée dans le barreau de rayon  $a$ . Commenter.

réponses : 1)  $\vec{E}_1 = \frac{1}{2} B_0 \omega r \sin \omega t \vec{e}_\theta$   $\langle P \rangle = \frac{\pi a^4 h \gamma \omega^2 B_0^2}{16}$  2)  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \gamma B_0 \omega \sin \omega t}{4} (a^2 - r^2) \vec{e}_z$  ;

$\vec{E}_2 = -\frac{\mu_0 \gamma B_0 \omega^2 \cos \omega t}{16} r(2a^2 - r^2) \vec{e}_\theta$  3)  $\langle P \rangle = \frac{\pi^2}{12} \frac{\langle P \rangle}{N}$  en négligeant les effets de bord

### 2. Champ électromagnétique dans un conducteur, épaisseur de peau

Un conducteur de conductivité  $\gamma$  occupe le demi espace  $x > 0$ . En présence d'un champ magnétique extérieur sinusoïdal de pulsation  $\omega$  de direction tangente au conducteur, il apparaît un champ magnétique induit. On note  $\vec{B}$  le champ total.

- 1) Montrer que, dans le conducteur, le champ magnétique est solution de l'équation de Kelvin  $\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .
- 2) On pose pour résoudre  $\vec{B} = \text{Re}(\underline{\vec{B}})$  avec  $\underline{\vec{B}} = \underline{b} e^{i\omega t}$ . On prend comme condition aux limites  $\underline{\vec{B}}(x=0, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$ .

Montrer que  $\vec{B}(x, t) = B_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left[\omega t - \frac{x}{\delta}\right] \vec{e}_y$  avec  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ . Tracer  $B_y(x)$  à  $t$  fixé. À quelle condition le calcul précédent est-il valable pour un conducteur de dimensions finies ?

- 3) Calculer le champ  $\vec{E}$  puis  $\vec{E}$  dans le conducteur. En déduire la puissance moyenne dissipée dans un cylindre de conducteur d'axe  $Ox$  et de section droite  $\mathcal{S}$ .

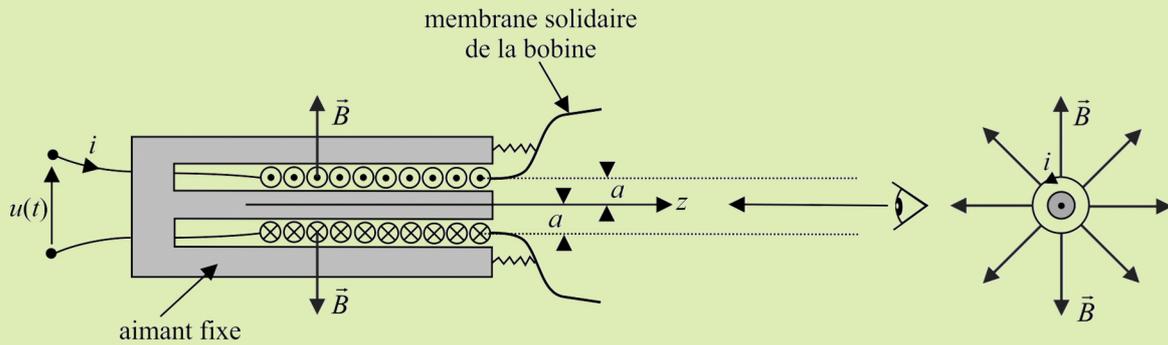
réponses : 3)  $\vec{E}(x, t) = -\sqrt{\frac{\omega}{\mu_0 \gamma}} B_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left[\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right] \vec{e}_z$ ,  $P = \sqrt{\frac{\omega}{8\mu_0^3 \gamma}} B_0^2 \mathcal{S}$

## • Induction de Lorentz

### 3. Principe du haut-parleur électrodynamique

On considère le haut-parleur dont le schéma de principe est donné ci-après. L'aimant fixe crée un champ magnétique radial dans l'entrefer, de norme  $B$  constante à une distance  $a$  de l'axe de symétrie  $Oz$  du système. La membrane de masse  $m$  est solidaire d'une bobine constituée de  $N$  spires circulaires de rayon  $a$ , de longueur totale  $\ell_0 = N2\pi a$ , d'inductance propre  $L$  et de résistance  $R$ . La bobine peut se translater sans frottement selon  $Oz$ . Un système de ressorts se comportant comme un ressort unique de

raideur  $k$  la relie à l'aimant. La résistance de l'air au déplacement de la membrane est modélisée par une force  $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ , où  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse de l'ensemble {bobine, membrane}. On pose  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . On soumet la bobine à une tension  $u(t)$ .



- 1) En analysant qualitativement le comportement du système, expliquer comment il peut générer une onde acoustique.
- 2) On repère le centre d'inertie du système {bobine, membrane} par son abscisse  $z$ . Établir l'équation mécanique du système.
- 3) Établir l'équation électrique du système. On établira l'expression de la f.e.m induite dans le bobinage à l'aide d'un bilan de puissance.
- 4) On se place en régime sinusoïdal forcé et on utilise la notation complexe. Montrer que l'impédance électrique du haut-parleur se met sous la forme  $Z = R + jL\omega + Z_m$ . Justifier le nom « impédance motionnelle » donnée à  $Z_m$ .

Mettre  $\frac{1}{Z_m}$  sous la forme  $\frac{1}{R_0} + jC_0\omega + \frac{1}{jL_0\omega}$  et donner un schéma électrique équivalent du montage faisant intervenir la résistance  $R_0$ , l'inductance  $L_0$  et la capacité  $C_0$ . Calculer  $L_0C_0$  et commenter le résultat obtenu.

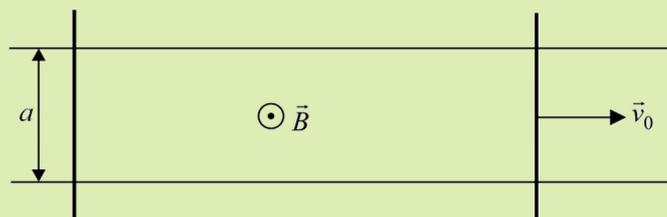
- 5) Faire le bilan énergétique du système. Montrer que l'on a  $\langle ui \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \lambda v^2 \rangle$ . Justifier que le rendement électroacoustique

du haut-parleur soit  $\rho = \frac{\langle \lambda v^2 \rangle}{\langle ui \rangle}$ ; le calculer en fonction de  $R$  et de  $R_m(\omega) = \text{Re}(Z_m)$ . Pour quelle valeur de la pulsation le rendement est-il maximal ? Expliquer pourquoi des enceintes de bonne qualité contiennent au moins trois haut-parleurs, et relier leur taille aux fréquences acoustiques émises.

*réponses :* 2)  $m\ddot{z} = -iB\ell_0 - kz - \lambda\dot{z}$  3)  $u = Ri + L\frac{di}{dt} - B\ell_0\dot{z}$  4) association série de  $R, L$  et  $Z_m$  (constitué de  $R_0, L_0$  et  $C_0$  en parallèle);  $L_0C_0 = \frac{1}{\omega_0^2}$  5)  $\rho(\omega) = \frac{R_m(\omega)}{R_m(\omega) + R}$  maximal pour  $\omega = \omega_0$

#### 4. Mouvements de deux barres couplés par induction

Les deux barres sont identiques. Elles sont posées sur deux rails conducteurs parallèles distants de  $a$ , horizontaux, de résistance électrique négligeable. Les barres peuvent glisser sans frotter en restant orthogonales aux rails. Chaque barre a une masse  $m$  et une résistance électrique  $\frac{R}{2}$  (pour la portion se trouvant entre les deux rails). La barre de droite est lancée avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$ , celle de gauche étant initialement immobile. Un champ magnétique uniforme, stationnaire et vertical  $\vec{B}$  règne entre les rails.



- 1) Déterminer le mouvement des barres grâce à un raisonnement qualitatif.
- 2) Établir l'expression des vitesses des barres en fonction du temps. Commenter le cas  $t \rightarrow \infty$ .
- 3) Faire une étude énergétique.

**réponses :** 2)  $v_1 = \frac{v_0}{2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  pour la barre de gauche ;  $v_2 = \frac{v_0}{2} (1 + e^{-\frac{t}{\tau}})$  pour la barre de droite 3) une partie de l'énergie cinétique est perdue par effet Joule

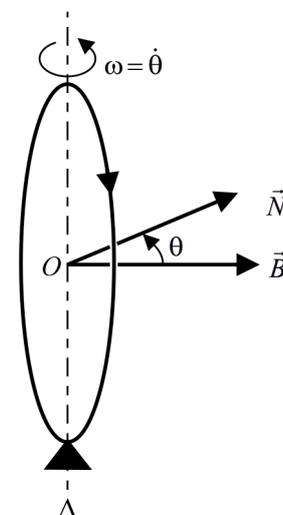
### 5. Induction dans un anneau

Un anneau conducteur circulaire de rayon  $a$ , de masse  $m$ , de résistance électrique  $R$ , peut tourner autour de son diamètre vertical à la vitesse angulaire  $\omega$ . L'anneau est placé dans un champ magnétique uniforme permanent horizontal  $\vec{B}$ . L'anneau étant orienté, on note  $\vec{N}$  le vecteur unitaire normal à l'anneau et  $\theta$  l'angle orienté  $(\vec{B}, \vec{N})$ . On prend comme condition initiale  $\theta = 0$  et  $\dot{\theta}_0 = \omega_0 > 0$ . On donne le moment d'inertie de l'anneau par rapport à son diamètre vertical :

$$J_{\Delta} = \frac{ma^2}{2}$$

On rappelle qu'un circuit rigide de moment magnétique  $\vec{m}$  placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  subit un couple de moment  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ .

- 1) Établir l'équation différentielle du second ordre régissant  $\theta(t)$ .
- 2) Déterminer une intégrale première du mouvement. Montrer graphiquement que le mouvement s'arrête pour une valeur unique  $\theta_f$ .
- 3) Calculer l'énergie  $\varepsilon_R$  dissipée par effet joule : l'exprimer en fonction de  $I_{\Delta}$  et  $\omega_0$ . Que reconnaît-on ? Interpréter et donner une application de ce phénomène.



**réponses :** 1)  $\ddot{\theta} = -\frac{2\pi^2 a^2 B^2}{mR} \dot{\theta} \sin^2 \theta$  3)  $\varepsilon_R = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_0^2$

## • Bilans d'énergie dans l'A.R.Q.S

### 6. Puissance rayonnée par un conducteur cylindrique

On considère dans l'A.R.Q.S un conducteur cylindrique de rayon  $a$  et de longueur  $L \gg a$  parcouru par des courants d'intensité  $i(t)$  longitudinaux, uniformément réparti ( $\vec{J} = \gamma \vec{E}$  est colinéaire à l'axe  $Oz$  du conducteur).

- 1) À quelle condition l'hypothèse de l'A.R.Q.S est-elle vérifiée ? Celle de courants uniformément répartis ?
- 2) Calculer la puissance algébrique rayonnée à l'extérieur du conducteur en fonction de  $h$ ,  $a$ ,  $\gamma$  et  $E$ . L'exprimer en fonction de la résistance  $R$  du conducteur et de  $I$ . Conclure.

**réponses :** 2)  $P = -RI^2$

### 7. A.R.Q.S magnétique : solénoïde en régime variable

On considère un solénoïde de rayon  $a$  et de longueur  $h \gg a$ , constitué d'un enroulement régulier de  $N \gg 1$  spires parcourues par un courant  $i(t)$ . Ce courant varie dans le temps avec une durée caractéristique  $\tau$ .

- 1) Que doit vérifier le rayon  $a$  pour que l'on puisse effectuer l'A.R.Q.S ? Donner l'expression du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde dans l'A.R.Q.S.

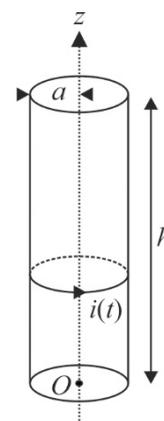
On se place par la suite dans l'A.R.Q.S.

- 2) Calculer  $\vec{E}(t)$  en un point  $M$  à l'intérieur du solénoïde en fonction de la distance  $r \leq a$  de  $M$  à l'axe du système.

- 3) Calculer l'énergie électrique  $U_e$  et l'énergie magnétique  $U_m$  contenues dans le volume intérieur au solénoïde. Montrer que  $U_e \ll U_m$ .

- 4) Calculer la puissance  $p$  sortant du volume précédent. L'exprimer, ainsi que  $U_m$ , en fonction de l'inductance

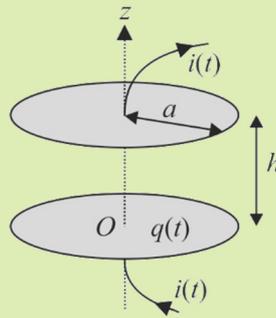
$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{h}$  du solénoïde. Vérifier alors le bilan énergétique.



**réponses :** 1)  $a \ll \lambda$  2)  $\vec{E} = -\frac{\mu_0 N i r}{2h} \vec{e}_\theta$  3)  $\frac{U_e}{U_m} = O\left[\frac{1}{8} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2\right]$  4) On vérifie bien  $p = -\frac{dU_m}{dt}$

## 8. A.R.Q.S électrique : condensateur plan en régime variable

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures de rayon  $a$  distantes de  $h \ll a$ . On note  $q(t)$  la charge portée par l'armature inférieure. Cette charge varie dans le temps avec une durée caractéristique  $\tau$ .



- 1) Que doit vérifier le rayon  $a$  pour que l'on puisse effectuer l'A.R.Q.S ? Comment se traduit-elle pour la densité surfacique de charges  $\sigma(r, t)$  de l'armature inférieure à une distance  $r$  de l'axe des armatures ? Donner l'expression du champ électrique entre les armatures dans l'A.R.Q.S. On se place par la suite dans l'A.R.Q.S.
- 2) Calculer  $\vec{B}(t)$  en un point  $M$  entre les armatures en fonction de la distance  $r \leq a$  de  $M$  à l'axe du système.
- 3) Calculer l'énergie électrique  $U_e$  et l'énergie magnétique  $U_m$  contenues dans le volume cylindrique de rayon  $a$  entre les armatures. Montrer que  $U_m \ll U_e$ .
- 4) Calculer la puissance  $p$  sortant du volume précédent. L'exprimer, ainsi que  $U_e$ , en fonction de la capacité  $C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{h}$  du condensateur. Vérifier alors le bilan énergétique.

**réponses :** 1)  $a \ll \lambda$  2)  $\vec{B} = \frac{\mu_0 \dot{q} r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta$  3)  $\frac{U_m}{U_e} = O\left[\frac{1}{8}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2\right]$  4) On vérifie bien  $p = -\frac{dU_e}{dt}$

## 9. Décharge d'un condensateur sphérique

On considère deux sphères métalliques  $S_1$  et  $S_2$  concentriques de centre  $O$  et de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2 > R_1$  séparées par un milieu isolant qui devient brusquement conducteur à  $t = 0$  : il possède alors une conductivité  $\gamma$ .

Les champs électromagnétiques sont nuls dans  $S_1$  et  $S_2 \forall t$  (conducteurs parfaits).

Initialement, le système ne contient des charges qu'à la surface de  $S_1$  (charge totale  $Q_0$  uniformément répartie sur la surface de  $S_1$ ) et de  $S_2$  (charge totale  $Q'_0$  uniformément répartie sur la surface de  $S_2$ ).

On donne pour les champs de la forme donnée :  $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{0}$  et  $\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 A_r]$

- 1) On cherche des solutions des équations de Maxwell sous la forme  $\vec{E} = E_r(r, t) \vec{e}_r$  et  $\vec{B} = B_r(r, t) \vec{e}_r$ . Commenter ces expressions. Montrer que l'on a  $\vec{B} = \vec{0} \forall r \forall t$
- 2) Montrer que  $E_r(r, t) = E_r(r, 0) e^{-\frac{t}{\tau}}$  pour  $R_1 \leq r \leq R_2$ . Exprimer  $\tau$  en fonction de  $\epsilon_0$  et  $\gamma$ .
- 3) Déterminer à l'aide des relations de passage  $E_r(R_1^+, 0)$ . En déduire  $E_r(r, 0)$ , puis  $E_r(r, t)$  pour  $R_1 \leq r \leq R_2$ .
- 4) En déduire  $\rho(r, t)$  pour  $R_1 \leq r \leq R_2$ . Expliquer comment il est possible que l'on ait une densité de courants non nulle pour  $R_1 \leq r \leq R_2$ . Expliquer alors comment il est possible que l'on ait un champ magnétique nul  $\forall r \forall t$
- 5) Calculer les charges portées à la date  $t$  par  $S_1$  et  $S_2$  :  $Q(t)$  et  $Q'(t)$ .
- 6) Calculer l'énergie dissipée  $U_J$  par effet Joule dans le conducteur au cours de l'évolution du système. Calculer l'énergie électromagnétique  $U_0$  du système à  $t = 0$  et  $U_\infty$  à  $t = \infty$ . Faire un bilan énergétique.

**réponses :** 1) le flux de  $\vec{B}$  est nul à travers une surface fermée 2)  $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$  3)  $E_r(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$  4)  $\rho(r, t) = 0$

5)  $Q(t) = -Q'(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$  6)  $U_0 - U_\infty = U_J = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$ .