1.3 Unités et ordres de grandeur

$\|\vec{B}\|$ en T (tesla : unité dérivée)

bobine supraconductrice : on peut atteindre $\|\vec{B}\| \simeq 20$ T (énorme !)

bobine usuelle $\|\vec{B}\| \simeq 10^{-3}$ T

champs magnétiques résiduels sur Terre : dus au géomagnétisme
en France : $\|\vec{B}\| \simeq 4{,}7 \cdot 10^{-5}$ T $\quad \|\vec{B}_{\text{horizontal}}\| \simeq 2 \cdot 10^{-5}$ T

1.4 Calcul du champ magnétique créé par des distributions de courants stationnaires (complément hors-programme)

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \underbrace{\vec{A}(M)}_{\text{potentiel vecteur}} \;/\; \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$$

on sait calculer le potentiel vecteur pour une distribution volumique de courants, on en déduit le champ magnétique :

$$\vec{B}(M) = \iiint_{P \in D} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(P)\mathrm{d}^3\mathscr{V}}{PM^2} \wedge \vec{e}_{P\to M}$$

or $\vec{J}\mathrm{d}^3\mathscr{V} = \rho_m \vec{v}\mathrm{d}^3\mathscr{V} = \vec{v}\rho_m \mathrm{d}^3\mathscr{V} = \vec{v}\mathrm{d}^3 q$ « élément de courant »

on peut facilement passer à des distributions surfaciques :

$$\vec{B}(M) = \iiint_{P\in D} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(P)\mathrm{d}^3\mathscr{V}}{PM^2} \wedge \vec{e}_{P\to M} \rightarrow \vec{B}(M) = \iint_{P\in D} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}_{\mathscr{S}}(\mathrm{P})\mathrm{d}^2\mathscr{S}}{PM^2} \wedge \vec{e}_{P\to M}$$

$$\vec{v}\mathrm{d}^2 q = \vec{v}\sigma_m \mathrm{d}^2\mathscr{S} = \vec{J}_{\mathscr{S}}\mathrm{d}^2\mathscr{S}$$

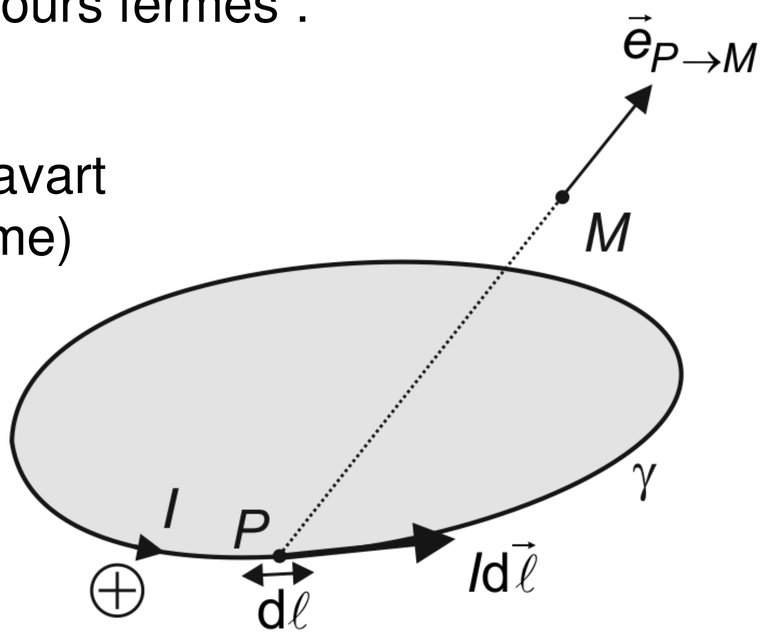
et surtout linéiques (**circuits filiformes**)
or en régime stationnaire, les circuits forment des contours fermés :

$$\rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{M}) = \oint_{P\in D} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\mathrm{d}\vec{\ell}}{PM^2} \wedge \vec{\boldsymbol{e}}_{P\to M}}$$

loi de Biot et Savart (hors-programme)

$$\vec{v}\mathrm{d}q = \vec{v}\lambda_m \mathrm{d}\ell = \lambda_m v \mathrm{d}\vec{\ell} = I\mathrm{d}\vec{\ell}$$

en orientant $\mathrm{d}\vec{\ell}$ dans le même sens que $I = \lambda_m v$



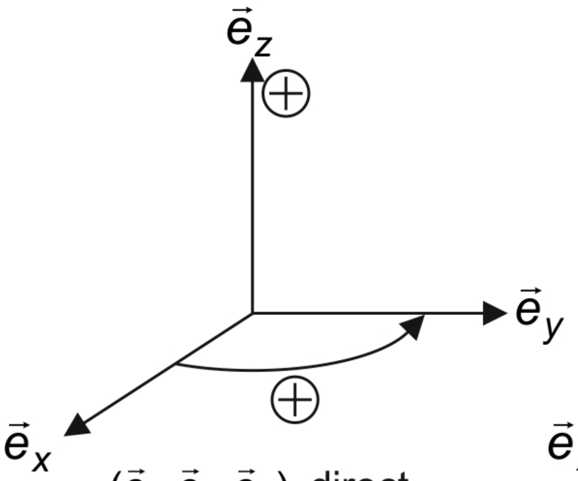
1.5 Continuité / discontinuité du champ magnétique

distribution D	$\vec{B}$
volumique	continu
surfacique	discontinu : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_{\mathscr{S}} \wedge \vec{N}_{1\to 2}$
linéique	∞ sur D ; $\propto \dfrac{1}{r}$ au voisinage de D

1.6 Caractère axial du champ magnétique

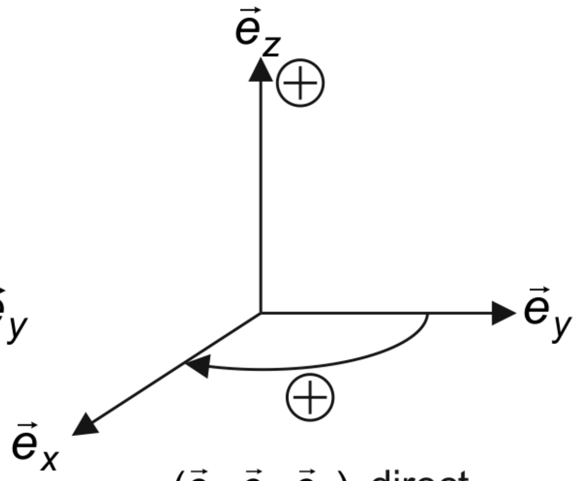
trièdre $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ **direct** : un tire-bouchon se déplace dans le sens du vecteur $\vec{e}_z$ quand on tourne de $\vec{e}_x$ vers $\vec{e}_y$

si on utilise le sens *inverse* du tire-bouchon pour orienter l'espace, le trièdre direct est désormais $(\vec{e}_y, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$



$(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ direct

règle du tire-bouchon

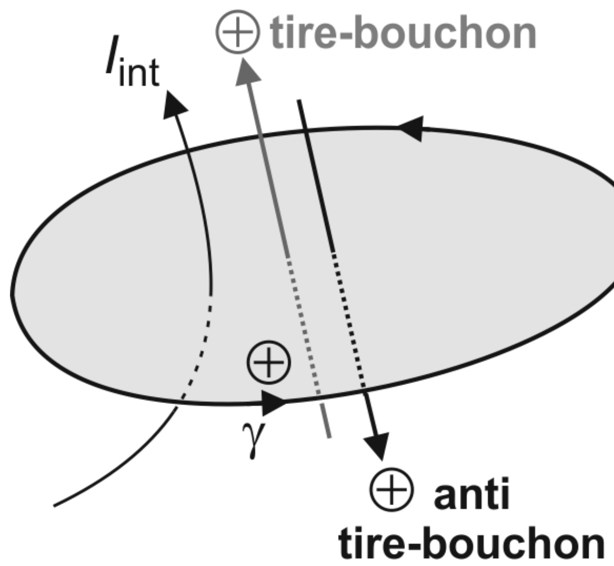


$(\vec{e}_y,\vec{e}_x,\vec{e}_z)$ direct

règle de l'anti tire-bouchon

$$\underbrace{I_{\text{int}}}_{\text{tire-bouchon}} \quad \to \quad \underbrace{-I_{\text{int}}}_{\text{anti tire-bouchon}}$$

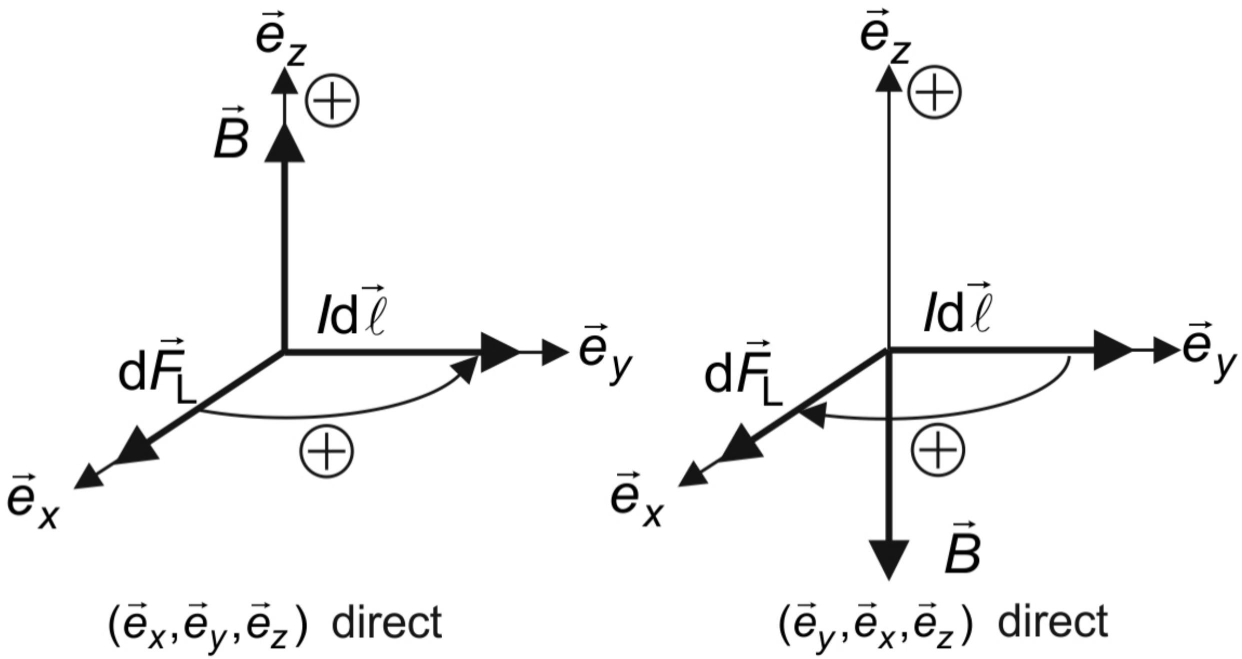
théorème d'Ampère : $\mathscr{C} = \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow \mathscr{C} \to -\mathscr{C}$



l'orientation du contour n'ayant pas changée, c'est le *sens* de $\vec{B}$ qui est modifié le sens du champ magnétique dépend de l'orientation de l'espace : c'est un *vecteur axial* (ou pseudo-vecteur)

la force de Laplace $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{L} = I\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ garde le même sens du fait du produit vectoriel

heureusement car le sens d'une force ne peut dépendre de l'orientation de l'espace ! c'est un vecteur polaire



1.7 Symétries

les symétries de $\vec{B}$ sont celles de tout champ vectoriel axial

soit une distribution de courants D. Il faut distinguer :

— la recherche de ***plans de symétrie ou d'antisymétrie* de D** passant par un point M donné (pour montrer que **certaines composantes de $\vec{B}$ sur la base locale en *M*, judicieusement choisie, sont nulles**).

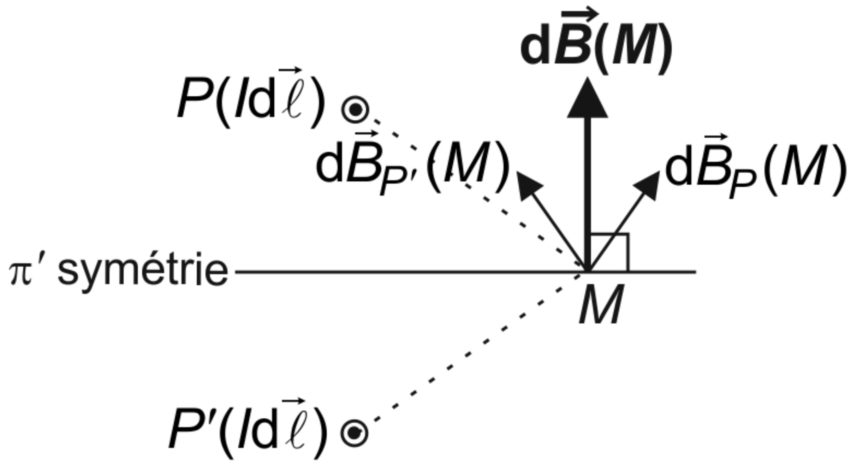
— les ***invariances* de D** (ce qui permet de montrer que **les composantes de $\vec{B}$ sont indépendantes de certaines coordonnées de *M***).

● symétrie plane / antisymétrie plane

un plan π' est un plan de symétrie de D si les courants, en deux points P et P' symétriques par rapport à π', sont eux-mêmes symétriques par rapport à π'

d'après Biot et Savart (hors programme) : $d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell}}{PM^2} \wedge \vec{e}_{P \to M}$

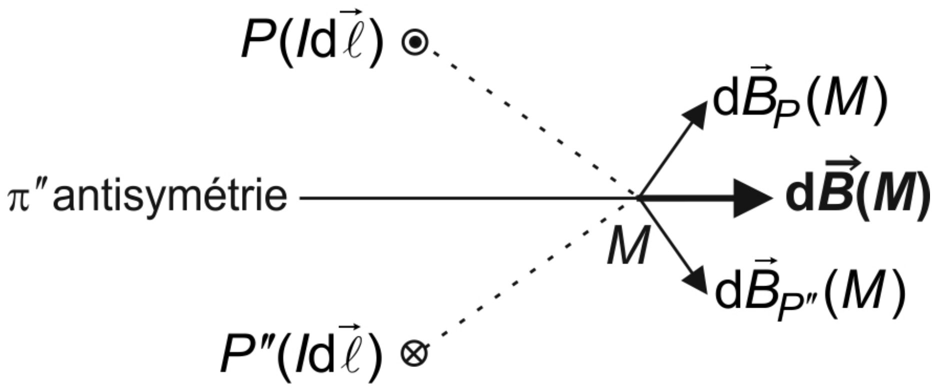
on peut effectuer la construction suivante :



si M appartient à π', plan de symétrie de la distribution de courants D, alors

$\vec{B}(M)$ est orthogonal à π'

un plan π'' est un plan d'antisymétrie de D si l'élément de courant en P'' symétrique de P par rapport à π'', est l'opposé du symétrique de celui en P



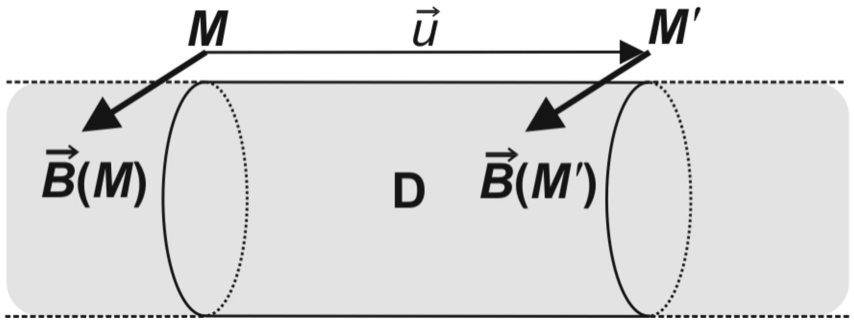
si M appartient à π'', plan d'antisymétrie de la distribution de courants D, alors

$\vec{B}(M)$ appartient à π''

invariance des distributions

Si D est invariante par une isométrie *I positive* (translation, rotation) et $M' = I(M)$, alors $\vec{B}(M') = I\left[\vec{B}(M)\right]$

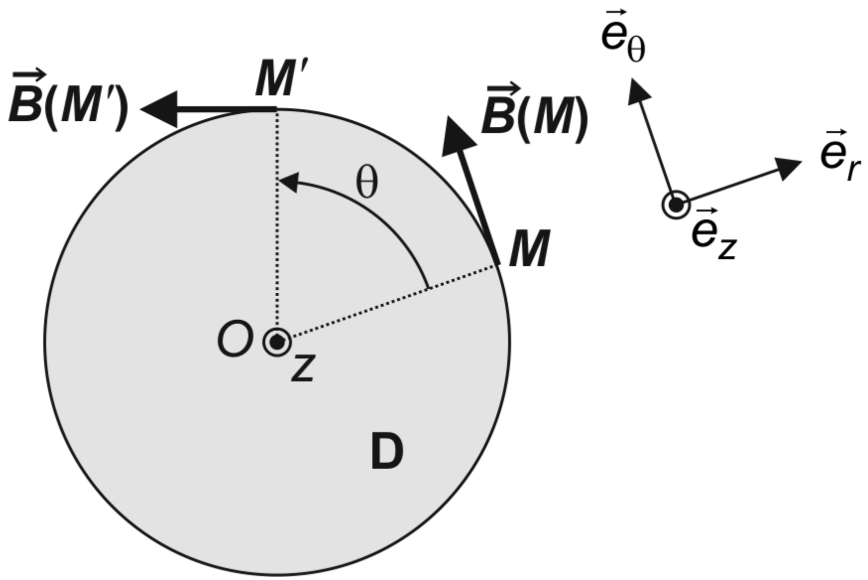
Si D est invariante par une isométrie *négative S* (symétrie plane), et $M' = S(M)$, alors $\vec{B}(M') = -S'\left[\vec{B}(M)\right]$



— si **une** translation T de vecteur $\vec{u}$ laisse invariante D (qui doit donc être de taille infinie), on doit avoir le même champ en M qu'au point M' qui se déduit de M par la translation T

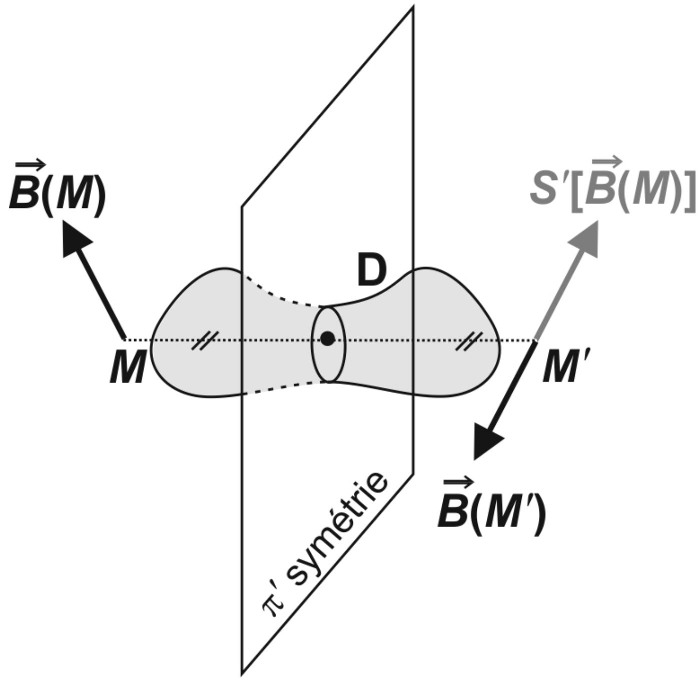
si **toute** translation selon $\vec{e}_z$ laisse invariante D, alors $\vec{B}$ est indépendant de z

— si **une** rotation R d'angle θ et d'axe Oz laisse invariante D, le champ $\vec{B}$ au point M' qui se déduit de M par R, se déduit de celui en M par la rotation R.

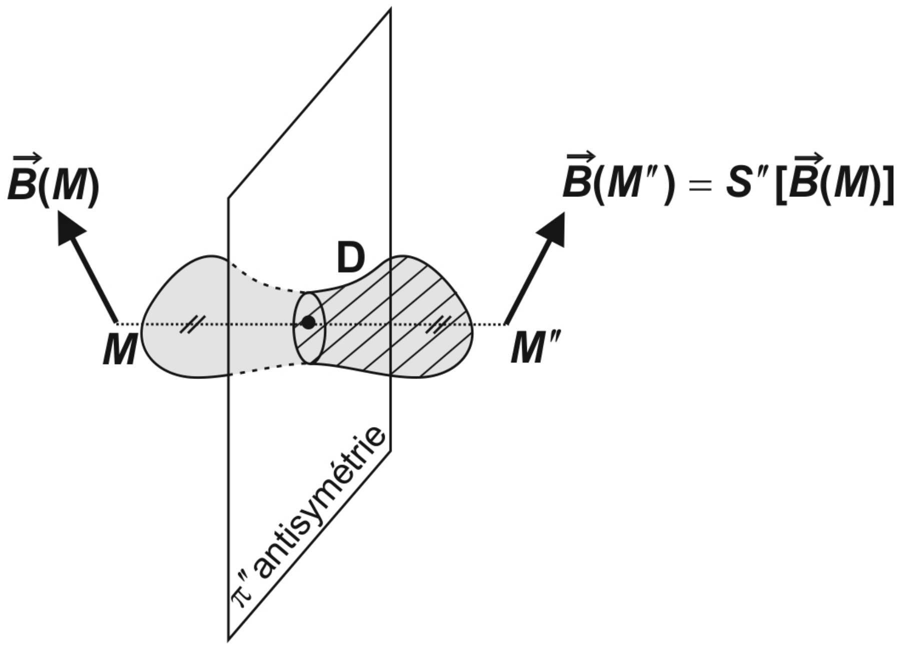


si **toute** rotation autour de Oz laisse invariante D, alors les composantes B_r, B_θ et B_z sont indépendantes de θ

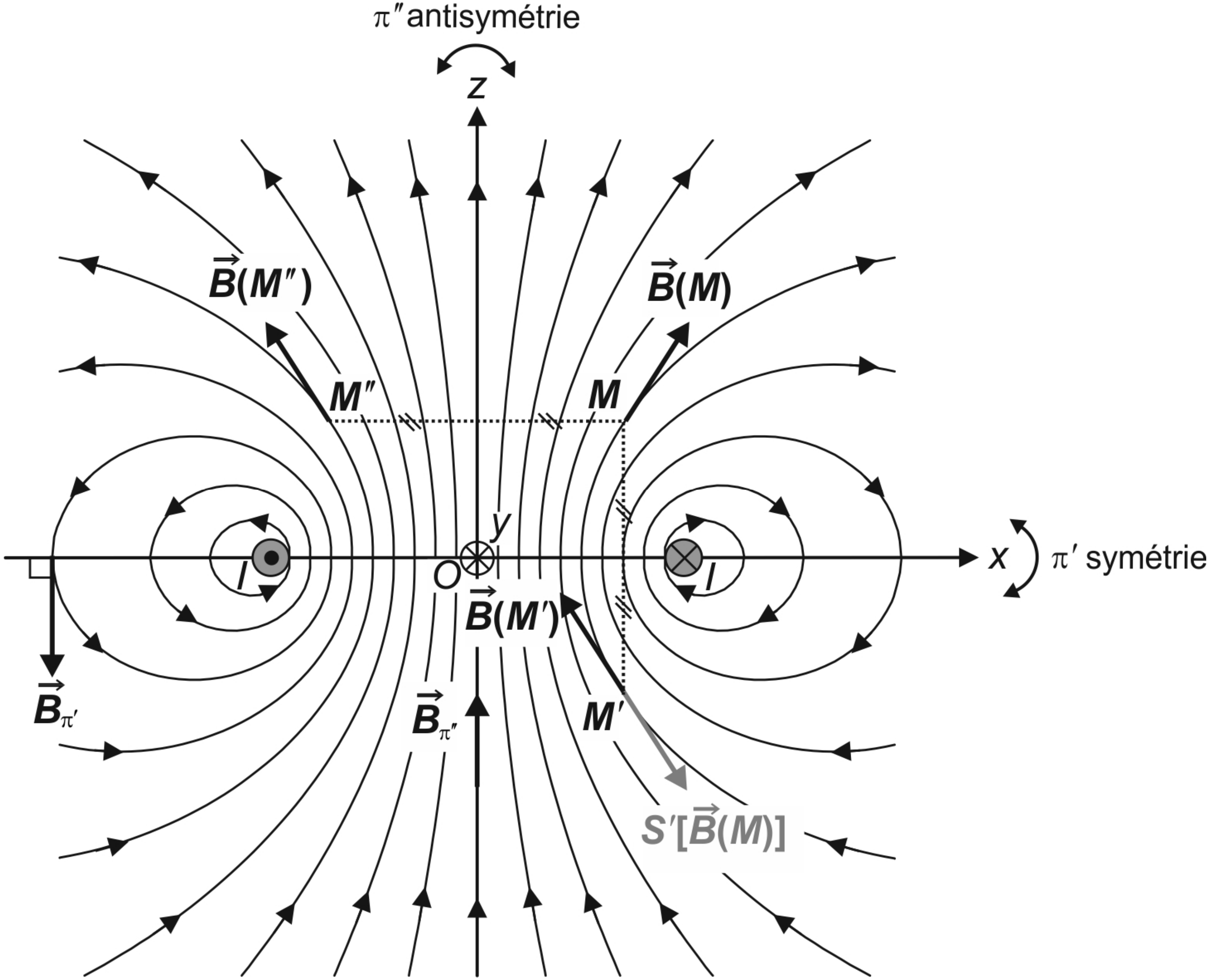
— si une symétrie S' par rapport à un plan π' laisse invariante D, le champ magnétique au point M', qui se déduit de M par S', est **anti**symétrique par rapport à π' de celui en M



— si D possède un plan π'' d'antisymétrie et $M'' = S''(M)$, où S'' est la symétrie par rapport à π'', $\vec{B}(M'') = S''\left[\vec{B}(M)\right]$



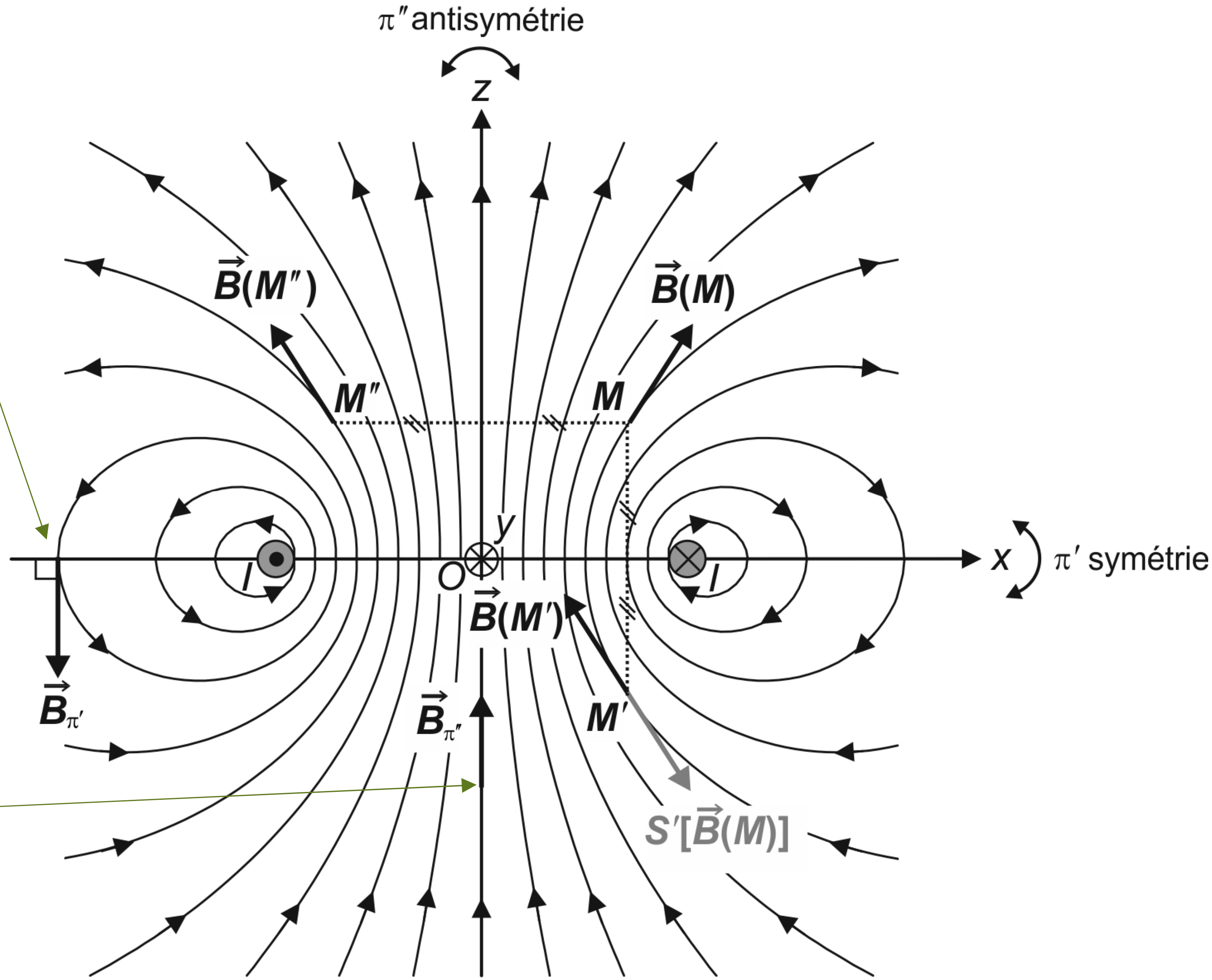
exemple : *spire circulaire* de centre O et d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I.



xOy est un plan de symétrie de D

yOz (ou tout plan contenant Oz) est un plan d'antisymétrie de D en $M \in xOy$, le champ est normal à ce plan, donc porté par $\vec{e}_z$

en $M \in Oz$, le champ doit être contenu dans tous les plans d'antisymétrie passant par M, donc dans tout plan contenant Oz : le champ est porté par $\vec{e}_z$



le plan de la figure ($y = 0$) est un plan d'antisymétrie, donc il contient $\vec{B}$

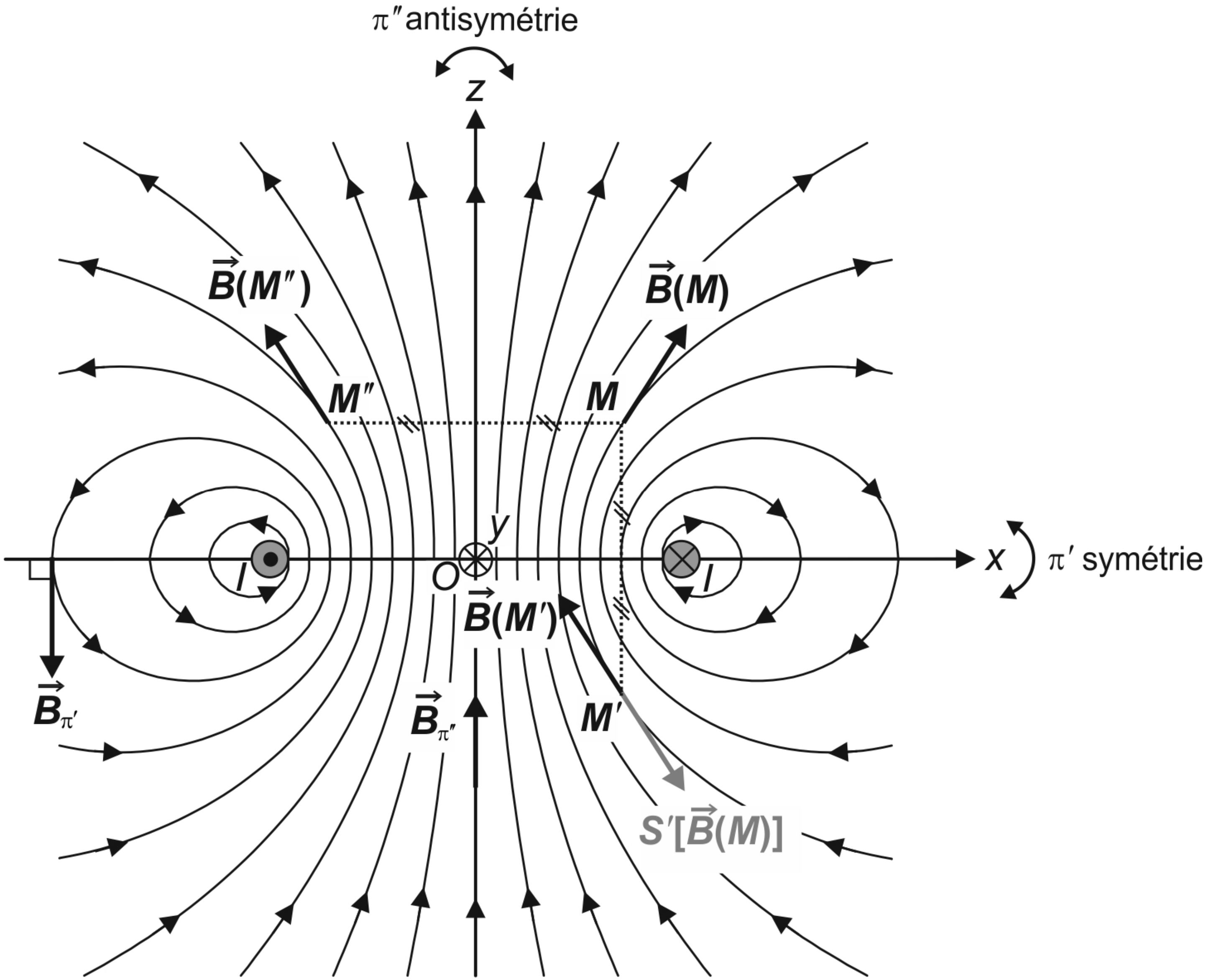
$\Rightarrow \vec{B}(x,z) = B_x(x,z)\vec{e}_x + B_z(x,z)\vec{e}_z$

avec :

$$\begin{cases} B_x(-x,z) = -B_x(x,z) \\ B_z(-x,z) = B_z(x,z) \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} B_x(x,-z) = -B_x(x,z) \\ B_z(x,-z) = B_z(x,z) \end{cases}$$



1.8 Énergie d'une distribution de courants

C'est l'énergie contenue dans le champ magnétique créé par D :

$$\boxed{U_m = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d^3\mathscr{V}}$$