

3. DIPÔLE MAGNÉTIQUE

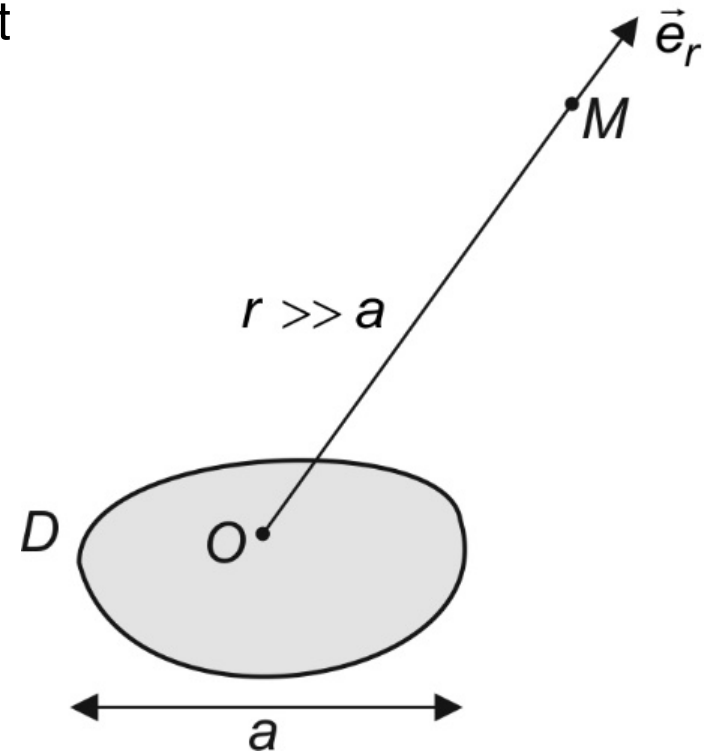
3.1 Définition / moment (dipolaire) magnétique

D distribution de courants *localisée* autour de O et de taille caractéristique a

D « petite » :

>>> on s'intéresse qu'au champ magnétique créé par D « au loin » : en M tel que $r = OM \gg a$

>>> Si D est placée dans un champ magnétique **extérieur** (autre que celui qu'elle crée), ce champ est « localement » uniforme (il varie sur une distance caractéristique $\lambda \gg a$)



circuit filiforme γ orienté parcouru par un courant d'intensité I orienté dans le même sens que γ

en régime stationnaire, γ est nécessairement fermé.

$\mathcal{S}$ surface quelconque s'appuyant sur γ , le vecteur surface de γ est par définition :

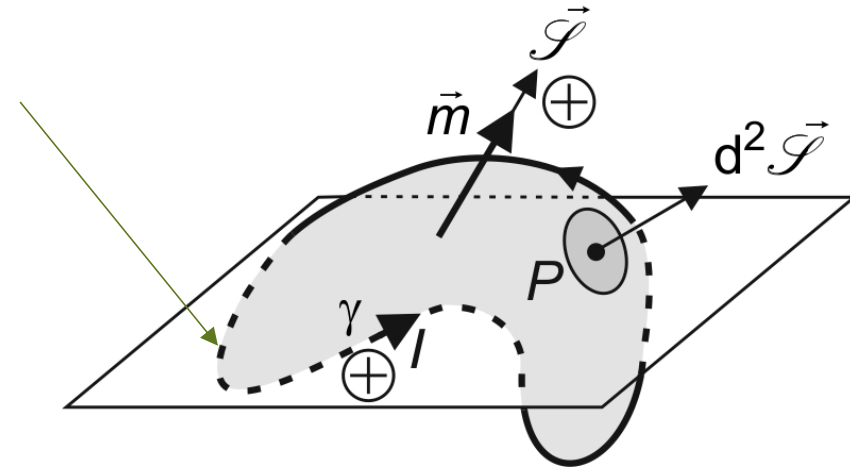
$$\vec{\mathcal{J}} = \iint_{\mathcal{S}(\gamma)} d^2\vec{\mathcal{J}} \quad (\text{ne dépend que de } \gamma)$$

par définition, le **moment magnétique** de γ est : $\vec{m} = I\vec{\mathcal{J}}$ (en $A \cdot m^2$)

on note $m = \|\vec{m}\|$

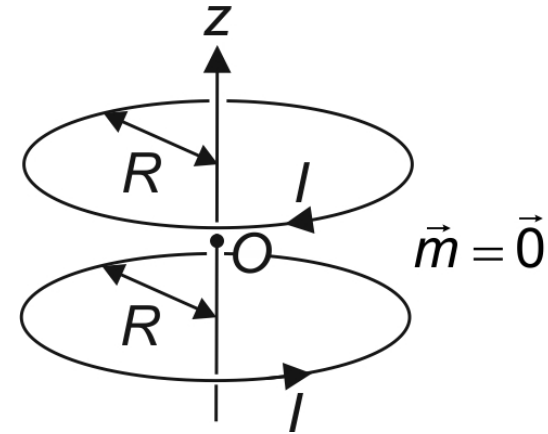
D est dite *dipolaire* si son moment magnétique total (somme des moments magnétiques des circuits qu'elle contient) est non nul : $\vec{m} \neq \vec{0}$

exemple de distribution dipolaire : une seule spire



exemple de distribution **non** dipolaire :

$$\vec{m} = I\vec{\mathcal{J}} - I\vec{\mathcal{J}} = \vec{0}$$



3.2 Champ magnétique créé

il n'existe pas de champ magnétique monopolaire (champ radial en $1 / r^2$) :

pas de monopôle magnétique

(le flux d'un champ magnétique divergeant radialement à partir d'un point O ne serait pas nul à travers une sphère de centre O ...)

$\Rightarrow$ le champ magnétique à grande distance de D est au moins en $1 / r^3$

soit D une distribution dipolaire de moment $\vec{m} \neq \vec{0}$; comme on s'intéresse au champ créé *au loin*, la répartition exacte des courants n'intervient pas :

$\vec{B}$ est le même que celui créé par une spire de moment dipolaire $\vec{m} = m\vec{e}_z$

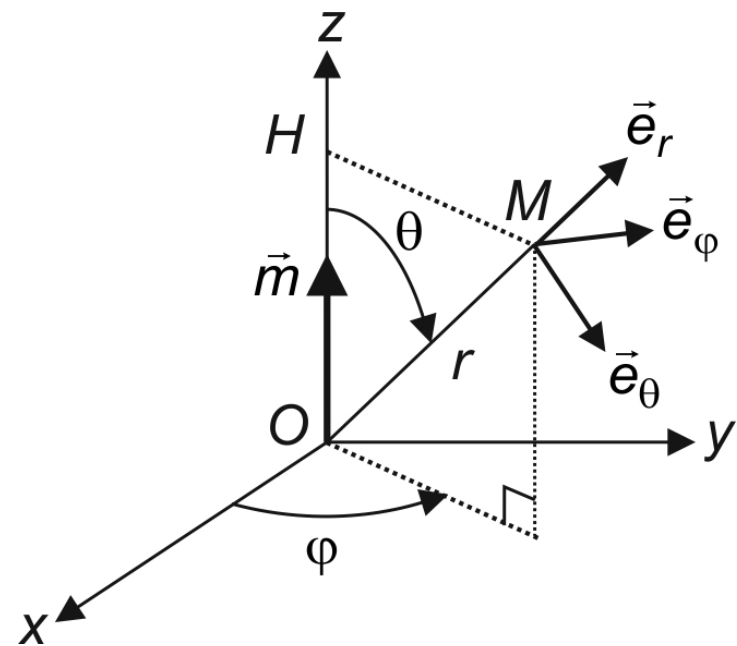
on montre :

$$\vec{B}(M) = \frac{2\mu_0 m \cos\theta}{4\pi r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta$$

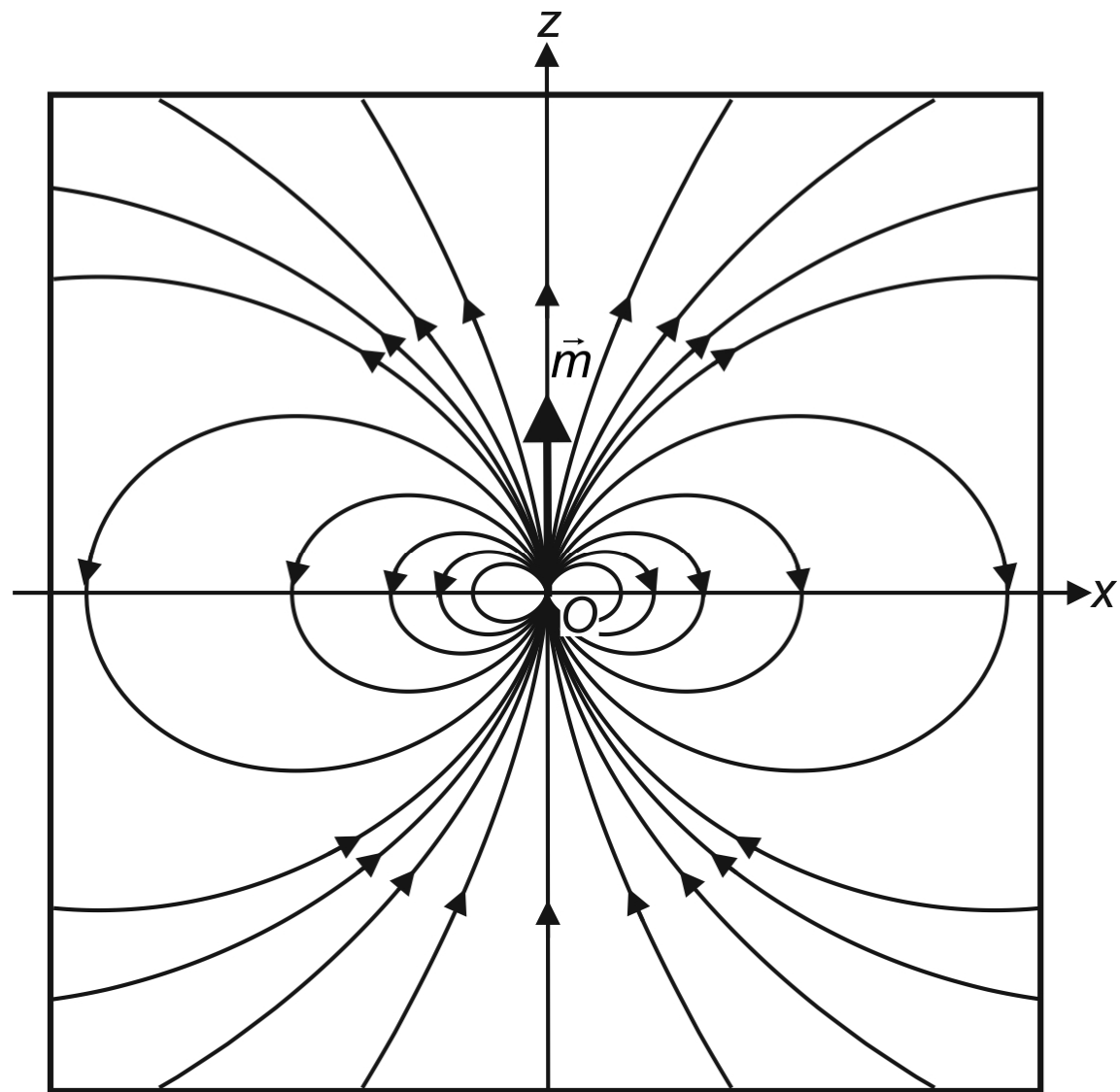
: analogie formelle avec le champ électrostatique dipolaire

$$\vec{E} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$$

$$\frac{p}{\epsilon_0} \leftrightarrow \mu_0 m$$



lignes de champ
magnétique
obtenues par simulation
numérique



3.3 Actions subies par un dipôle magnétique plongé dans un champ extérieur

dipôle de moment dipolaire $\vec{m}$ plongé dans un champ électrique **extérieur** $\vec{B}$ uniforme ou qui varie sur une distance $\gg$ la taille a de la distribution

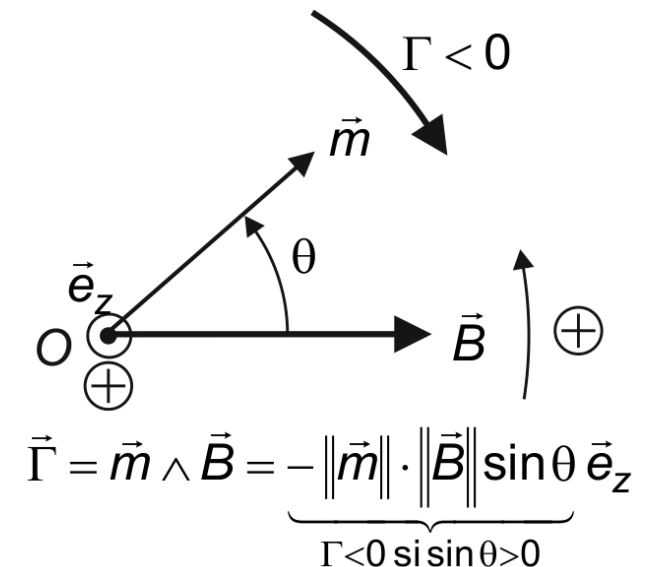
la spire équivalente est soumise à des **actions de Laplace** de résultante :

$$\vec{F}_L = \oint_{P \in \gamma} [I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}] = I \underbrace{\left[\oint_{P \in \gamma} d\vec{\ell} \right]}_{=\vec{0}} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

la **résultante** des actions est nulle dans un champ magnétique uniforme : le dipôle subit un *couple* de **moment** $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ indépendant du point de réduction

admis

ce couple tend à aligner le moment dipolaire sur le champ magnétique



remarque : si le champ magnétique extérieur n'est pas tout-à-fait uniforme, on a toujours :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

mais alors on montre que la résultante des actions de Laplace n'est pas rigoureusement nulle :

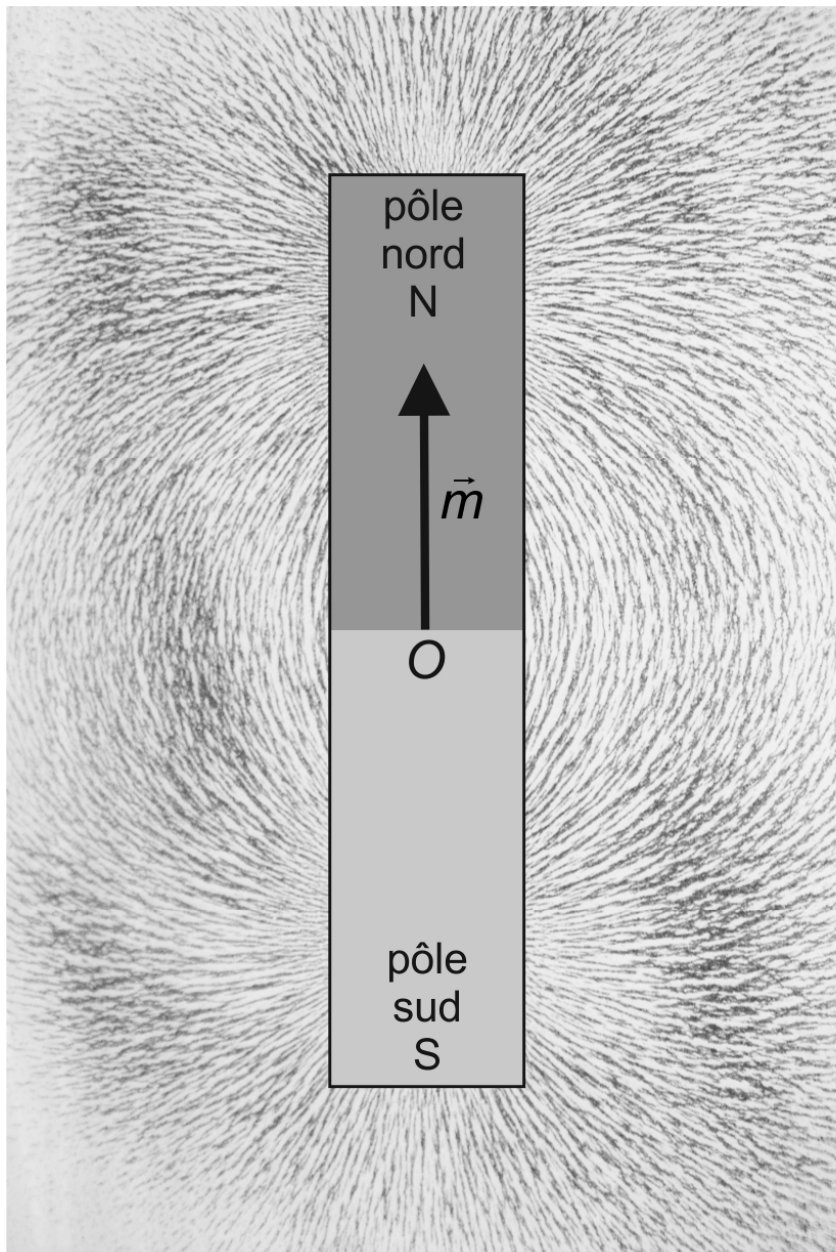
$$\vec{F}_L = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

définition : dipôle **rigide** si $\vec{m}$ est indépendant de $\vec{B}$

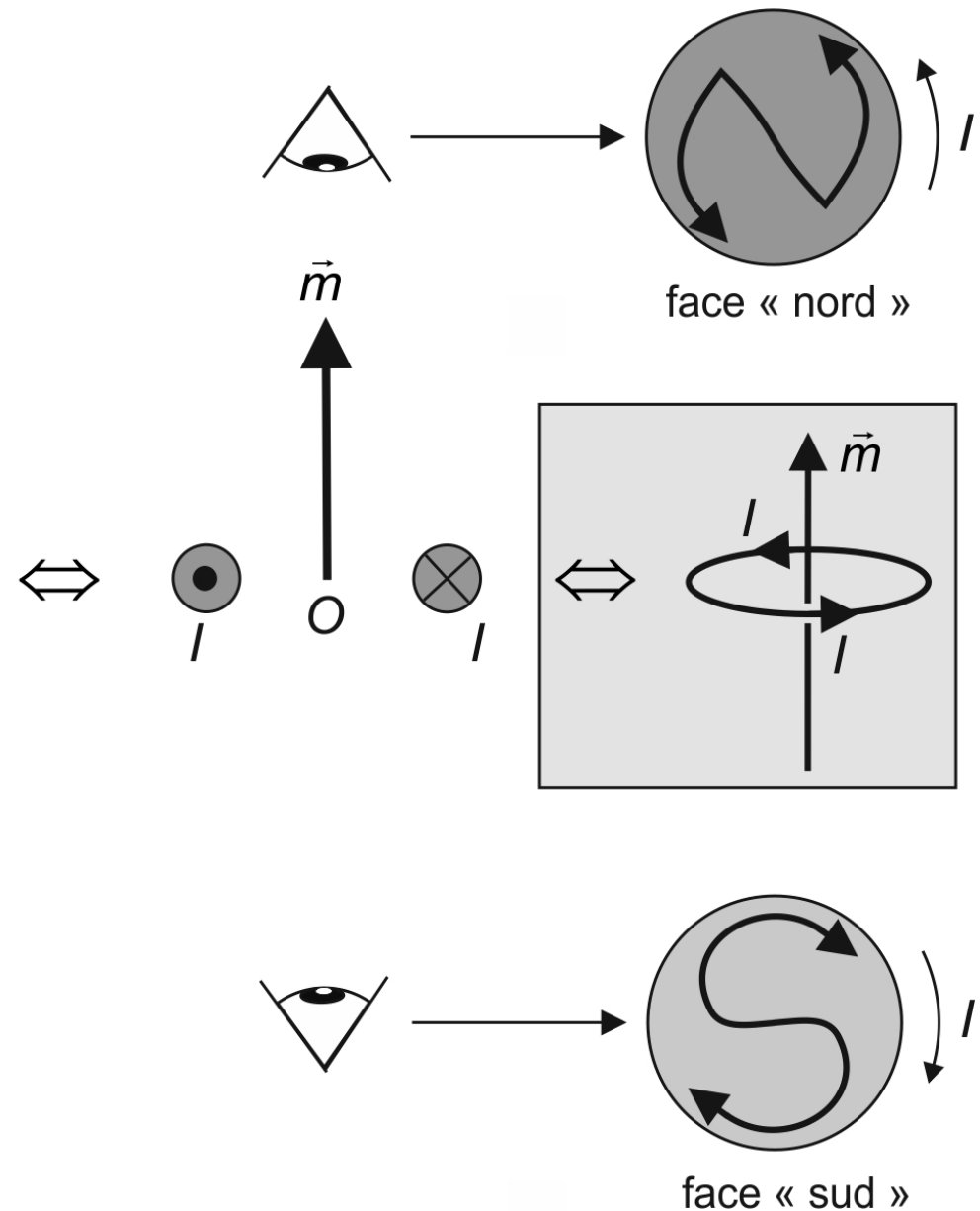
$$\text{si } \vec{m} = m\vec{e}_x \text{ avec } m > 0 \text{ et } \frac{\partial B_x}{\partial x} > 0 \Rightarrow F_{Lx} = m \frac{\partial B_x}{\partial x} > 0$$

un dipôle rigide a tendance à se déplacer dans le sens des champs magnétiques intenses

un aimant droit se comporte comme une boucle de courant :

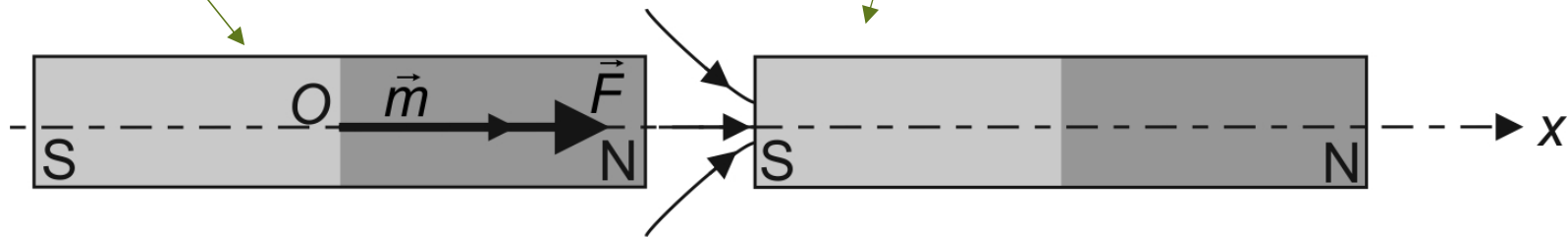


aimant permanent: visualisation des lignes de champ avec de la limaille de fer

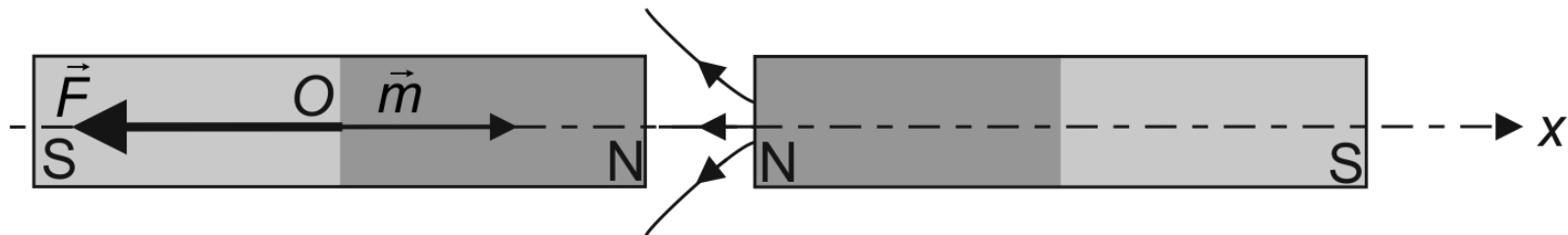


l'aimant est donc soumis à $\vec{F} = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B})$ s'il est placé dans $\vec{B}$ extérieur non uniforme, par exemple celui créé par un deuxième aimant

on ne parle plus de force de Laplace dans ce cas (l'aimantation n'est pas due à des courants macroscopiques)



$\frac{\partial B_x}{\partial x} > 0$: l'aimant de gauche est attiré par l'aimant de droite



$\frac{\partial B_x}{\partial x} < 0$: l'aimant de gauche est repoussé par l'aimant de droite

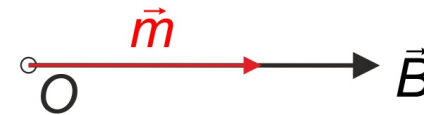
énergie potentielle du dipôle

l'énergie potentielle du dipôle vaut : $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -\|\vec{m}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \theta$

↑
admis

si le dipôle est *rigide*, m ne varie pas

E_p minimale pour $\theta = 0$: équilibre stable



E_p maximale pour $\theta = \pi$: équilibre instable



>>> la limaille de fer, posée sur un support, s'aimante dans le champ magnétique d'un aimant, puis s'oriente selon les lignes de champ magnétique

>>> une petite aiguille aimantée en rotation autour Oz a tendance à aligner son moment magnétique sur la composante du champ magnétique extérieur orthogonale à Oz : c'est le principe de la boussole

3.4 Magnéton de Bohr

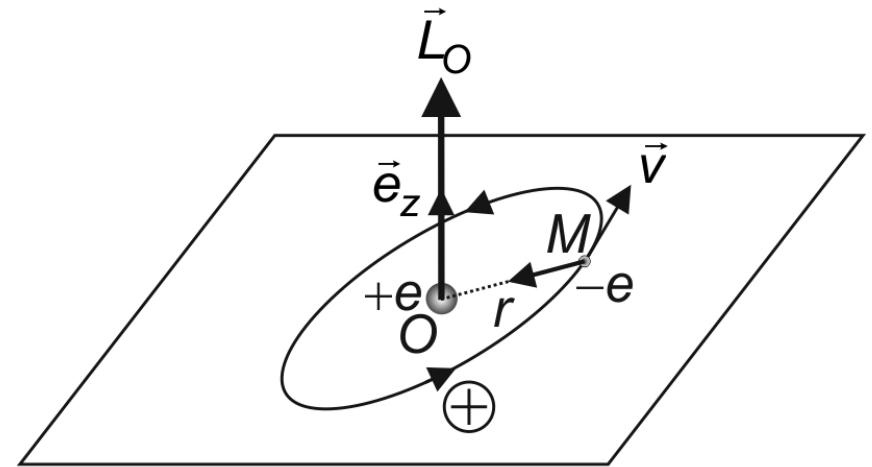
modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène : l'électron, de masse m_e et de charge $-e$, décrit dans le plan xOy une trajectoire *circulaire* de rayon r autour du proton fixe en O

et de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

vecteur vitesse de l'électron en M : $\vec{v} = r\omega\vec{e}_\theta$

moment cinétique orbital :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m_e \vec{v} = m_e r^2 \omega \vec{e}_z$$



Trajectoire circulaire de l'électron autour du proton dans le modèle de Bohr de H.

$$\Leftrightarrow \text{boucle de courant d'intensité } I = \frac{-e}{T} = \frac{-e\omega}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{m} = I \vec{\mathcal{S}} = \frac{-e\omega}{2\pi} \pi r^2 \vec{e}_z = -\frac{er^2\omega}{2} \vec{e}_z = \gamma_e \vec{L}_O \text{ avec } \gamma_e = -\frac{e}{2m_e}$$

moment magnétique

rapport gyromagnétique de l'électron

ce modèle planétaire classique entraîne l'instabilité de l'atome H (l'électron, dont l'accélération est non nulle, émet un rayonnement électromagnétique, perd de l'énergie, et finit par s'écraser sur le proton !)

Bohr proposa un modèle selon lequel :

- (1) il existe des orbites circulaires stables pour lesquelles l'électron ne rayonne pas.
- (2) pour ces trajectoires, le moment cinétique de l'électron vaut en norme :

$$\|\vec{L}_O\| = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*, \text{ où } h \text{ est la constante de Planck}$$

dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, le moment magnétique est proportionnel au moment cinétique orbital de l'électron :

$$\vec{m} = \gamma_e \vec{L}_O \text{ où } \gamma_e = -\frac{e}{2m_e} \text{ (rapport gyromagnétique de l'électron)}$$

tout comme la norme du moment cinétique orbital, celle de moment magnétique est quantifiée :

$$\|\vec{m}\| = n\mu_B \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \text{ est le magnéton de Bohr}$$

>>> les particules élémentaires (électron, quark, neutrino, photon, boson de Higgs...) possèdent un moment magnétique intrinsèque (de **spin**) et ces moments se somment pour les particules composées (proton, neutron, noyaux atomiques...)

>>> le moment magnétique **total** de l'atome d'hydrogène est la somme des moments magnétiques intrinsèques du proton et de l'électron, et du moment cinétique **orbital** de l'électron.

>>> tous ces moments s'ajoutent vectoriellement, et si un matériau est magnétisé, il existe un moment magnétique $d^3\vec{m}$ dans un volume mésoscopique $d^3\mathcal{V}$

$$\text{aimantation du matériau : } \vec{M} = \frac{d^3\vec{m}}{d^3\mathcal{V}} \text{ (en } \text{A} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}$$

>>> ordre de grandeur pour un matériau *ferromagnétique à saturation* : tous les moments magnétiques des atomes sont alignés et de même sens, et pour un atome $m \approx \mu_B \Rightarrow M_{\text{sat}} \approx n^* \mu_B \approx 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ ($M_{\text{sat}} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ pour du fer doux)

↑
densité atomique $\approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$

3.5 Topologie du champ magnétique stationnaire

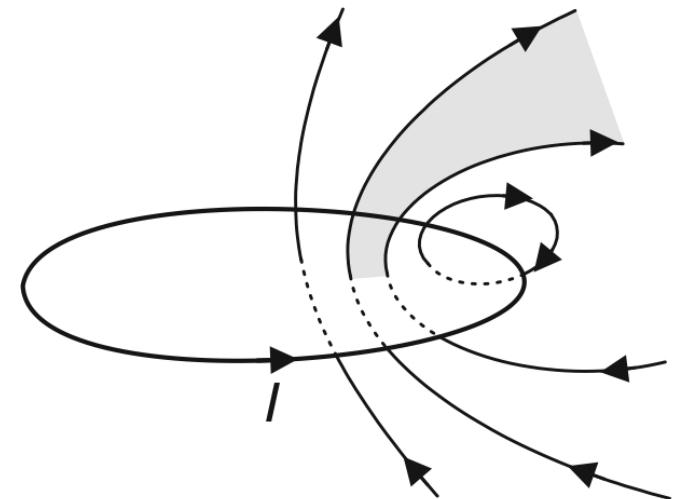
c'est une conséquence des équations locales le régissant

$$(1) \operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \text{ est à flux conservatif}$$

$\Rightarrow \vec{B}$ est d'autant plus intense que les lignes de champ sont resserrées

or pour D localisée, le champ magnétique décroît lorsqu'on s'écarte de D

$\Rightarrow$ les lignes de champ magnétique s'écartent les unes des autres (les tubes de champ s'évasent) lorsqu'elles s'éloignent des courants



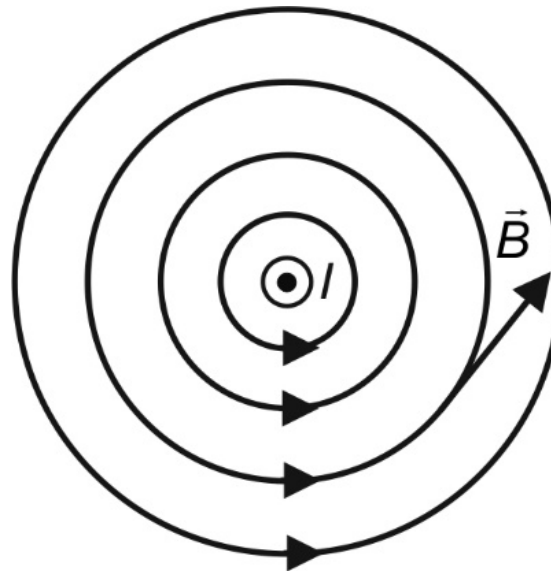
les lignes de champ magnétique créées par une spire s'écartent lorsqu'elles s'éloignent de la spire

pas de monopôle magnétique donc pas d'équivalent magnétique à une charge ponctuelle $\Rightarrow$ contrairement aux lignes de champ électrique qui peuvent se couper en une charge ponctuelle, **si des lignes de champ magnétique se coupent, ce ne peut être qu'en un point de champ nul**

$$(2) \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \neq \vec{0}$$

les lignes de champ *peuvent* être fermées ; le théorème d'ampère appliqué sur une ligne de champ magnétique γ fermée montre qu'un courant traverse γ :

le champ magnétique « tourbillonne » autour des courants



lignes de champ magnétique
créé par un fil rectiligne infini

exemple : deux spires circulaires identiques, de même axe Oz , parcourues par des courants de même intensité, mais de sens opposés ; O est le centre du système

tous les plans contenant Oz sont des plans d'antisymétrie de D : $\vec{B}(O)$ est dans tous ces plans, donc porté par Oz , soit : $B_x(O) = B_y(O) = 0$

le plan $z = 0$ est aussi un plan d'antisymétrie de D donc il contient

$$\vec{B}(O)$$

$$\Rightarrow B_z(O) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}(O) = \vec{0}$$

des lignes de champ se coupent en O où le champ est nul, certaines convergeant vers O d'autres divergeant à partir de O

