3. DIPÔLE ÉLECTRIQUE

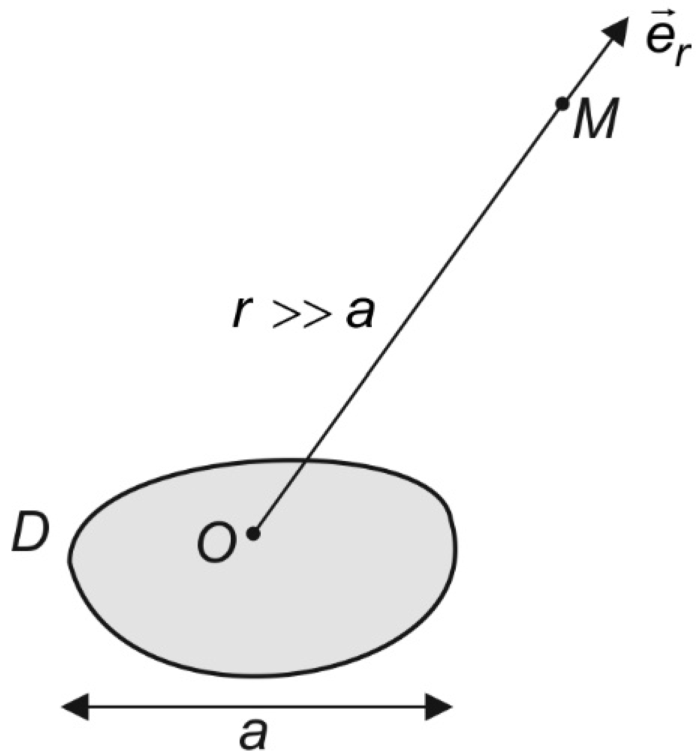
3.1 Définition / moment dipolaire électrique

D distribution de charges *localisée* autour de O et de taille caractéristique a

D « petite » :

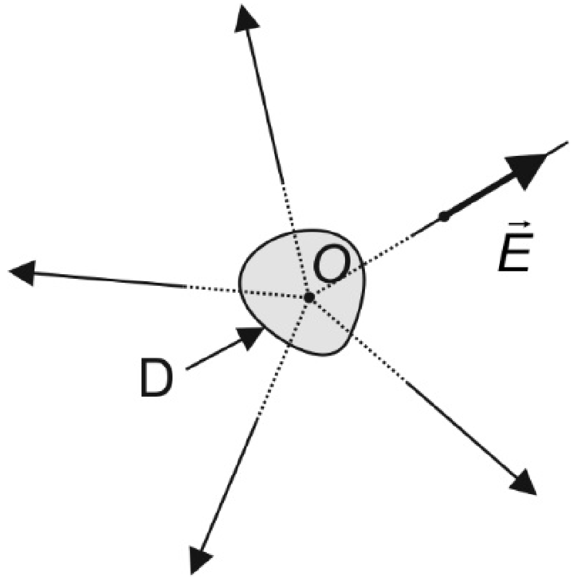
>>> on s'intéresse qu'au champ électrique créé par D « au loin » : en M tel que $r = OM >> a$

>>> Si D est placée dans un champ électrique ***extérieur*** (autre que celui qu'elle crée), ce champ est « localement » uniforme (il varie sur une distance caractéristique $\lambda >> a$)



on note Q la charge totale de D

>>> si $Q \neq 0$, D se comporte comme une charge ponctuelle Q en O, et crée au loin les champs :



$$\begin{cases} V(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ \vec{E}(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \text{ radial} \end{cases}$$

D subit d'autre part la force $\vec{F} \simeq Q\vec{E}(O)$

champ extérieur à la distribution, au point O

on parle de *monopôle électrique*

>>> si $Q = 0$, alors le point A (barycentre des charges négatives), et le point B (barycentre des charges positives), sont affectés de charges opposées (respectivement $-q$ et $+q > 0$).

si A et B ne sont pas confondus, la distribution D est dite **dipolaire**, de moment dipolaire

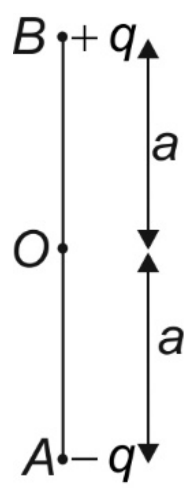
$$\boldsymbol{\vec{p} = q\,\overrightarrow{AB}} \quad \mathbf{(C \cdot m)} \qquad \vec{p} \neq \vec{0}$$

porte la charge $-q$ porte la charge $+q > 0$

on pose $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = 2a$

$$\Rightarrow \boxed{p = \|\vec{p}\| = 2aq}$$

milieu de $[AB]$



pour le champ « au loin », la répartition exacte des charges n’intervient pas : D est équivalente au doublet de charges $A(-q)$ et $B(+q)$.

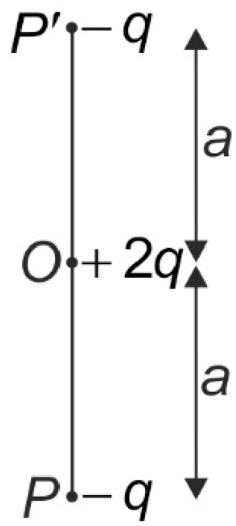
plus généralement, pour une distribution de charges ponctuelles q_i en P_i :

$$\boldsymbol{\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}}$$

il est indépendant du point O :

$$\sum_i q_i \overrightarrow{O'P_i} = \sum_i q_i \left[\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i} \right] = \underbrace{\left(\sum_i q_i \right)}_{0} \overrightarrow{O'O} + \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$$

exemple de distribution de charge totale nulle, mais *non* dipolaire :



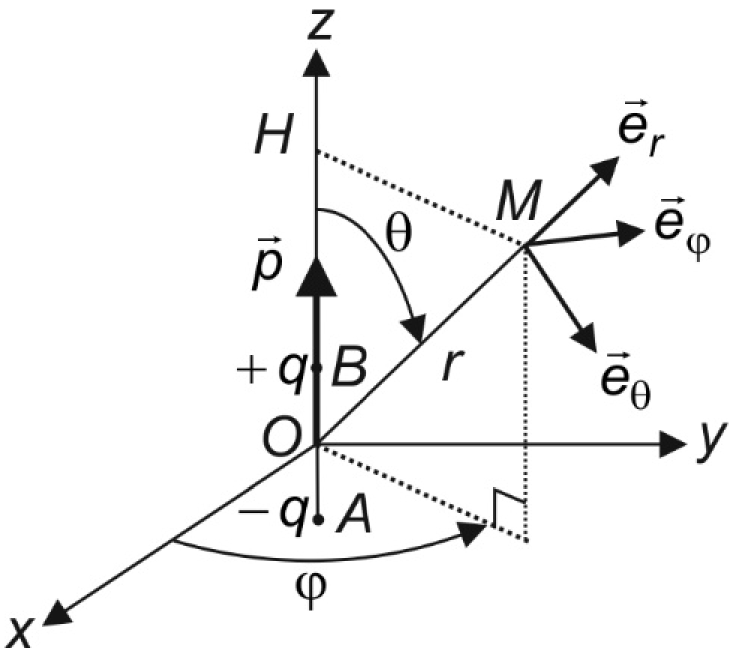
$$\vec{p} = \vec{0}$$

(distribution quadrupolaire)

3.2 Champ électrique créé

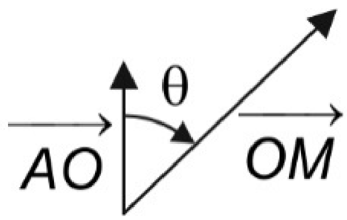
D au voisinage de O de moment $\vec{p} = p\vec{e}_z$

point M repéré à l'aide de ses coordonnées sphériques



$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 AM} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 BM}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{AO}^2 + 2\,\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}^2$$



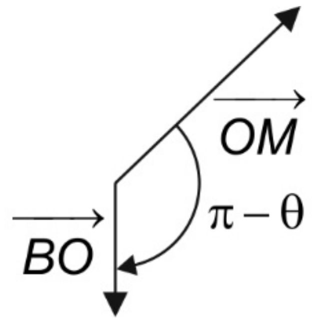
$$\Rightarrow AM^2 = a^2 + 2ar\cos\theta + r^2 = r^2\left[1 + 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right]$$

$$\frac{1}{AM} = \left[AM^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left[1 + 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

connaître ce calcul utile dans de nombreuses situations

$$\frac{a}{r} << 1 \Rightarrow \frac{1}{AM} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right] \text{ à l'ordre 1 en } \frac{a}{r}$$

pour $\dfrac{1}{BM}$, il suffit de faire $\theta \to \pi - \theta$ et $\cos\theta \to -\cos\theta$



$$\Rightarrow \frac{1}{BM} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{a}{r}\cos\theta\right]$$

$$\text{finalement } V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-\cancel{1} + \frac{a}{r}\cos\theta + \cancel{1} + \frac{a}{r}\cos\theta\right] = \frac{2aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

les termes d'ordre 0 en a / r s'éliminent car à l'ordre 0, tout se passe comme si les charges q et $-q$ étaient confondues en O : champ électrique et potentiel sont nuls à cet ordre d'approximation

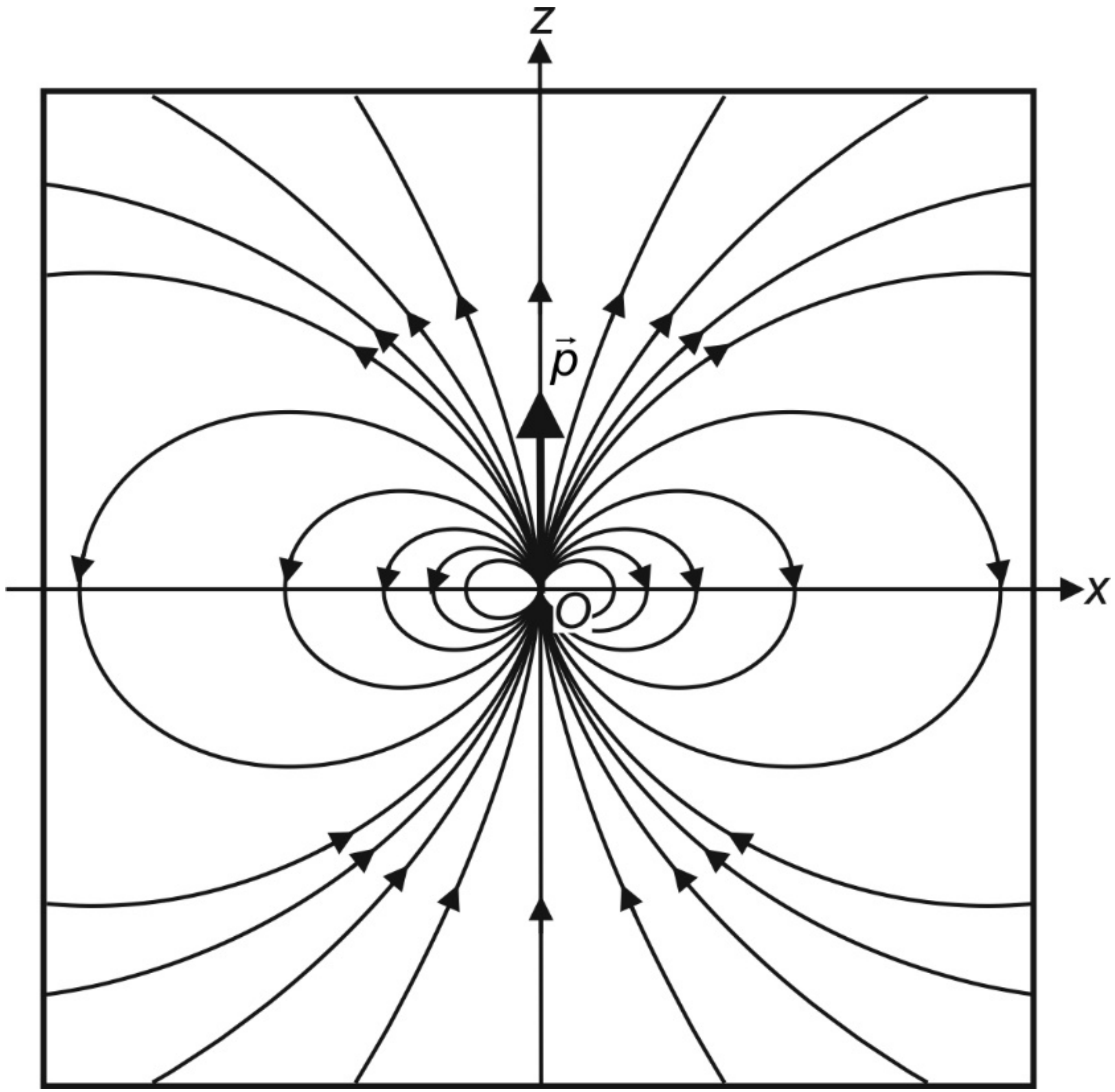
Le potentiel est une *différentielle* du potentiel en $1 / r$ créé par les deux charges ponctuelles : il est donc en $1 / r^2$ et le champ électrique en $1 / r^3$

$$\boxed{\boldsymbol{V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}}$$

(indépendant de φ car Oz est un axe de symétrie de révolution : D est invariante par toute rotation autour de Oz)

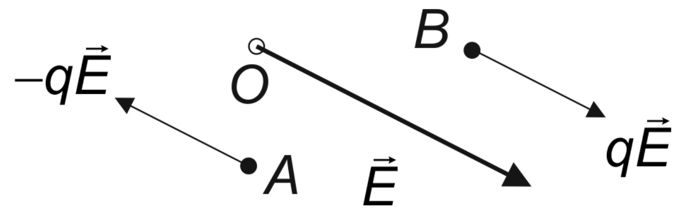
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_\theta}$$

lignes de champ électrique obtenues par simulation numérique



3.3 Actions subies par un dipôle électrique plongé dans un champ extérieur

dipôle de moment dipolaire $\vec{p}$ plongé dans un champ électrique **extérieur** $\vec{E}$ uniforme ou qui varie sur une distance >> la taille *a* de la distribution

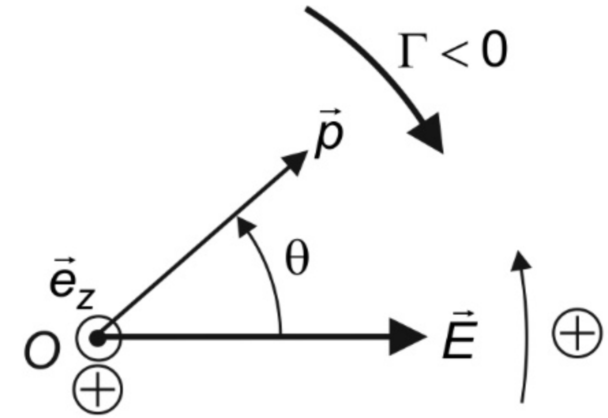


$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_{/A} + \vec{F}_{/B} = -q\vec{E} + q\vec{E} = \vec{0}$$

$$\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OA} \wedge (-q\vec{E}) + \overrightarrow{OB} \wedge q\vec{E} = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \wedge q\vec{E} = q\,\overrightarrow{AB} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

la **résultante** des actions est nulle dans un champ électrique uniforme : le dipôle subit un *couple* de **moment** $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ indépendant du point de réduction

ce couple tend à aligner le moment dipolaire sur le champ électrique



$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} = \underbrace{-\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{E}\| \sin\theta}_{\Gamma<0 \text{ si } \sin\theta>0}\, \vec{e}_z$$

remarque : si le champ électrique extérieur n'est pas tout-à-fait uniforme, on a toujours $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$, mais alors on montre que la résultante n'est pas rigoureusement nulle :

$$\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E})}$$

définition : dipôle ***rigide*** si $\vec{p}$ est indépendant de $\vec{E}$

si $\vec{p} = p\vec{e}_x$ avec $p > 0$ et $\dfrac{\partial E_x}{\partial x} > 0 \Rightarrow F_x = p\dfrac{\partial E_x}{\partial x} > 0$

un dipôle rigide a tendance à se déplacer dans le sens des champs électriques intenses

énergie potentielle du dipôle

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{p}(A) + E_\mathrm{p}(B)$$

extensivité car $\vec{E}$: champ extérieur

$$= -qV_A + qV_B = -q\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} \simeq -q\vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

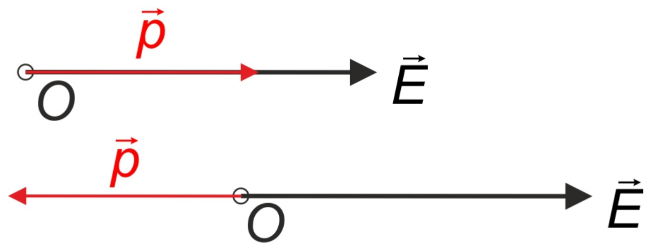
car $\vec{E}$ est quasiment uniforme entre A et B

l'énergie potentielle du dipôle vaut : $\boldsymbol{E_p} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{E}\| \cdot \cos\theta$

si le dipôle est *rigide*, p ne varie pas

E_p minimale pour $\theta = 0$: équilibre stable

E_p maximale pour $\theta = \pi$: équilibre instable



>>> des grains de semoule placés dans de l'huile de ricin se *polarisent* en présence d'un champ électrique assez faible ; ils se comportent alors comme des dipôles et s'orientent selon les lignes de champ électrique

>>> un matériau isolant se polarise sous l'action d'un champ électrique extérieur et se comporte comme un ensemble de dipôles, créant ainsi un champ propre

>>> les molécules polaires créent un champ dipolaire à une distance égale à quelques fois leur taille, et subissent des actions lorsqu'elles sont plongées dans le champ électrique créé par les autres molécules

>>> le modèle du dipôle électrique permet d'expliquer la cohésion de certains cristaux moléculaires, la solvatation des ions dans un solvant polaire, etc.

3.4 Topologie du champ électrique stationnaire

c'est une conséquence des équations locales le régissant

(1) $\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \neq 0 \Rightarrow \vec{E}$ n'est pas à flux conservatif

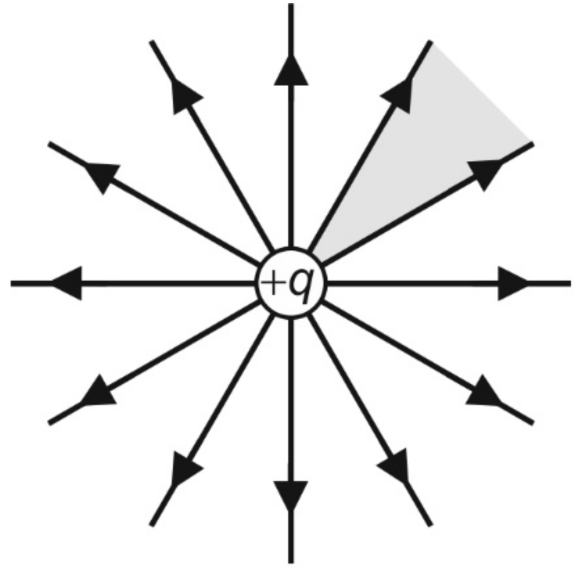
cependant, dans les zones vides de charges : $\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

$\Rightarrow$ dans ces zones $\vec{E}$ est d'autant plus intense que les lignes de champ sont resserrées

or pour D localisée, le champ électrique décroît lorsqu'on s'écarte de D

$\Rightarrow$ les lignes de champ électrique s'écartent les unes des autres (les tubes de champ s'évasent) lorsqu'elles s'éloignent des charges

$\Rightarrow$ les lignes de champ électrique se coupent en une charge ponctuelle (le champ diverge à partir des charges positives et converge vers les charges négatives)



les lignes de champ électrique créé par une charge ponctuelle s'écartent quand elles s'éloignent de cette charge

(2) $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$

$\Rightarrow$ les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles

$\Rightarrow$ les lignes de champ ne peuvent pas être fermées car V décroît le long d'une telle ligne

remarque : les lignes de champ d'un dipôle semblent se couper en O, mais un « zoom » avant montre qu'en réalité, elles partent des charges positives pour aboutir sur les charges négatives

sauf en un point où se trouve une charge ponctuelle (où le champ est infini), ou en un point de champ nul, les lignes de champ *ne peuvent pas se couper* en M car par définition $\vec{E}(M) \neq \vec{0}$ est tangent à la ligne de champ passant par M.

exemple : lignes du champ créé par un doublet de charges identiques dont le point O est le milieu :

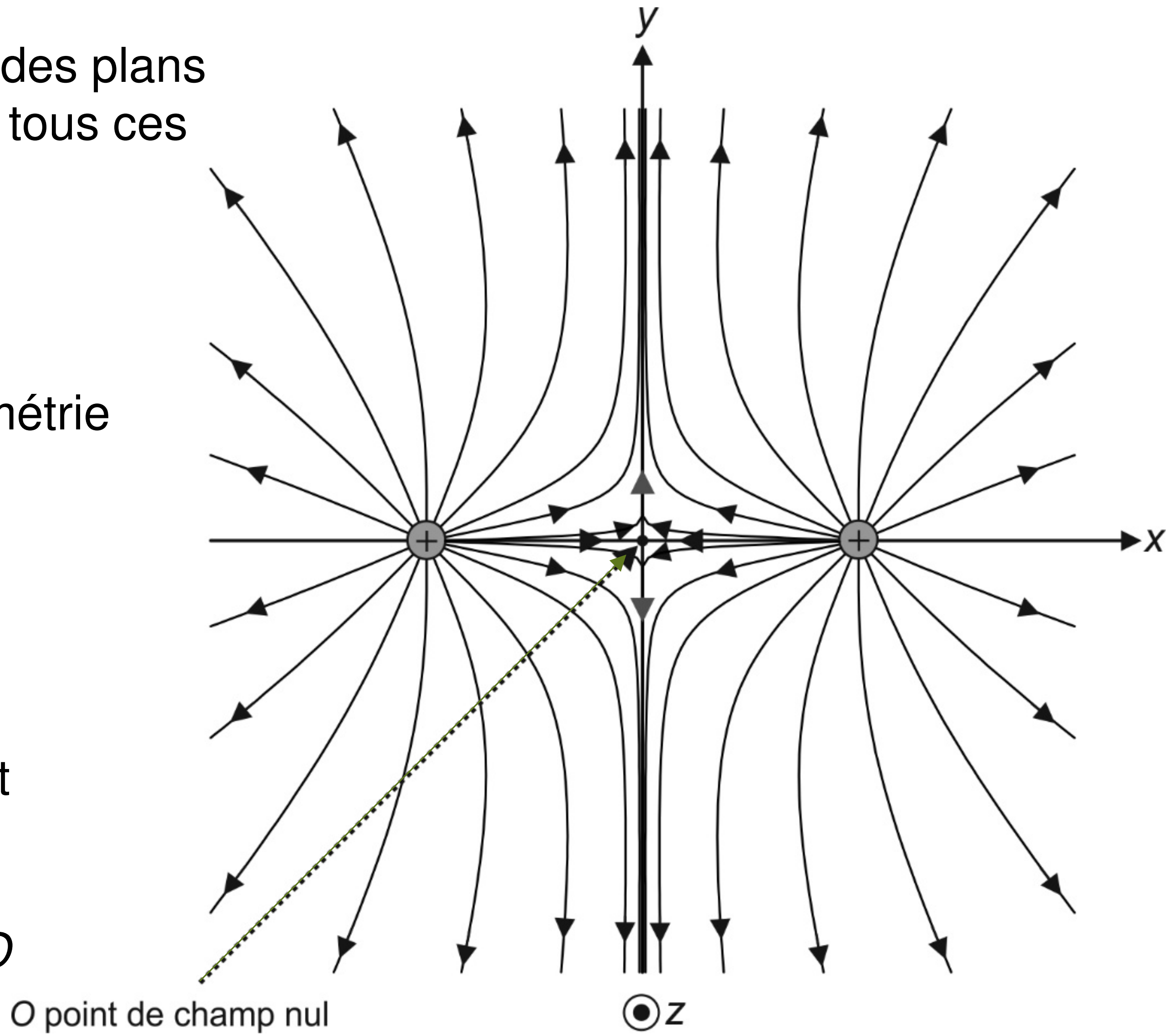
tous les plans contenant Ox sont des plans de symétrie de D : $\vec{E}(O)$ est dans tous ces plans, donc porté par Ox, soit :

$$E_y(O) = E_z(O) = 0$$

le plan $x = 0$, plan médiateur des charges, est aussi un plan de symétrie de D donc il contient $\vec{E}(O)$

$$\Rightarrow E_x(O) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(O) = \vec{0}}$$



des lignes de champ se coupent en O où le champ est nul, certaines convergeant vers O d'autres divergeant à partir de O

$\Rightarrow$ différent du cas des charges ponctuelles