

1. INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS L'A.R.Q.S

1.1 A.R.Q.S magnétique dans le vide

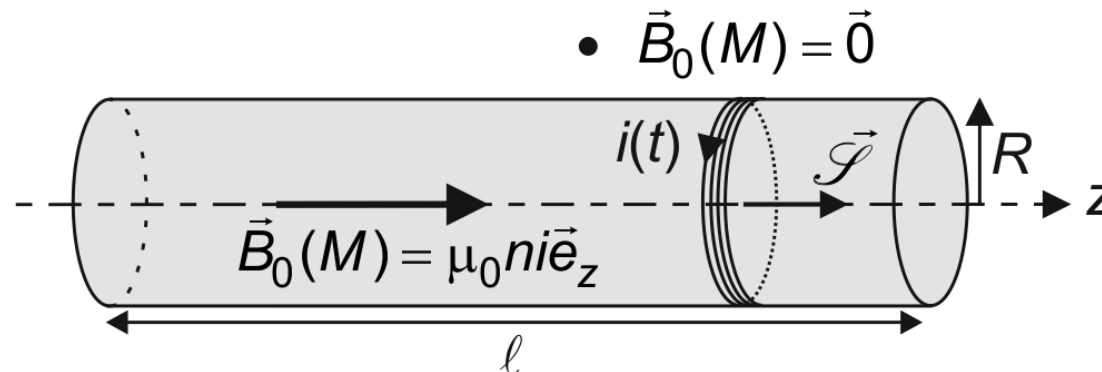
● approximation

régime stationnaire : $\vec{B}_0(M, t) \Rightarrow \vec{B}_0$ régi par

$$\begin{cases} \text{M.T} & \text{div} \vec{B}_0 = 0 \\ \text{M.A} & \text{rot} \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}_0 \end{cases}$$

une distribution de courants D : $\vec{J}_0(P)$, est source de $\vec{B}_0(M)$ en tout point M

exemple : pour un solénoïde de longueur ℓ , avec n spires par unité de longueur, parcouru par un courant i **stationnaire**, la solution est :

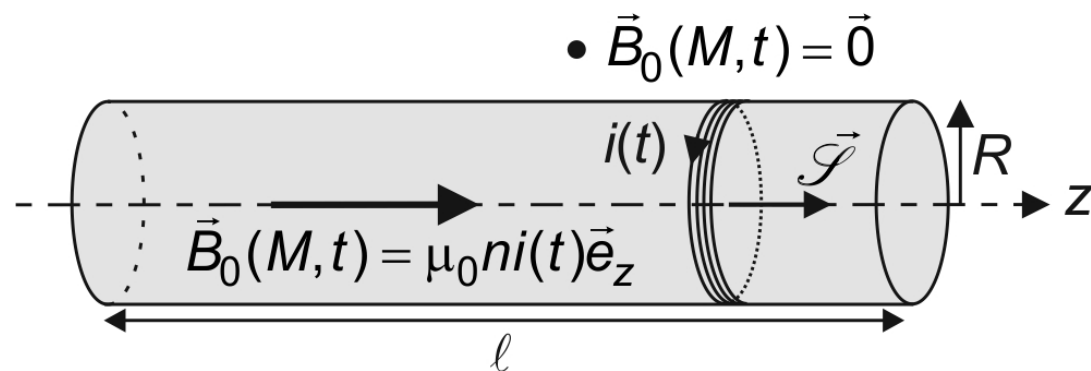


si les courants gardent la même géométrie mais sont maintenant *variables*, la solution consistant à remplacer $\vec{B}_0(M)$ par $\vec{B}_0(M,t)$ devient une *approximation* de la solution exacte du problème (Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires : A.R.Q.S)

les équations de Maxwell, *en un point M du vide*, sont modifiées en régime variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{M.T} \quad \text{div} \vec{B}_0 = 0 \\ \text{M.A} \quad \underbrace{\text{rot} \vec{B}_0 = \vec{0}}_{\text{A.R.Q.S}} \quad \text{au lieu de} \quad \text{rot} \vec{B}_0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

exemple : solénoïde est parcouru par un courant $i(t)$ **variable**, la solution :



n'est plus qu'une *approximation*, d'autant meilleure que la fréquence $f = 1 / T$ caractéristique des fluctuations des courants est faible

Maxwell-Faraday montre qu'il y a désormais en M *apparition d'un champ électrique* :

$$\vec{E}_1(M,t) \text{ induit, tel que } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}$$

ordres de grandeur : $\|\vec{B}_0(M,t)\| = O(B_0)$

B_0 est l'ordre de grandeur du champ magnétique créé par les courants de densité $\vec{J}_0(M,t)$

L est l'ordre de grandeur de la taille du système

E_1 est l'ordre de grandeur de $\|\vec{E}_1(M,t)\|$

$$\left\| \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_1 \right\| = O\left[\frac{E_1}{L}\right] \text{ et } \left\| \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} \right\| = O\left[\frac{B_0}{T}\right] \Rightarrow E_1 = O\left[\frac{LB_0}{T}\right]$$

or $\vec{E}_1(M, t)$ est source de $\vec{B}_1(M, t)$, qui s'ajoute à $\vec{B}_0(M, t)$, d'après M.A : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}} (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \underbrace{\Rightarrow}_{\vec{\text{rot}} \vec{B}_0 = \vec{0}} \vec{\text{rot}} \vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$$

on en déduit l'ordre de grandeur de $\|\vec{B}_1(M, t)\|$: $B_1 = O\left[\frac{LE_1}{c^2 T}\right] = O\left[\frac{L^2 B_0}{c^2 T^2}\right]$
 car $E_1 = O\left[\frac{LB_0}{T}\right]$

remarque : $\vec{B}_1(M, t)$ lui-même source de $\vec{E}_2(M, t)$ d'après M.F, etc. :

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots \\ \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \end{cases} \quad \text{solution en régime } \textit{quelconque}$$

dans l'A.R.Q.S magnétique : $\begin{cases} \vec{B} \simeq \vec{B}_0 \\ \vec{E} \simeq \vec{E}_1 \end{cases}$, valable si $B_1 \ll B_0 \Rightarrow L^2 \ll c^2 T^2$

soit $L \ll \lambda = cT$

λ est la longueur d'onde de l'onde électromagnétique rayonnée par le système

l'A.R.Q.S consiste à négliger le phénomène de propagation, c'est-à-dire les retards à la propagation entre les différents points du système

pour le solénoïde, pour une fréquence f donnée du courant $i(t)$, l'approximation ne

sera valable dans son voisinage que si sa longueur ℓ vérifie $\ell \ll \lambda = \frac{c}{f}$

● aspect énergétique

$$u_e = \frac{\varepsilon_0 E_1^2(M, t)}{2} = O\left(\frac{\varepsilon_0 L^2 B_0^2}{T^2}\right) \qquad u_m = \frac{B_0^2(M, t)}{2\mu_0} = O\left(\frac{B_0^2}{\mu_0}\right)$$

$$\text{car } E_1 = O\left[\frac{LB_0}{T}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{u_e}{u_m} = O\left[\varepsilon_0 \mu_0 \frac{L^2}{T^2}\right] = O\left[\frac{L^2}{c^2 T^2}\right] = O\left[\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2\right] \ll 1$$

● conclusion

dans l'A.R.Q.S magnétique ($L \ll \lambda$), le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ dans le vide se calcule comme en régime stationnaire :

$$\begin{cases} \text{M.T} & \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{M.A} & \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \simeq \vec{0} \end{cases}$$

mais il apparaît un champ électrique *induit* $\vec{E}(M,t)$ qui se calcule à l'aide de :

$$\begin{cases} \text{M.F} & \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{M.G} & \text{div} \vec{E} = 0 \end{cases}$$

l'énergie électrique due à ce champ est négligeable devant l'énergie magnétique :

$$U \approx U_m$$

1.2 Force électromotrice

$$\text{définition : } e = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d \overrightarrow{OM} \text{ en volt}$$

$\Rightarrow e \neq 0$ si $\vec{E}$ n'est pas à circulation conservative : $e \neq 0 \Rightarrow \vec{E} \neq -\overrightarrow{\text{grad}} V$

la f.e.m ainsi définie est bien celle qui caractérise un générateur de tension en électrocinétique :

spire conductrice : $\vec{J} = \gamma_0 \vec{E}$

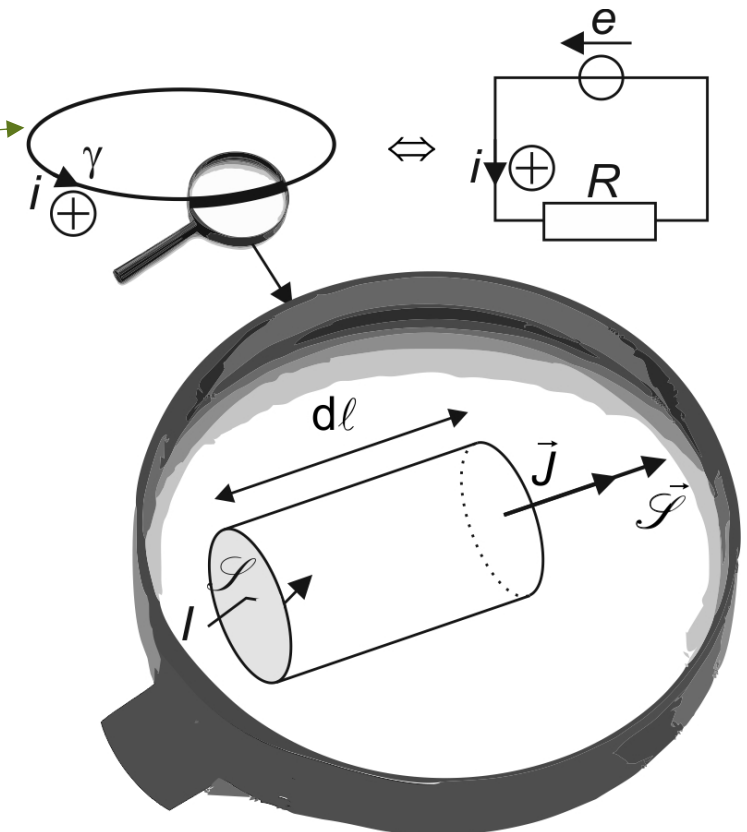
$$e = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d \overrightarrow{OM} = \oint_{\gamma} \frac{\vec{J}}{\gamma_0} \cdot d \overrightarrow{OM} = \oint_{\gamma} \frac{J}{\gamma_0} d\ell$$

$$\text{or } i = J \mathcal{S} \Rightarrow e = \oint_{\gamma} \frac{J \mathcal{S}}{\gamma_0 \mathcal{S}} d\ell = \oint_{\gamma} \frac{d\ell}{\gamma_0 \mathcal{S}} i = i \oint_{\gamma} \frac{d\ell}{\gamma_0 \mathcal{S}}$$

(on verra que dans l'A.R.Q.S $i(t)$ est le même en tout point de la spire)

$$dR = \frac{d\ell}{\gamma_0 \mathcal{S}} \text{ résistance de l'élément } d\ell$$

$$\Rightarrow \text{on a bien } e = Ri$$



on a donc : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{E}_m$

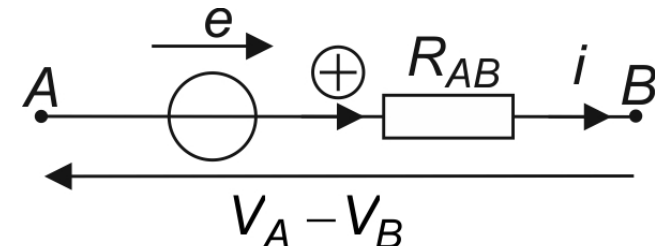
champ électromoteur à circulation non-conservative (provient de phénomènes électriques, chimiques, de différences de températures, de l'induction...)

$$e = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\overrightarrow{OM} = \underbrace{\oint_{\gamma} -\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\overrightarrow{OM}}_0 + \oint_{\gamma} \vec{E}_m \cdot d\overrightarrow{OM} : \vec{E} \text{ et } \vec{E}_m : \text{même circulation}$$

pour une *portion* AB d'un circuit conducteur, et non plus un contour fermé :

$$\underbrace{\int_A^B \vec{E} \cdot d\overrightarrow{OM}}_{R_{AB}i} = \underbrace{\int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\overrightarrow{OM}}_{V_A - V_B \neq 0} + \underbrace{\int_A^B \vec{E}_m \cdot d\overrightarrow{OM}}_e \quad \text{avec } e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\overrightarrow{OM}$$

$$\text{or } \int_A^B \vec{E} \cdot d\overrightarrow{OM} = R_{AB}i \Rightarrow \boxed{V_A - V_B = R_{AB}i - e}$$



1.2 Lois expérimentales de l'induction

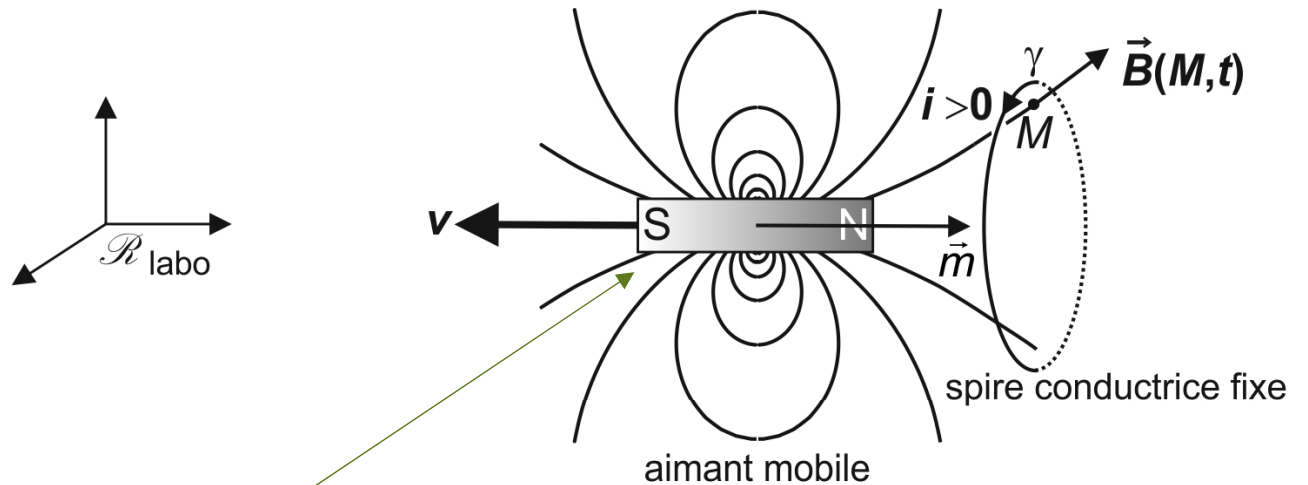
on se place dans le domaine de l'A.R.Q.S magnétique :

un aimant crée un champ magnétique dans une spire conductrice de résistance R

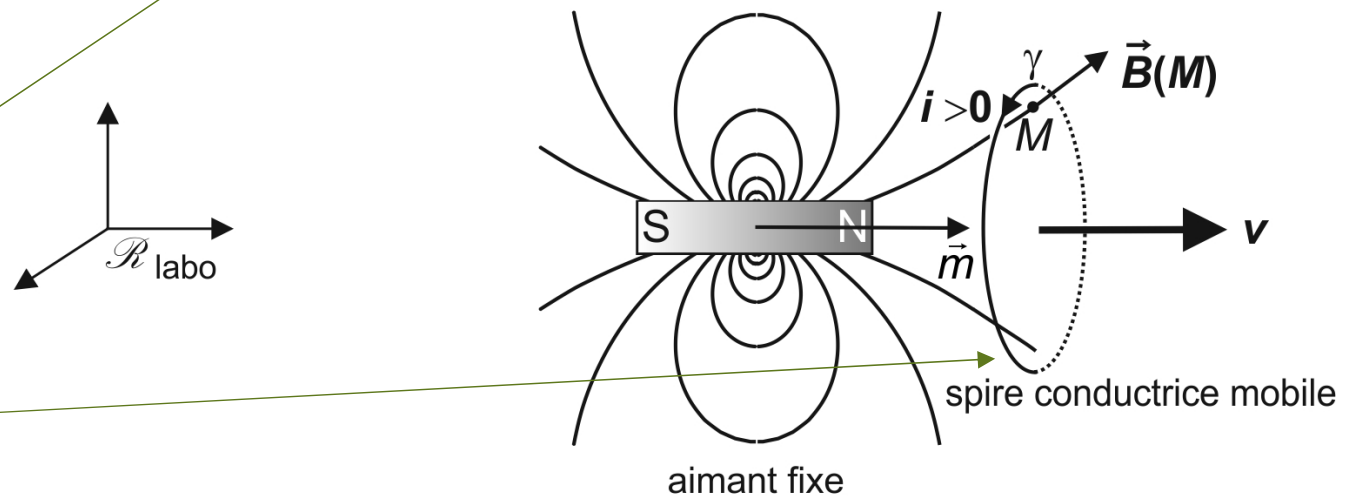
si l'aimant et la spire sont écartés l'un de l'autre à la vitesse v , un courant apparaît dans la spire, *identique* que ce soit :

>>> l'aimant qui se déplace par rapport à $\mathcal{R}_{\text{labo}}$:
induction de NEUMANN

>>> la spire qui se déplace par rapport à $\mathcal{R}_{\text{labo}}$:
induction de LORENTZ

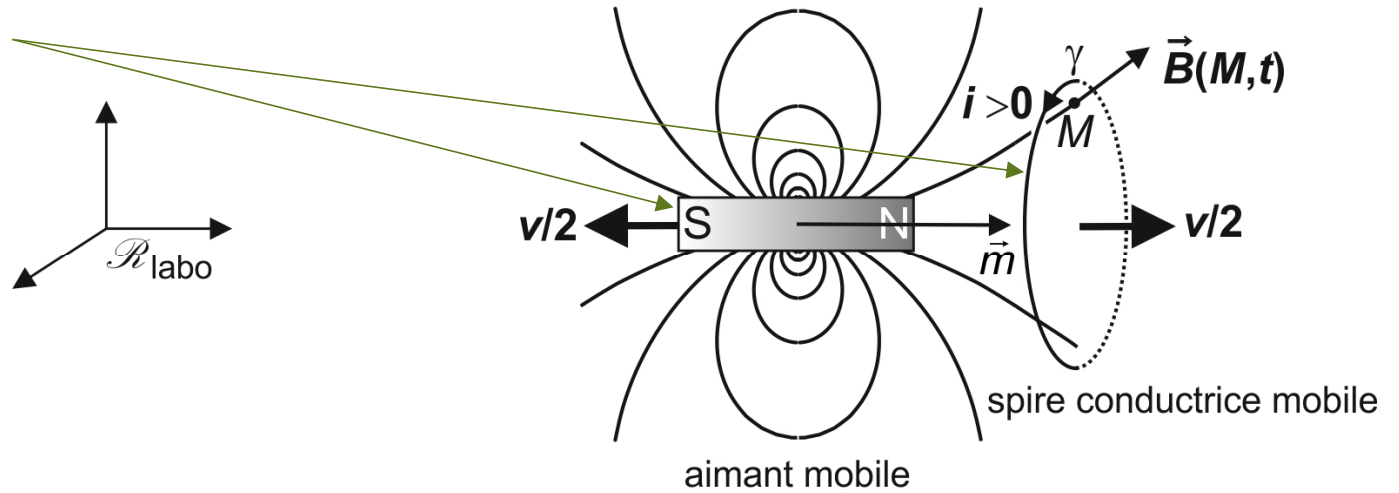


induction de NEUMANN: conducteur fixe dans un champ magnétique variable



induction de LORENTZ: conducteur mobile dans un champ magnétique stationnaire

>>> l'aimant ET la spire qui
se déplacent par rapport à
 $\mathcal{R}_{\text{labo}}$



conducteur mobile dans un champ magnétique variable

Faraday a déduit sa loi à partir d'expériences du même type :

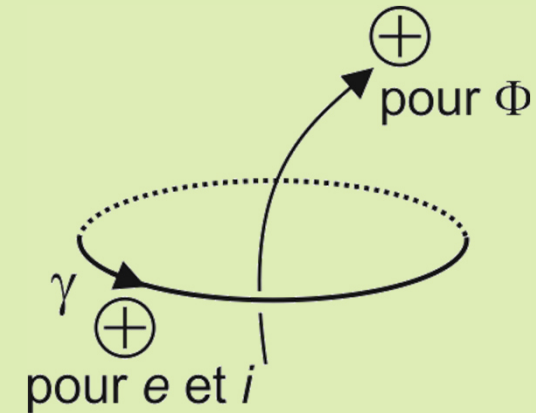
si $\Phi = \iint_{\mathcal{S}(\gamma)} \vec{B} \cdot d^2\vec{\mathcal{J}}$ est le flux de $\vec{B}$ à travers un contour fermé orienté γ

une variation de ce flux génère le long du contour une f.e.m e donnée par :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{loi de Faraday})$$

la f.e.m e et le courant i sont orientés dans le sens choisi pour γ .

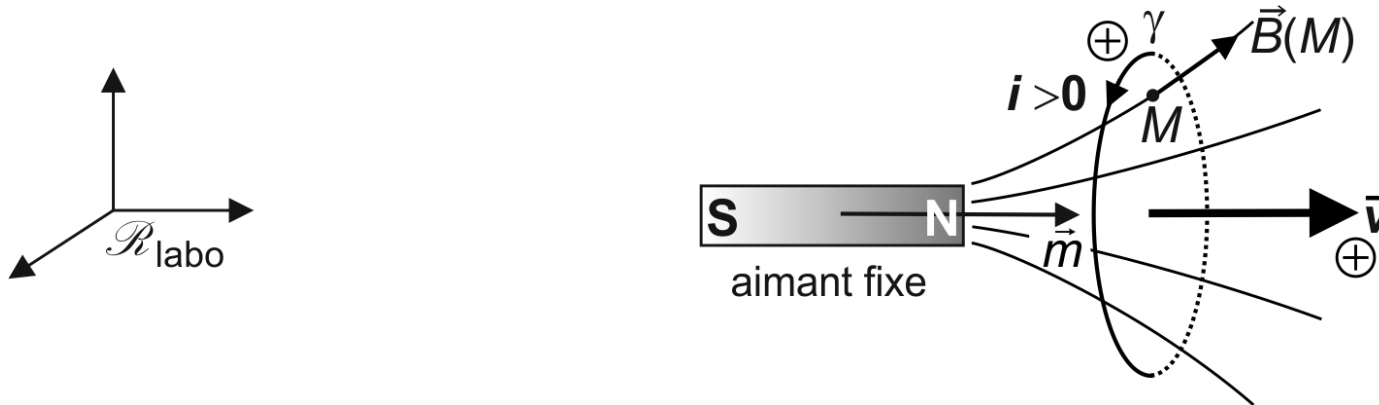
L'orientation de la surface $\mathcal{S}$ s'appuyant sur γ , qui conditionne le signe du flux, se fait à partir de celle de γ en appliquant la règle du tire-bouchon.



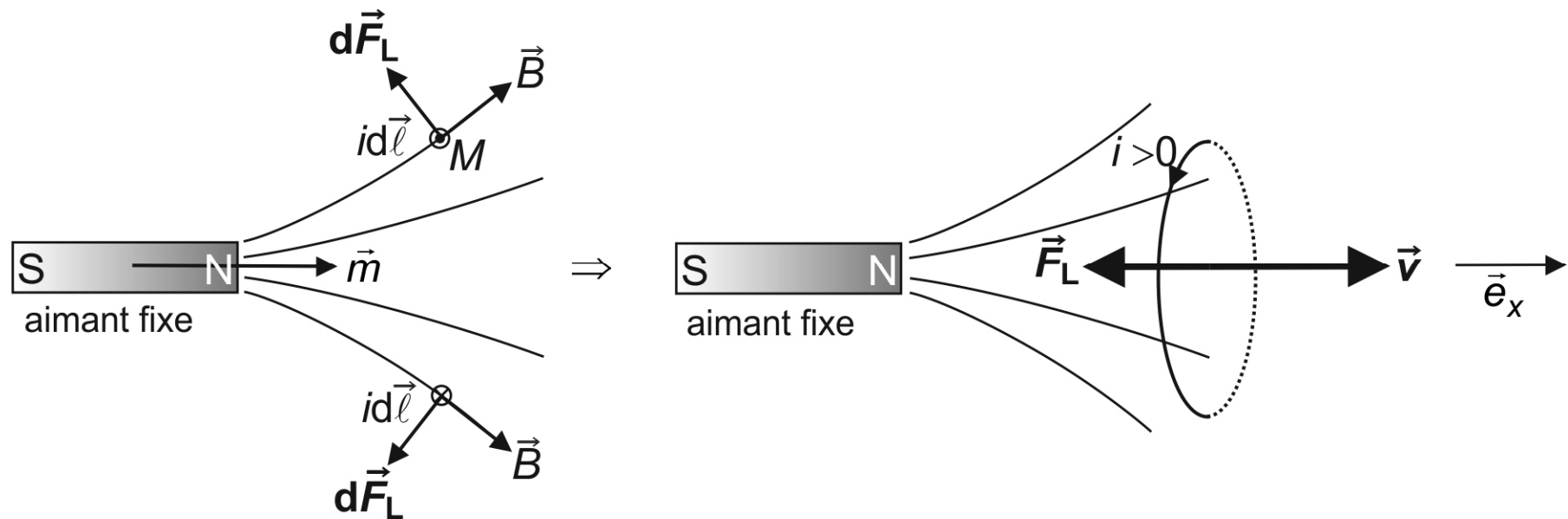
dans le cas de la spire, qui constitue un circuit fermé, il apparaît un courant $i = e / R$

Lenz précisa la loi de Faraday : « la f.e.m induite tend par ses conséquences à s'opposer aux causes qui l'ont produites » (**loi de Lenz**).

illustrons la loi de Lenz par l'exemple de l'induction de Lorentz :



effet électrique : en se déplaçant vers la droite, le circuit reçoit un flux positif, mais décroissant, de la part de l'aimant fixe $\Rightarrow$ la f.e.m induite est donc positive et crée un courant $i(t)$ positif $\Rightarrow$ flux propre positif qui tend en effet à s'opposer à la diminution du flux



effet mécanique : la spire est parcourue par un courant *induit*, et comme elle est placée dans le champ de l'aimant, elle subit des forces de Laplace $d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$

la résultante de ces forces est portée par l'axe de la spire, et s'oppose au déplacement de cette dernière

la loi de Lenz est une loi de modération due à la présence du signe « moins » dans la loi de Faraday.

le champ magnétique étant ici stationnaire, son flux à travers la spire ne dépend que de la position de cette dernière, repérée par l'abscisse x

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\Phi}{dx} v = f(x) v \propto v \Rightarrow e \propto v \Rightarrow i \propto v \Rightarrow \vec{F}_L = -\lambda \vec{v} \text{ avec } \lambda > 0$$

la force de Laplace est équivalente à une force de frottement *linéaire* (mais avec λ qui dépend de x)

l'apparition de cette force de frottement dans un conducteur en mouvement auquel on applique un champ magnétique intense, constitue le principe du freinage électromagnétique (poids lourds, manèges)