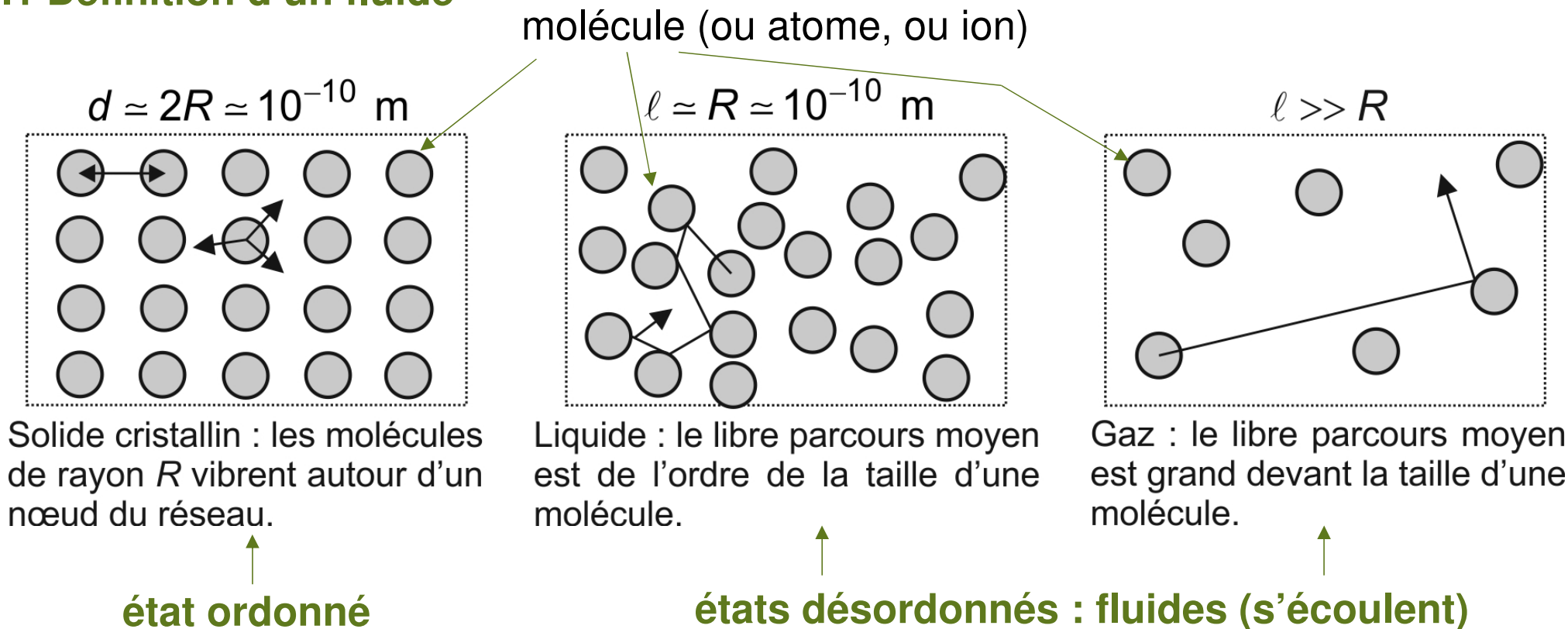


STATIQUE DES FLUIDES

1. ACTIONS DE PRESSION DANS UN FLUIDE

1.1 Définition d'un fluide

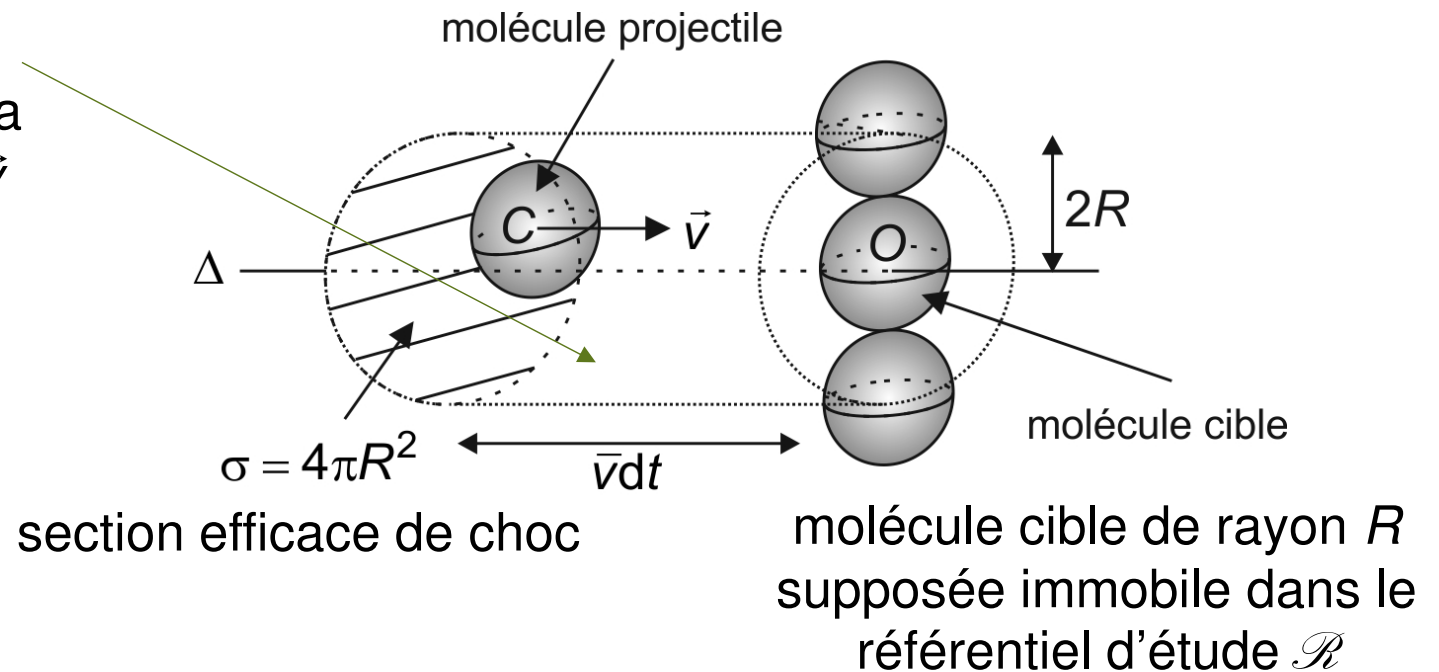


entre deux chocs, une molécule parcourt une distance moyenne, le *libre parcours moyen* ℓ

les fluides sont caractérisés par l'absence d'ordre à des distances supérieures à quelques fois la taille des molécules, et donc par leur capacité à s'écouler

1.2 Évaluation du libre parcours moyen dans un fluide, modèle de sphères dures

cylindre contenant les molécules qui heurtent la cible avec la vitesse $\vec{v}$ pendant dt : volume $\sigma \bar{v} dt$



$$\Rightarrow dN = n^* \sigma \bar{v} dt \text{ chocs sur la molécule cible pendant } dt$$

densité moléculaire

vitesse moyenne

distance moyenne parcourue pendant dt

libre parcours moyen $\rightarrow \ell = \frac{\bar{v} dt}{dN} = \frac{1}{n^* \sigma}$

nombre de chocs subis pendant dt

temps moyen de vol $\rightarrow \tau = \frac{\ell}{\bar{v}} = \frac{1}{n^* \sigma \bar{v}}$

>>> **liquide** : $n^* \simeq \frac{1}{R^3}$ et $\sigma \simeq R^2 \Rightarrow \ell \simeq R \simeq 10^{-10} \text{ m}$

>>> **gaz** : gaz parfait à 300 K et sous 1 bar : $n^* = \frac{p}{k_B T} = 2,4 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$

$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ constante de Boltzmann

$R \simeq 10^{-10} \text{ m} \Rightarrow \sigma = 4\pi R^2 = 1,3 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2$

$\Rightarrow$ à 300 K et sous 1 bar : $\ell = 330 \text{ nm} \simeq 1 \mu\text{m} \gg R$

1.3 Particule fluide, échelle mésoscopique

à notre échelle, fluide : milieu continu, sa description ne nécessite pas de connaître position et vitesse de chaque molécule

⇒ description à l'échelle *mésoscopique* de longueur caractéristique *a petite* devant la longueur macroscopique *L* caractéristique du système étudié, mais *grande* devant le libre parcours moyen ℓ

exemples :

météo à l'échelle d'une ville $L = 10 \text{ km}$, $a = 10 \text{ m} \gg \ell \approx 1 \text{ }\mu\text{m}$: convient

aile d'avion $L = 5 \text{ m}$, $a = 1 \text{ cm} \gg \ell \approx 1 \text{ }\mu\text{m}$: convient

écoulement d'eau autour d'une sphère de rayon $L = 10 \text{ }\mu\text{m}$, $a = 0,1 \text{ }\mu\text{m} \gg \ell \approx 0,1 \text{ nm}$: convient

on définit une particule fluide comme un système **fermé** mésoscopique, c'est-à-dire à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique et macroscopique :

$$\ell \ll a \ll L$$

pour $a \gg \ell$, les molécules qui rentrent dans une cellule centrée sur un point M ont subi de *nombreux* chocs dans les cellules *voisines*, ce qui assure la *continuité spatiale* des grandeurs $n^*(M,t), \rho(M,t), \vec{v}(M,t), p(M,t), T(M,t)$, obtenues en faisant des *moyennes d'ensemble* sur les molécules d'une cellule

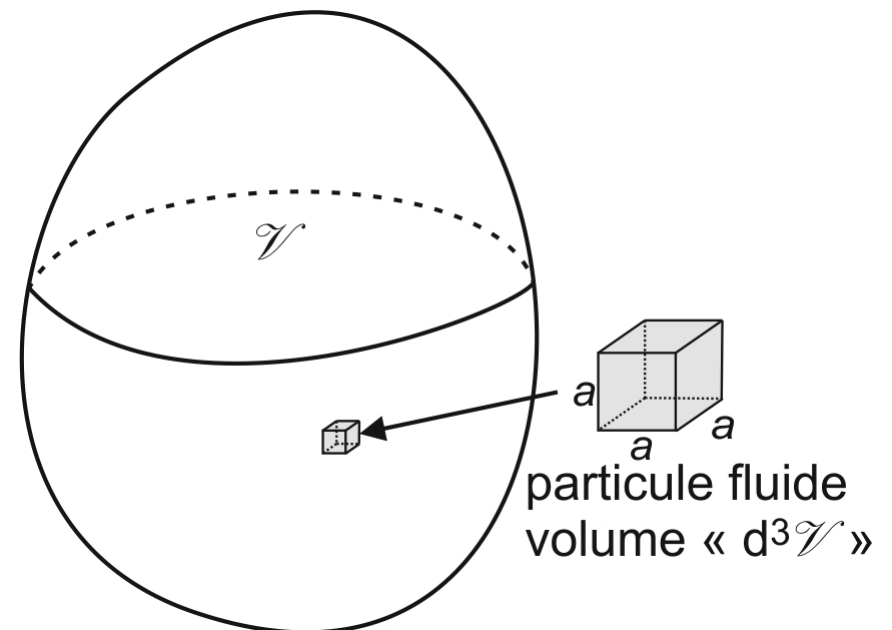
la structure discontinue de la matière n'apparaît plus

on obtient par *sommation continue* les grandeurs extensives dans un volume macroscopique $\mathcal{V}$:

$$m(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \rho(M,t) d^3\mathcal{V}$$

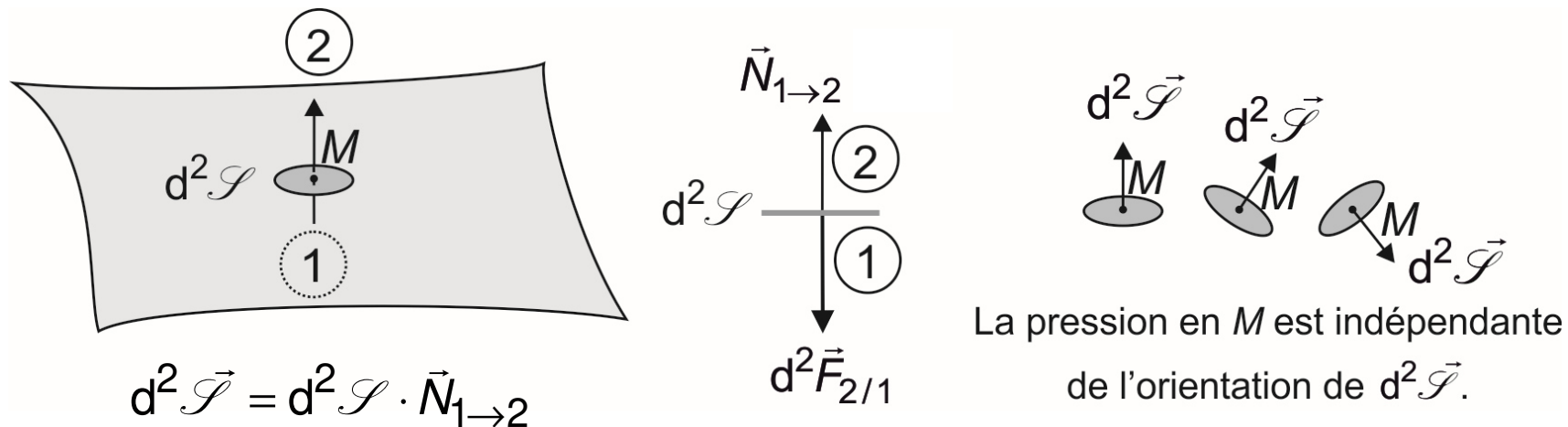
$$\vec{p}(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \rho(M,t) \vec{v}(M,t) d^3\mathcal{V}$$

$$E_c(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \frac{1}{2} \rho(M,t) \cdot v^2(M,t) d^3\mathcal{V}$$



1.4 Pression dans un fluide

les forces de pression sont *surfaciques* : elles s'exercent à travers la surface $\mathcal{S}$ séparant virtuellement un fluide en deux parties (1) et (2)



le fluide (2) exerce sur (1) à travers $d^2\mathcal{S}$ une force normale à $d^2\mathcal{S}$:

$$d^2\vec{F}_{2/1} = d^2\vec{F}_p = -p(M)d^2\mathcal{S} \cdot \vec{N}_{1 \rightarrow 2} = -p(M)d^2\mathcal{S}$$

pression $p(M) > 0$ indépendante de l'orientation du vecteur surface $d^2\mathcal{S}$

en pascal : $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$

une partie de la force de pression (pression cinétique $p_c > 0$) est due aux *transferts de quantité de mouvement* entre les deux particules fluides séparées par une surface $\mathcal{S}$

pendant dt , des molécules de (2) passent dans (1) et réciproquement

⇒ quantité de mouvement :

$\delta \vec{p}_2$ passe de (2) à (1)

$\delta \vec{p}_1$ passe de (1) à (2)

⇒ transfert total $\delta \vec{p} = \delta \vec{p}_2 - \delta \vec{p}_1$ de (2) vers (1)

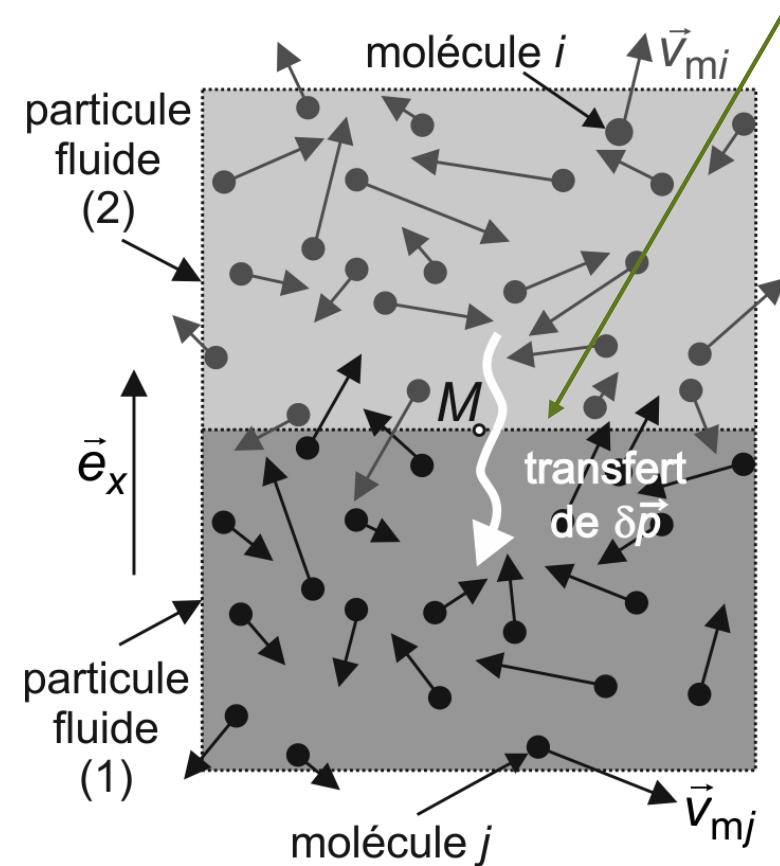
$$\delta p_x = \underbrace{\delta p_{2x}}_{<0} - \underbrace{\delta p_{1x}}_{>0} < 0$$

$$\delta p_y = 0$$

$$\delta p_z = 0$$

théorème de la quantité de mouvement : (1) subit de la

part de (2) une force normale à $\mathcal{S}$: $\vec{F}_{2/1\text{N}} = \frac{\delta p_x}{dt} \vec{e}_x$ force de pression



La quantité de mouvement δp_x qui traverse $\mathcal{S}$ pendant dt est proportionnelle à $\mathcal{S}$
 $\Rightarrow F_{2/1x}$ l'est aussi : les forces de pression sont *surfiques*

l'autre partie des forces de pression est due aux interactions *attractives* de très courte portée (forces de Van Der Waals) entre les molécules de (1) et de (2) :
pression moléculaire $p_m < 0$

$$\Rightarrow \underbrace{p}_{>0} = p_c + p_m < p_c$$

$$d^2 \vec{F}_p = \vec{\sigma}_p d^2 \mathcal{S} \Rightarrow \vec{\sigma}_p = -p(M) \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$$

contrainte de pression, *normale* car orthogonale à $d^2 \mathcal{S}$, homogène à p

1.5 Résultante des actions de pression / équivalent volumique

$$\vec{F}_p = - \oiint_{\mathcal{S}} p(M) d^2 \vec{\mathcal{S}}$$

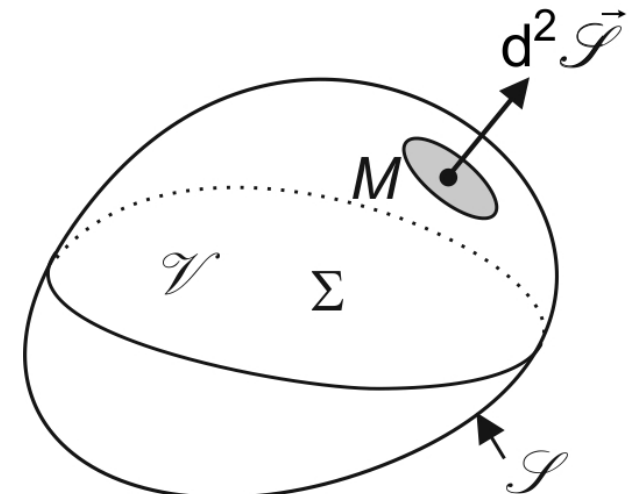
$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{F}_p = - \oiint_{\mathcal{S}} p(M) \vec{a} \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}}$$

vecteur indépendant de M (champ uniforme)

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{F}_p = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} [p(M) \vec{a}] d^3 \mathcal{V} \quad (\text{Green-Ostrogradski})$$

$$\text{or } \text{div} [p(M) \vec{a}] = p(M) \underbrace{\text{div} \vec{a}}_0 + \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{F}_p = - \vec{a} \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\text{grad}} p d^3 \mathcal{V}$$

relation vérifiée quelle que soit la direction de $\vec{a}$



$$\Rightarrow \vec{F}_p = - \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\text{grad}} p d^3\mathcal{V}$$

dans le cas où le système étudié est une particule fluide de volume $d^3\mathcal{V}$, la résultante des actions de pression s'écrit :

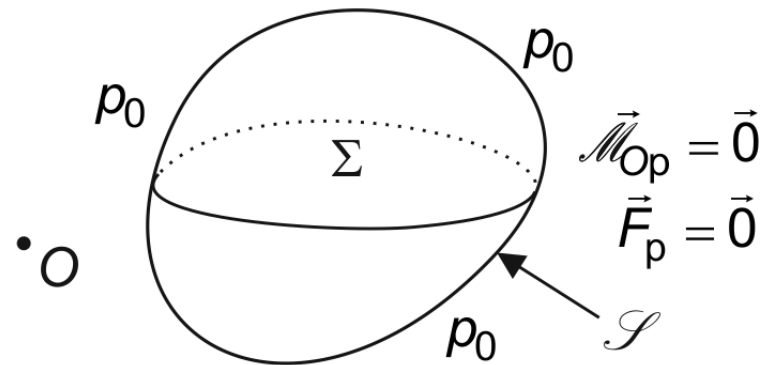
$$d^3\vec{F}_p = - \overrightarrow{\text{grad}} p d^3\mathcal{V}$$

n'a de sens que pour un volume $d^3\mathcal{V}$ infiniment petit *du troisième ordre* autour de M

les actions de pression sont surfaciques, mais comme leur *résultante* sur une particule fluide est proportionnelle à son volume, on parle d'*équivalent volumique* des forces de pression

dans un champ de pression uniforme : $p(M) = p_0 \quad \forall M \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{0}$

la résultante des actions de pression $\vec{F}_p = \vec{0}$ sur une surface fermée $\mathcal{S}$ est nulle si la pression est uniforme sur cette surface, ainsi que le moment résultant $\vec{\mathcal{M}}_{Op} = \vec{0}$



La résultante et le moment résultant des actions de pression sur Σ sont nuls si p_0 est uniforme sur la surface $\mathcal{S}$.

résultat valable même si $\mathcal{S}$ ne contient pas de fluide puisque seule la valeur de la

pression du fluide à la surface intervient dans $\vec{F}_p = -\oiint_{\mathcal{S}} p(M) d^2 \vec{\mathcal{S}}$