3. FLUIDE PARFAIT / THÉORÈME DE BERNOULLI, EFFET VENTURI ET APPLICATIONS

3.1 Modèle du fluide parfait

fluide parfait $\Leftrightarrow \eta = 0$

$\Rightarrow$ transformation *réversible d*es particules fluides en l'absence de frottements

$\Rightarrow$ *aucun* phénomène diffusif (pas de diffusion de quantité de mouvement , ni d'énergie cinétique donc pas de transferts thermiques dans un fluide parfait)

dans un fluide parfait, les particules subissent une transformation adiabatique et réversible, c'est-à-dire isentropique

modèle *fort* : un gaz parfait (pas d'interactions entre les molécules) peut ne pas être un fluide parfait ! (il possède alors une viscosité non nulle et est le siège de transferts thermiques)

on parle plutôt d'*écoulement* parfait, ou de zone d'écoulement parfait, à grand nombre de Reynolds :
>>> pour un écoulement externe, sauf dans la couche limite et le sillage
>>> pour un écoulement interne de faible longueur (on peut alors négliger les pertes de charge régulières), sans pertes de charge singulières

3.2 Théorème de Bernoulli

entre deux points infiniment proches le long d'une ligne de courant d'un écoulement stationnaire incompressible, on a : $\mathrm{d}\left[p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g z\right]=-\rho T\cdot\delta s^{\mathrm{p}}$

or $\delta s^{\mathrm{p}}=0$ pour un écoulement parfait (transfo réversible des particules fluides)

la charge $C=p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g z$ est constante le long d'une ligne de courant

pour un écoulement ***parfait***, ***stationnaire*** et ***incompressible***

on montre que si de plus l'écoulement est ***homogène***, C est constante **dans tout l'écoulement**
(théorèmes de Bernoulli)

toutes les hypothèses sont nécessaires et doivent être énoncées

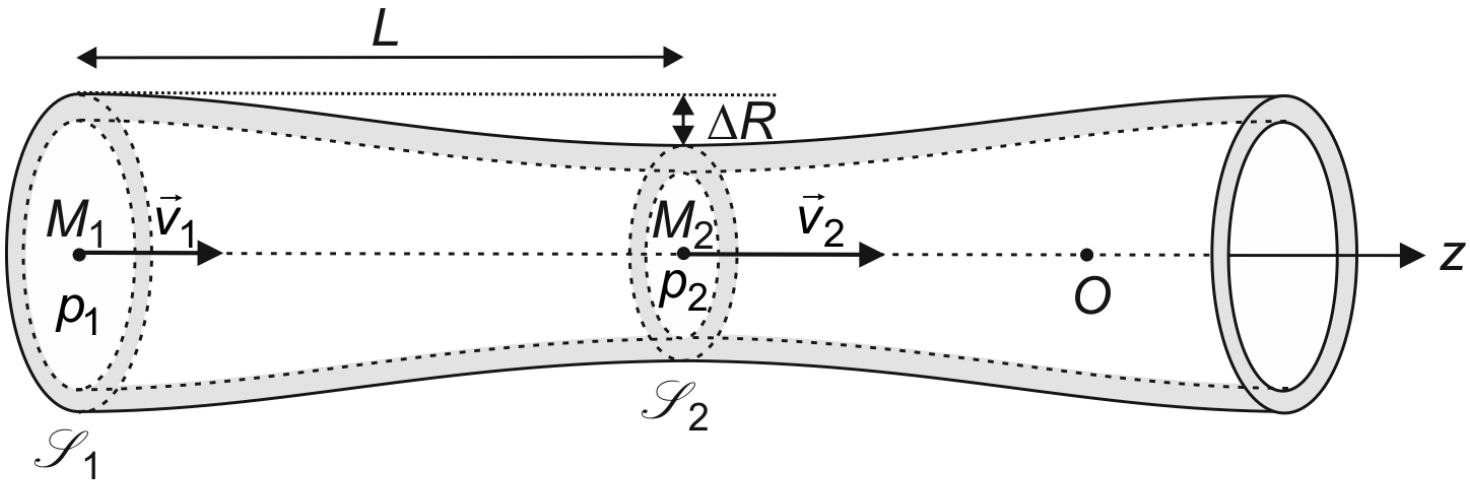
3.3 Écoulement quasi-parallèle / effet Venturi et applications

• effet Venturi

écoulement parfait, stationnaire et incompressible, possédant un axe Oz de symétrie de révolution : le champ de vitesse s'écrit $\vec{v} = v_z(r,z)\vec{e}_z + v_r(r,z)\vec{e}_r$

écoulement quasi // si $|v_r| << |v_z|$

il est alors également quasi-1D (cisaillement négligeable pour un écoulement parallèle de fluide parfait) : $\boldsymbol{\vec{v} \simeq v_z(z)\vec{e}_z}$



Écoulement quasi-parallèle.

les variations de r et de z sont de l'ordre de Δr et L et on note $v_r = O(V_r)$ et $v_z = O(V_z)$

incompressibilité $\Leftrightarrow$ $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rv_r] + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

comme $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rv_r] = O\left(\frac{V_r}{\Delta R}\right)$ et $\frac{\partial v_z}{\partial z} = O\left(\frac{V_z}{L}\right)$

on a $V_r = O\left(\frac{\Delta R}{L}V_z\right)$, donc $|v_r| << |v_z|$ si $\Delta R << L$

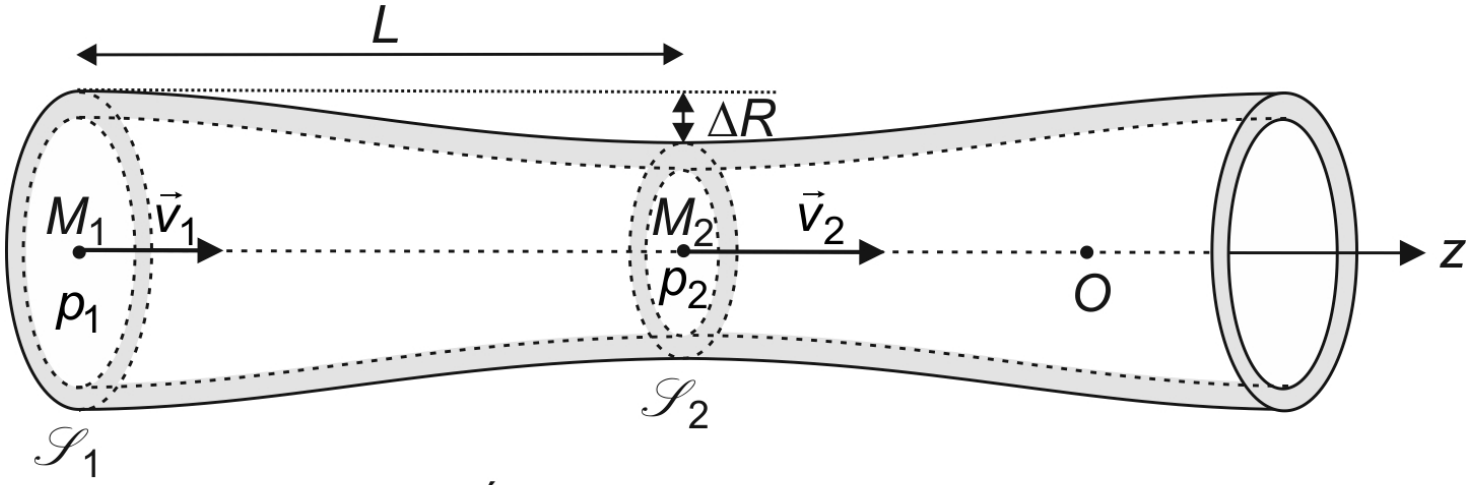
mais v_r n'est pas rigoureusement nulle, car le rayon de la conduite varie

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rv_r] = -\frac{\partial v_z}{\partial z}$ montre que v_r varie autant avec r que v_z avec z

si on considère $v_r = 0$, alors $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ (cas de la conduite de rayon constant)

l'approximation $\vec{v} \simeq v_z(z)\,\vec{e}_z$ n'est pas compatible avec $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

l'incompressibilité du fluide se traduit alors, pour un écoulement quasi 1D, par la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant : $\mathscr{S}(z)v(z) = Cte$



Écoulement quasi-parallèle.

$$\Rightarrow \mathscr{S}_1 \cdot v_1 = \mathscr{S}_2 \cdot v_2 \text{ (1) incompressibilité}$$

écoulement parfait, incompressible et stationnaire $\Rightarrow$ théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant confondue avec l'axe *Oz*, soit, en considérant la conduite horizontale (ou en négligeant l'effet de la pesanteur) :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \text{ (2) th. de Bernoulli}$$

si $\mathscr{S}_1 > \mathscr{S}_2$, alors $v_1 < v_2 \Rightarrow p_1 > p_2$

on a une dépression au niveau du rétrécissement d'un tube de courant ; c'est l'effet Venturi

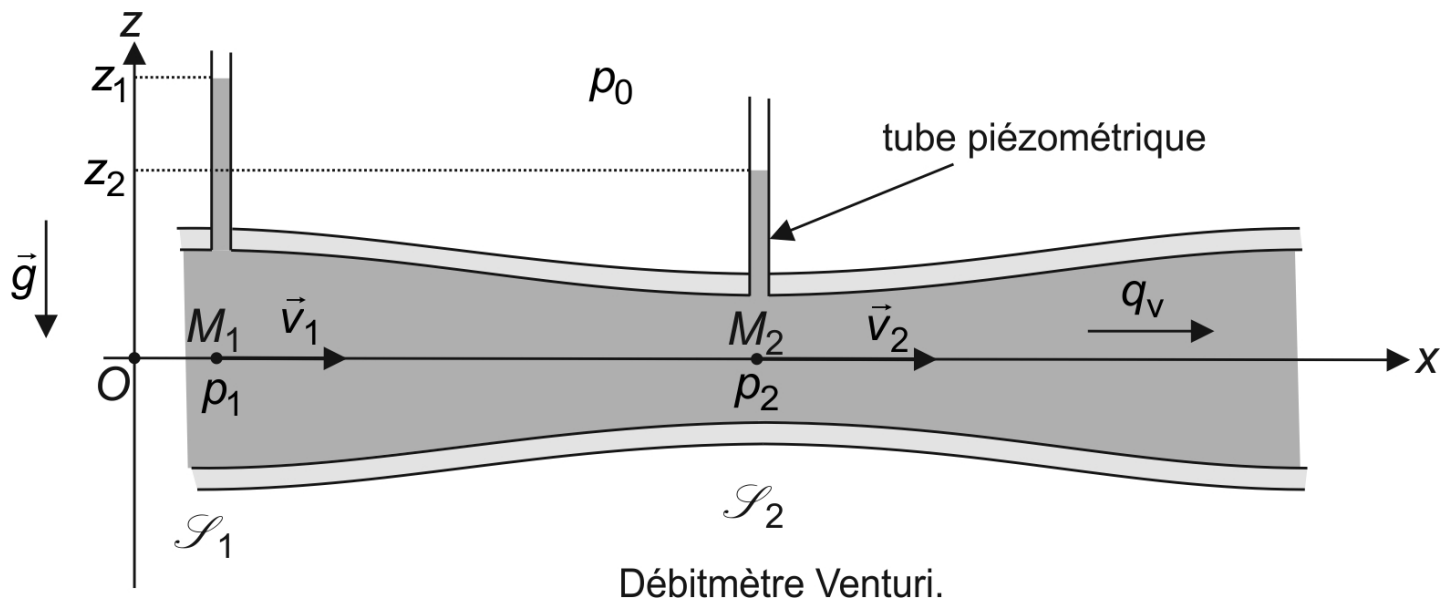
• débitmètre Venturi

rétrécissement :

$\mathscr{S}_2 < \mathscr{S}_1 \Rightarrow z_2 \neq z_1$

écoulement quasiment parallèle 1D :

$$\vec{v} \simeq v_x(x)\vec{e}_x$$



Débitmètre Venturi.

loi de pression hydrostatique orthogonalement à l'écoulement :

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \rho g z_1 \\ p_2 = p_0 + \rho g z_2 \end{cases} \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho g (z_1 - z_2)$$

conservation du débit volumique : $q_v = \mathscr{S}_2 v_2 = \mathscr{S}_1 v_1$

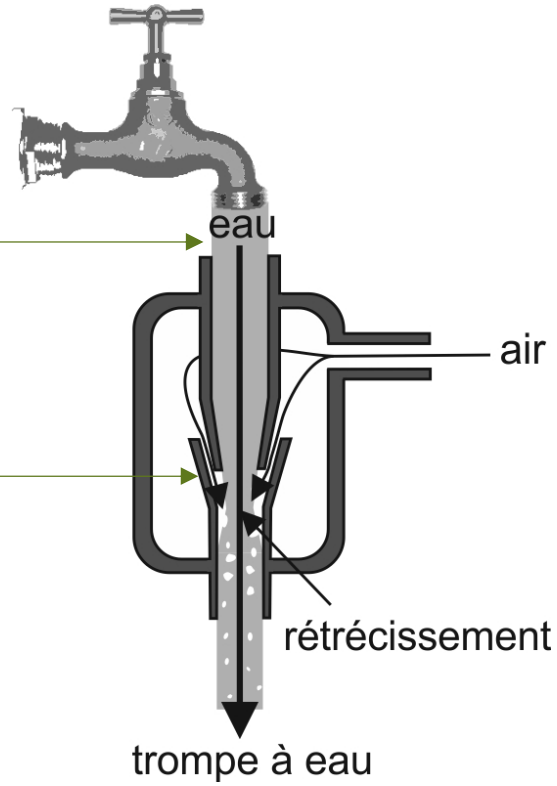
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left[v_2^2 - v_1^2\right] \text{, avec } v_2 = \frac{\mathscr{S}_1}{\mathscr{S}_2} v_1 \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left[\left(\frac{\mathscr{S}_1}{\mathscr{S}_2}\right)^2 - 1\right]$$

th. de Bernoulli (écoulement parfait stationnaire et incompressible)

$$v_1^2 = \frac{2g(z_1 - z_2)}{\left(\frac{\mathscr{S}_1}{\mathscr{S}_2}\right)^2 - 1} \quad \text{et} \quad \boxed{q_v = \mathscr{S}_1 \cdot v_1 = \mathscr{S}_1 \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{\left(\frac{\mathscr{S}_1}{\mathscr{S}_2}\right)^2 - 1}}}$$

- **trompe à eau**

effet Venturi : $\mathscr{S}_2 < \mathscr{S}_1 \Rightarrow p_2 < p_1$

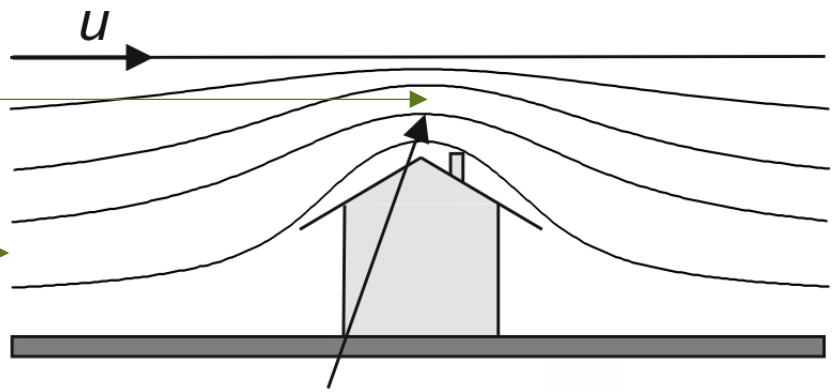


$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[\left(\frac{\mathscr{S}_1}{\mathscr{S}_2}\right)^2 - 1\right]$$

$\Rightarrow$« vide » dans un récipient (la pression de l'air y diminue jusqu'à atteindre la valeur p_2)

- **effet d'une tempête sur un toit**

effet Venturi : $\mathscr{S}_2 < \mathscr{S}_1 \Rightarrow p_2 < p_1$



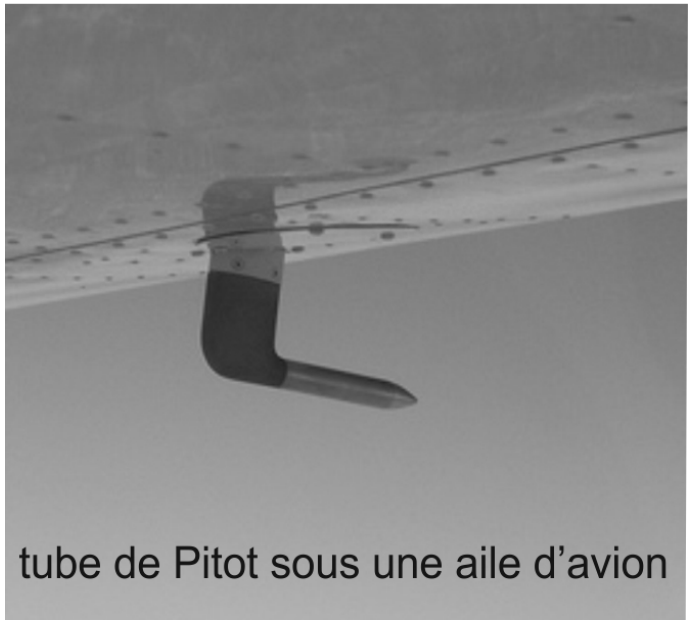
rétrécissement du tube de courant

la dépression augmente avec la vitesse *u* du vent et peut, en cas de forte tempête, arracher des tuiles, voire une partie de la toiture

3.4 Tube de Pitot

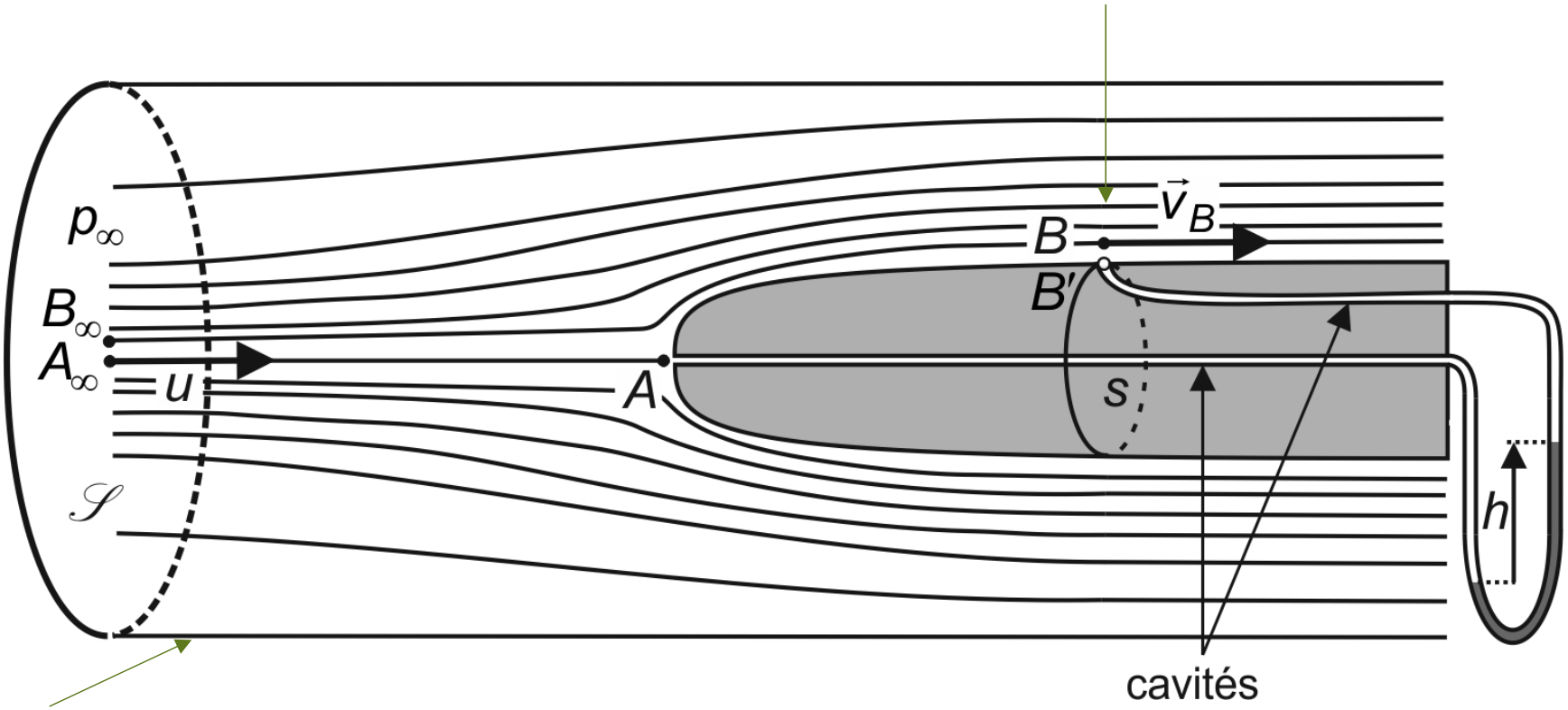
on suppose la vitesse relative *u* du tube par rapport à l'air largement subsonique : le ***nombre de Mach*** $\mathscr{M} = \boldsymbol{u} / \boldsymbol{c}$, rapport entre la vitesse *u* et la vitesse du son *c*, est < 0,3
$\Rightarrow$ écoulement incompressible

écoulement à *Re* très grand
$\Rightarrow$ parfait hors couche limite et sillage



tube de Pitot sous une aile d'avion

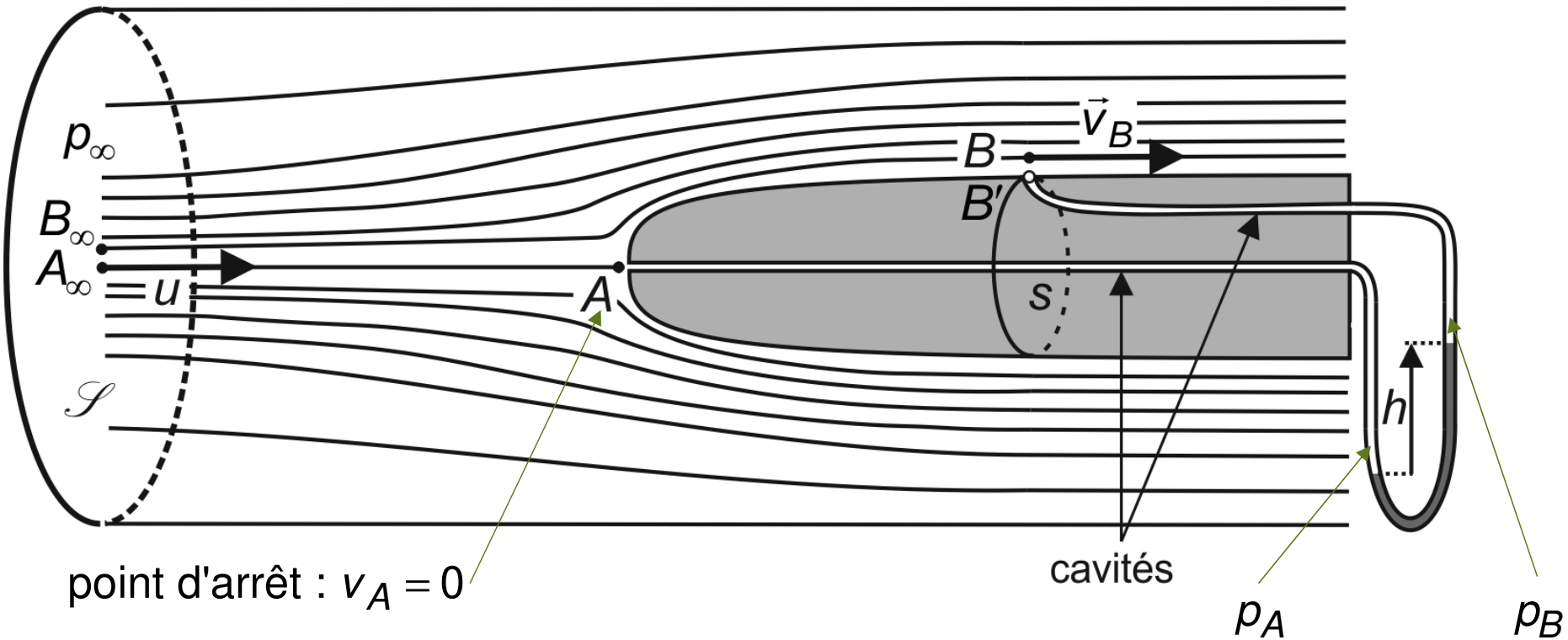
suffisamment en aval : écoulement hors couche limite quasiment uniforme



tube de courant de section $\mathscr{S}$ >> s suffisamment grande pour que ses lignes de courant ne soient pas perturbées par la présence du tube de Pitot.

écoulement ≈ parallèle : $p_{B'} = p_B$

$$q_v = u \cdot \mathscr{S} = v_B(\mathscr{S} - s) \simeq v_B \cdot \mathscr{S} \Rightarrow v_B \simeq u$$



th. de Bernoulli (écoulement parfait stationnaire et incompressible) sur les lignes de courant $A_\infty A$ et $B_\infty B$:

$$\begin{cases} p_A = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_{air} u^2 \\ p_B + \frac{1}{2}\rho_{air} u^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_{air} u^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho_{air} u^2}$$

pression *dynamique*

pression *totale*

$p_B = p_\infty$ pression *statique*

des capteurs de pression mesurent $p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho_{\text{air}} u^2 \Rightarrow u$ connue

lien entre la vitesse de l'écoulement et son incompressibilité :

$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$ vitesse du son dans le fluide (cf. « ondes acoustiques »)

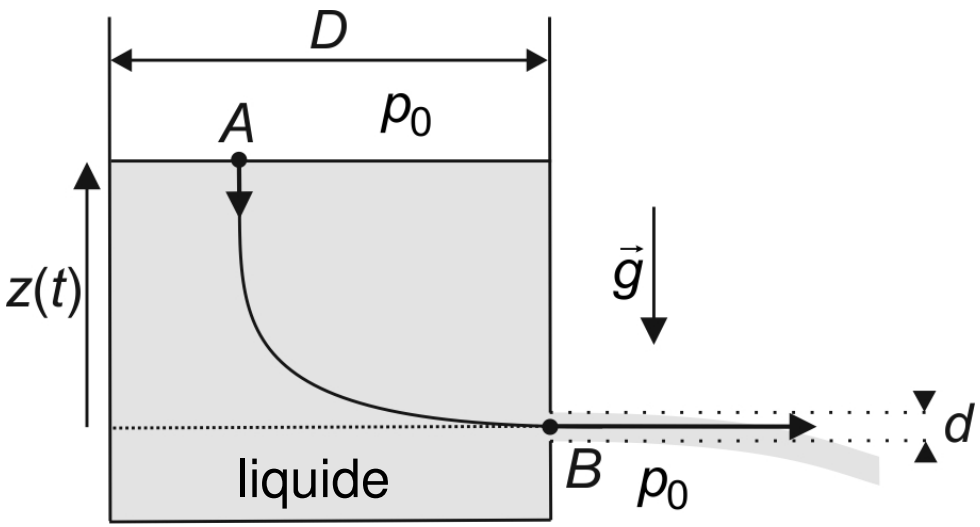
hypothèse « écoulement incompressible » (+ parfait et stationnaire) $\Rightarrow$ le th. de Bernoulli s'applique, et montre que la variation de pression dans l'écoulement $\Delta p = O(\rho u^2)$

$\Rightarrow \Delta\rho = O\left(\frac{\Delta p}{c^2}\right)$ ($S = Cte$ pour les particules fluides dans un écoulement parfait)

$$\Rightarrow \Delta\rho = O\left(\rho \frac{u^2}{c^2}\right) \Leftrightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = O(\mathscr{M}^2)$$

$\Delta\rho / \rho < 9\%$ si $\mathscr{M} < 0{,}3$: écoulement incompressible ; l'hypothèse est vérifiée

3.5 Formule de Torricelli



le liquide s'écoule par le trou de diamètre $d << D$ et la hauteur $z(t)$ au-dessus du trou diminue

écoulement parfait (*Re* grand, et on néglige les pertes de charge), quasi-stationnaire (comme $d << D$, la surface libre descend très lentement) et incompressible

théorème de Bernoulli sur un tube de courant entre *A* à la surface libre et *B* au niveau du trou :

$$\underset{=p_0}{p_A} + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z = \underset{=p_0}{p_B} + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

écoulement parallèle en sortie

conservation du débit volumique : $q_v = \frac{\pi D^2}{4} v_A = \frac{\pi d^2}{4} v_B \Rightarrow v = v_B >> v_A$

$$\boldsymbol{v = v_B = \sqrt{2gz}}$$ formule de Torricelli

4. MACHINES THERMIQUES

4.1 Machines thermiques dithermes, cycle de Carnot

principe : un fluide circule dans un circuit fermé

en régime stationnaire, une particule fluide retrouve le même état thermodynamique au bout d'un tour : elle a suivi un cycle de transformations (machines frigorifiques)

dans les moteurs thermiques, l'air aspiré est mélangé avec du carburant, et le mélange est rejeté après combustion dans le même état thermodynamique qu'en entrée (mêmes pression et température extérieures) : le fonctionnement reste cyclique.

$\forall$ la fonction d'état thermodynamique Y : $\Delta Y = 0$ sur un cycle

lors de ses transformations, le fluide reçoit du travail (algébrique) avec les pièces mécaniques mobiles, et de chaleur (algébrique) avec diverses sources thermiques (on parle de fluide *caloporteur*, car il échange des calories avec l'extérieur)

sauf lors du passage dans une tuyère, l'énergie cinétique macroscopique mise en jeu varie peu lors de la traversée d'un composant (détendeur, échangeur thermique, etc.)

sauf lors du passage dans une pompe qui aspire puis rejette un fluide à des altitudes très différentes (plusieurs mètres), l'énergie potentielle de pesanteur varie peu

le premier principe appliqué au fluide en écoulement entre l'entrée et la sortie d'un composant s'écrit donc en pratique : $\Delta \boldsymbol{h} = \boldsymbol{w}_{\mathbf{u}} + \boldsymbol{q}$

machine frigorifique : fonctionne par définition avec **deux** sources : une source chaude à T_1, et une source froide à $T_2 < T_1$ (exemple : une pompe à chaleur prélève des calories à la source froide, l'air extérieur, et en fournit à la source chaude, l'intérieur de l'habitation)
pour pouvoir effectuer ces échanges, elle *reçoit* sur un cycle un travail utile $\boldsymbol{w}_{\mathbf{u}} > \mathbf{0}$

peut-on avoir un **moteur** (qui *fournit* sur un cycle un travail utile $\boldsymbol{w}_{\mathbf{u}} < \mathbf{0}$ aux pièces mobiles) qui fonctionne avec un cycle *monotherme* (où l'échange d'énergie sous forme de chaleur se fait avec une seule source de température T_s) ?

les deux principes appliqués sur un cycle au fluide circulant dans le moteur :

$$\begin{cases} \Delta h = w_u + q = 0 \\ \Delta s = \dfrac{q}{T_s} + \underbrace{s^p}_{\geq 0} = 0 \end{cases} \Rightarrow w_u = -q = +T_s s^p \geq 0 \Rightarrow w_u = -q = +T_s s^p \geq 0$$

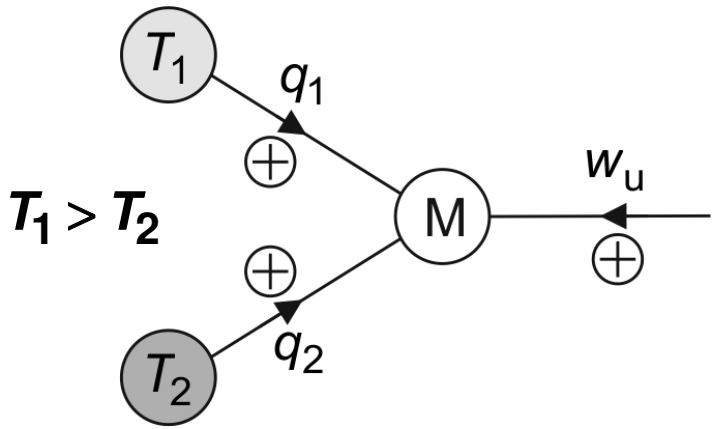
une machine thermique cyclique monotherme ne peut fournir du travail : pas de moteurs cycliques monothermes (énoncé de Kelvin du second principe)

$\Rightarrow$ étude de machines **dithermes** ; le système M étudié est le fluide circulant dans la machine, qui reçoit :

>>> une chaleur massique q_1 de la source chaude

>>> une chaleur massique q_2 de la source froide

>>> un travail utile massique w_u



appliquons, sur un cycle, des deux principes à M : $\begin{cases} \Delta h = w_u + q_1 + q_2 = 0 \\ \Delta s = \dfrac{q_1}{T_1} + \dfrac{q_2}{T_2} + \underbrace{s^p}_{\geq 0} = 0 \end{cases}$

pour déterminer les transformations possibles, motrices ou résistantes, nous utilisons un *diagramme de Raveau* $q_1 = f(q_2)$

transformations réversibles ($s^p = 0$) :

$q_1 = -\dfrac{T_1}{T_2} q_2$ (droite de pente $p = -\dfrac{T_1}{T_2}$, $|p| > 1$)

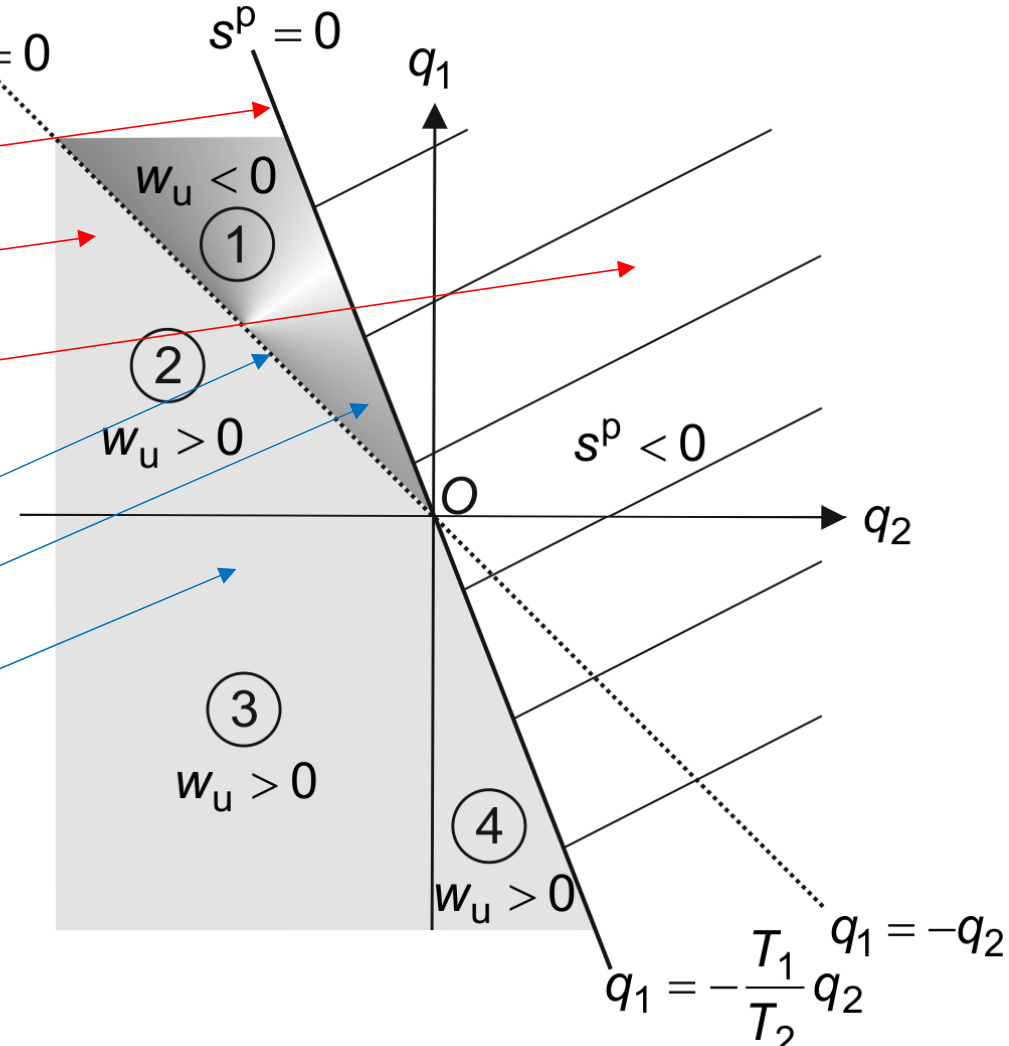
transformations irréversibles : $s^p > 0$

transformations impossibles : $s^p < 0$

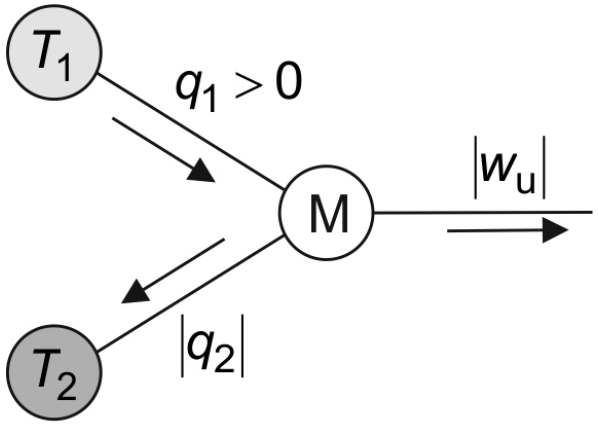
$w_u = 0 \Rightarrow \; q_1 = -q_2$: droite de pente -1

transformations motrices : $w_u < 0$

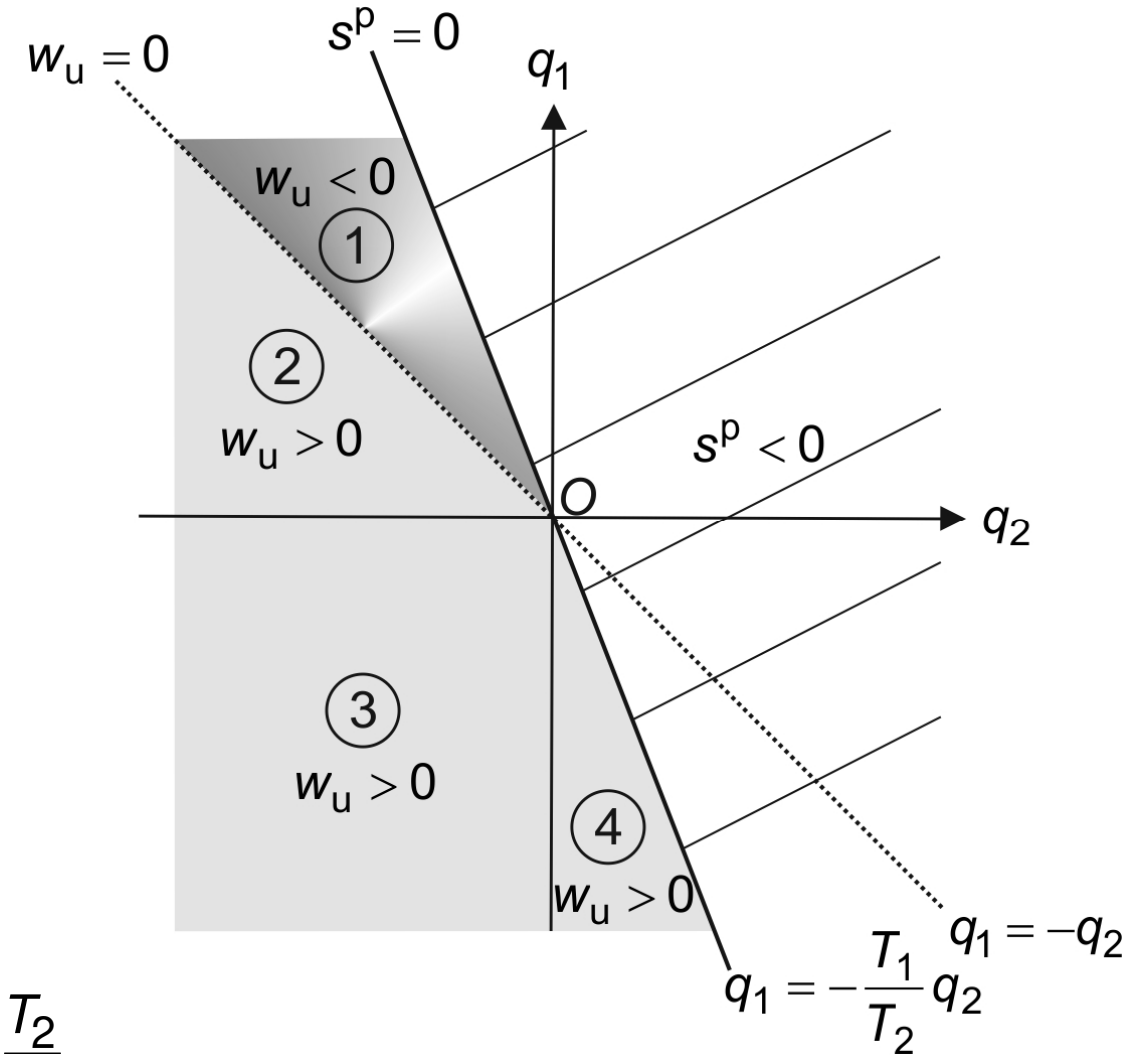
transformations résistantes : $w_u > 0$



(1) : *moteurs thermiques* fournissent du travail en prélevant des calories à la source chaude et en en cédant à la source froide



moteur thermique



efficacité :

$$\eta = \frac{-w_u}{q_1} = 1 + \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_2}{q_1} s^p \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\boxed{\eta_{\text{rév}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} < 1}$$

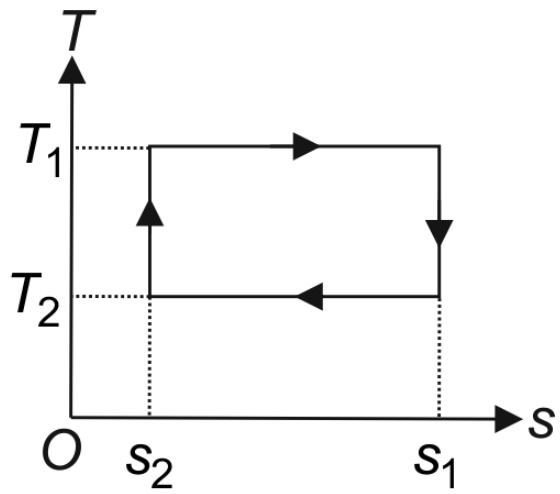
l'efficacité maximale si les transformations sont *toutes* réversibles (efficacité de Carnot, ne dépend que de T_1 et T_2)

cycle de Carnot (réversible) :

>>> 2 isothermes à T_1 et T_2 (lors d'un échange d'énergie réversible avec une source, la température de M est celle de la source)

>>> 2 isentropiques (si M n'est pas en contact avec une source, il n'échange pas d'énergie sous forme de chaleur, donc la transformation réversible qu'il subit est adiabatique).

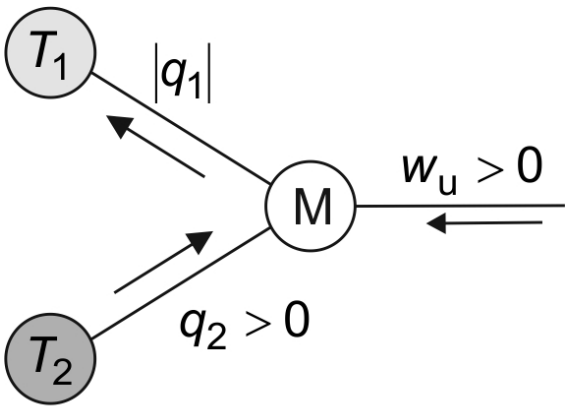
cycle de Carnot dans le *diagramme entropique* $s = f(T)$ (s : entropie massique de M) :



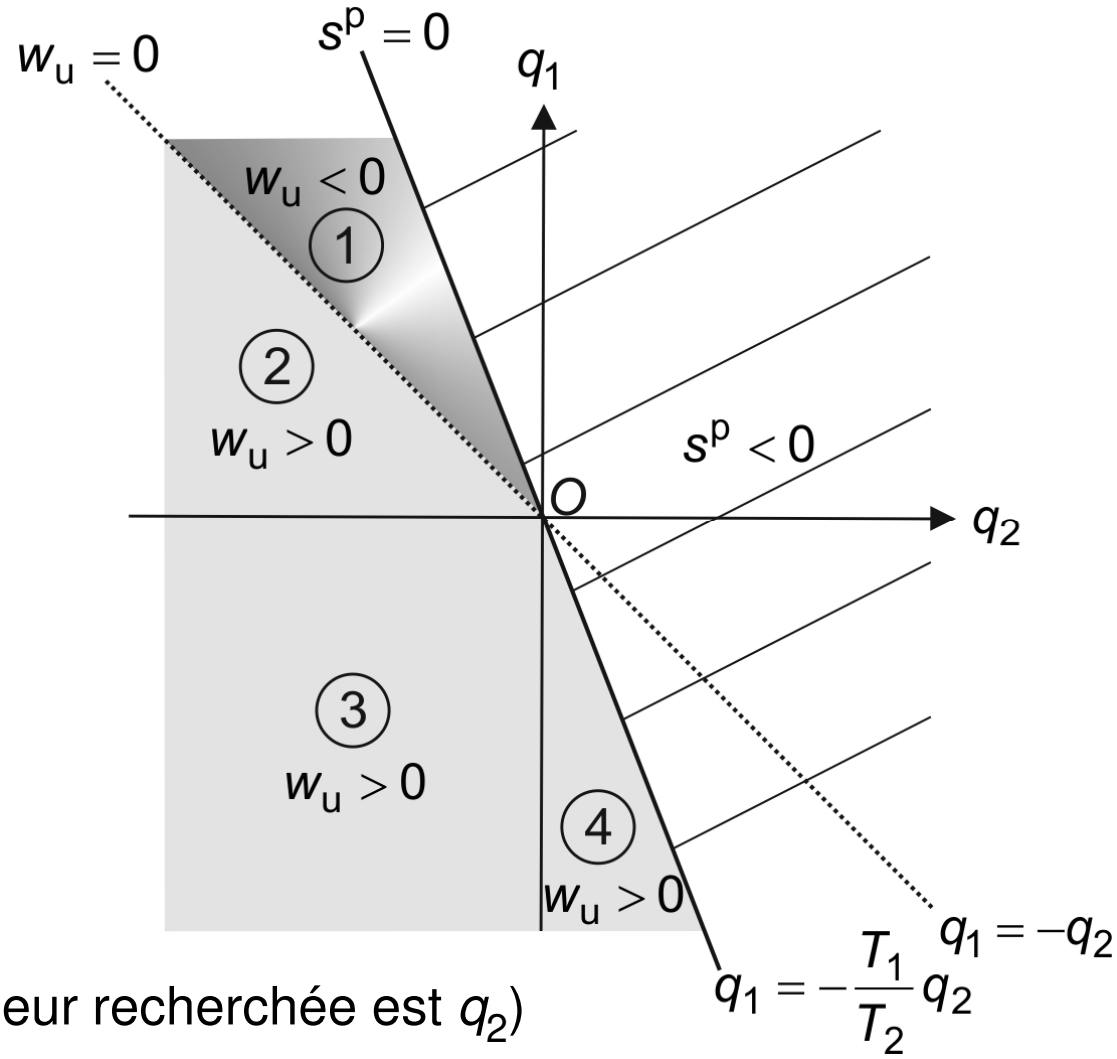
pour une transfo réversible : $\mathrm{d}s = \dfrac{\delta q}{T} \Rightarrow$ sur un cycle : $q = q_1 + q_2 = \oint T\mathrm{d}s > 0$

(sens anti-trigonométrique)

(4) : *machines frigorifiques*, prélèvent des calories à la source froide et en fournissent à la source chaude, grâce au travail utile reçu



machine frigorifique



efficacité d'un ***réfrigérateur*** (la grandeur recherchée est q_2)

$$\eta = \frac{q_2}{w_u} = -\frac{q_2}{q_1 + q_2} = -\frac{1}{1 + q_1 / q_2} = \frac{1}{-1 + T_1 s^p / q_2 + T_1 / T_2} \leq \frac{1}{-1 + T_1 / T_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

$$\boxed{\eta_{\text{rév}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}}$$

efficacité d'une ***pompe à chaleur*** (la grandeur recherchée est $-q_1$)

$$\eta = \frac{-q_1}{w_u} = \frac{q_1}{q_1 + q_2} = \frac{1}{1 + q_2 / q_1} = \frac{1}{1 \underbrace{- T_1 s^p / q_1}_{\geq 0} - T_2 / T_1} \leq \frac{1}{1 - T_2 / T_1} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

$$\boxed{\eta_{\text{rév}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}}$$

l'efficacité est maximale si les transformations sont *toutes* réversibles (efficacité de Carnot, ne dépend que de T_1 et T_2)
même cycle dans le diagramme entropique que pour un moteur de Carnot, mais décrit dans le sens trigonométrique

l'efficacité de la pompe à chaleur est toujours supérieure à 1, et que c'est aussi le cas en pratique pour le réfrigérateur

exemple $T_2 = 280$ K et $T_1 = 300$ K $\Rightarrow \eta_{\text{rév}} = 14$

: lorsque le fluide reçoit un travail de 1 J, il prélève 14 J à la source froide

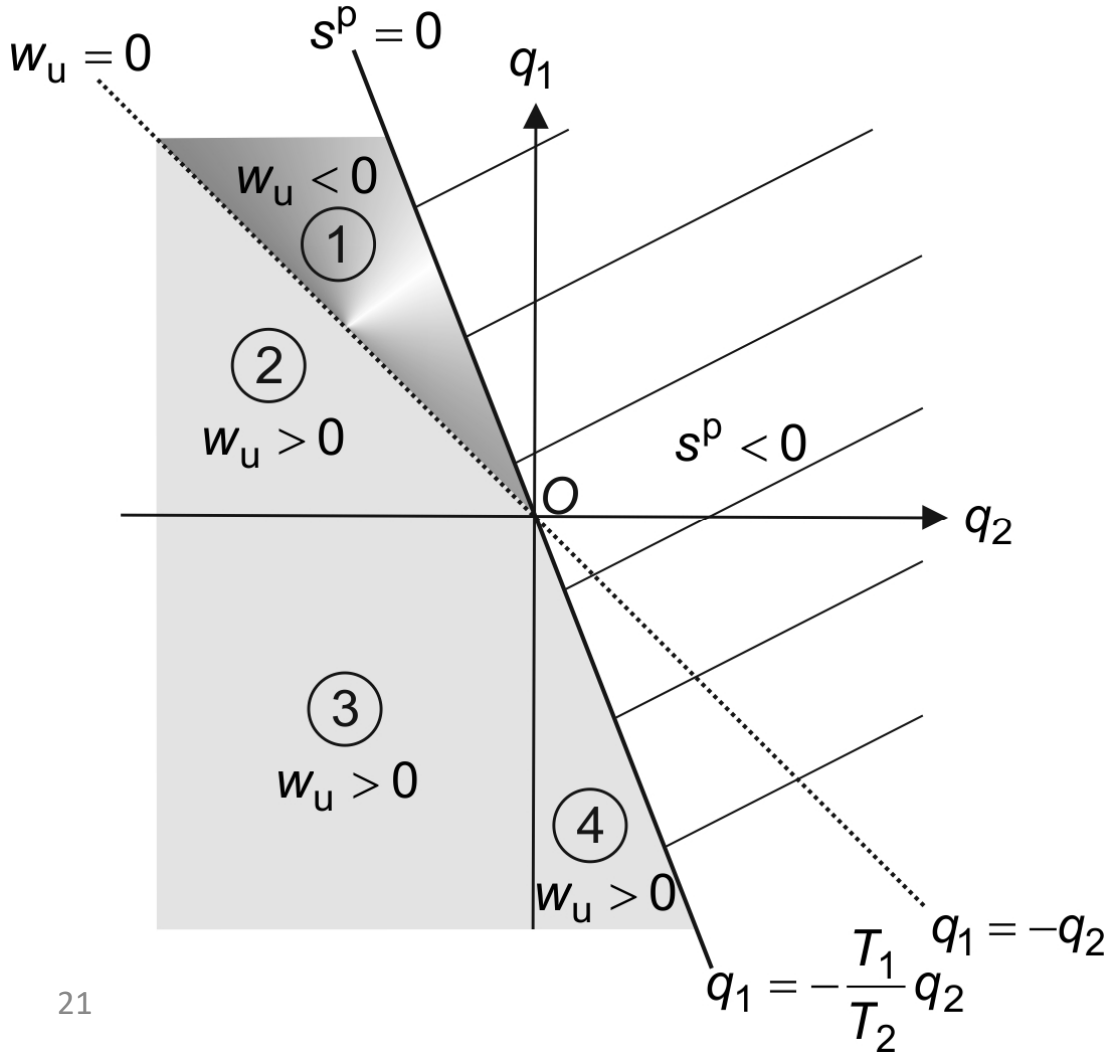
remarque : lors d'un cycle *réel*, les transformations suivies sont irréversibles, et on définit (souvent…) leur *rendement thermodynamique* par :

$$r = \frac{\eta}{\eta_{\text{rév}}}$$

remarques :

(2) pas d'intérêt (la machine consomme du travail utile pour un processus qui se produit naturellement)

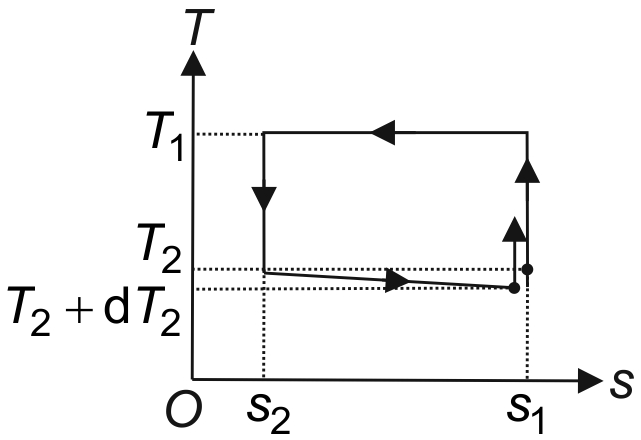
(3) pas d'intérêt (la machine consomme du travail utile pour fournir des calories à la source chaude, mais *aussi* à la source froide, donc mauvaise efficacité)



4.2 Cas des pseudo-sources

régimes *quasi-stationnaires* : les températures des sources varient (« pseudo-sources »), mais lentement devant la durée d'un cycle

exemple : climatiseur dans lequel le fluide subit des transformations réversibles : il faut $N >> 1$ cycles pour faire baisser de 10°C la température T_2 d'une pièce initialement à $T_{ext} = 35°C$ (durée d'un cycle << temps refroidissement de la pièce de 35°C à 25°C)



au bout d'un cycle physique, le fluide ne revient pas exactement dans le même état

$\Rightarrow$ modélisation par un cycle *élémentaire* de Carnot de durée dt, pendant lequel la température de la pièce varie de dT_2

$$\begin{cases} w_u + q_1 + q_2 \simeq 0 \\ \dfrac{q_1}{T_1} + \dfrac{q_2}{T_2} + s^p \simeq 0 \end{cases}$$

or pendant le cycle , une masse $\mathrm{d}m = q_m \mathrm{d}t$ de fluide traverse la machine $\Rightarrow$ grandeurs échangées $\delta W_u, \delta Q_1, \delta Q_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta W_u + \delta Q_1 + \delta Q_2 = q_m \mathrm{d}t \Delta h \simeq 0 \\ \dfrac{\delta Q_1}{T_1} + \dfrac{\delta Q_2}{T_2} + \delta S^p = q_m \mathrm{d}t \Delta s \simeq 0 \end{cases}$$

pendant un cycle, 1er ppe à la pièce : $\mathrm{d}H_2 = C_2 \mathrm{d}T_2 = -\delta Q_2$

enthalpie de la pièce

capacité thermique de la pièce

$C_2 = 5 \cdot 10^6 \ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

M reçoit, la pièce perd

transfos réversibles $(\delta S^{\mathrm{p}} = 0) \Rightarrow \delta Q_1 = -\dfrac{T_1}{T_2}\delta Q_2$ et $\delta W_{\mathrm{u}} = -\delta Q_1 - \delta Q_2 = C_2\left[1 - \dfrac{T_1}{T_2}\right]\mathrm{d}T_2$

d'où $W_{\mathrm{u}} = C_2\left[T_{2\mathrm{f}} - T_{2\mathrm{i}} - T_1 \ln\left(\dfrac{T_{2\mathrm{f}}}{T_{2\mathrm{i}}}\right)\right] = 5 \cdot 10^6\left[-10 - 308 \ln\left(\dfrac{298}{308}\right)\right] = 8{,}3 \cdot 10^5 \ \mathrm{J}$

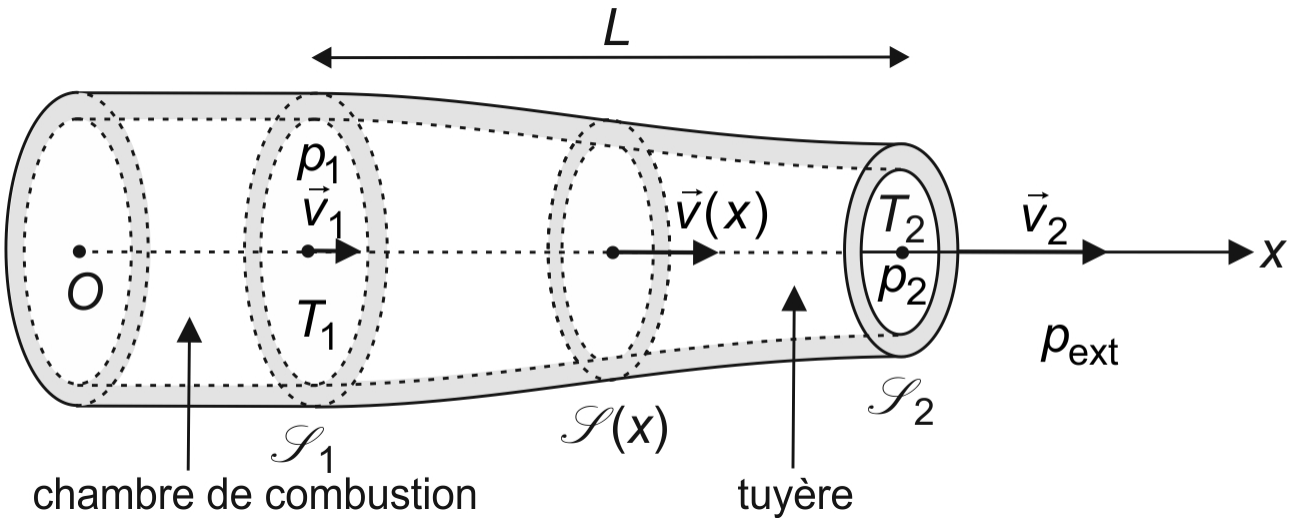
$$|Q_2| = C_2(T_{2\mathrm{i}} - T_{2\mathrm{f}}) = 5 \cdot 10^7 \ \mathrm{J} \Rightarrow \eta_{\mathrm{rév}} = \frac{5 \cdot 10^7}{8{,}3 \cdot 10^5} \simeq 60$$

efficacité moyenne, surestimée car les transformations sont irréversibles

5. TUYÈRES ET FUSÉES

5.1 Principe

but de la tuyère : transformer l'enthalpie du fluide obtenu après combustion en énergie cinétique pour expulser le fluide avec une grande vitesse ⇒ poussée sur l'avion ou la fusée



fusée : la tuyère est placée directement en sortie de la chambre de combustion

>>> fluide en entrée de la tuyère : T_1 et p_1 grandes, mais vitesse v_1 faible

>>> fluide en sortie : T_2 et p_2 plus faibles, mais grande vitesse v_2

hypothèse : écoulement **stationnaire**, **quasi 1D**, **parfait** dans la tuyère (en revanche, un tel écoulement est ***compressible***).
grandeurs : température $T(x)$, pression $p(x)$, vitesse $v(x)$, section $\mathscr{S}(x)$, masse volumique $\rho(x)$

5.2 Géométrie de la tuyère

comment accélérer le fluide tout le long de la tuyère ?

(1) : écoulement parfait donc isentropique $c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} \Rightarrow \mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}p}{c^2}$ (1)

(2) : écoulement stationnaire 1D $q_\mathrm{m} = \rho(x)\cdot\mathscr{S}(x)\cdot v(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}q_\mathrm{m}}{q_\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathscr{S}} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{v}} = 0$ (2)

(3) : premier principe au fluide, entre $x = 0$ et x quelconque (pesanteur négligée)

$$\Delta\left[\frac{1}{2}v^2 + h\right] = w_\mathrm{u} + q = 0$$ (écoulement adiabatique, pas de pièces mobiles)

$\frac{1}{2}v^2 + h = Cte \Rightarrow v\mathrm{d}v + \mathrm{d}h = 0$ or $\mathrm{d}h = T\underbrace{\mathrm{d}s}_{0} + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \frac{\mathrm{d}p}{\rho}$ pour une transformation isentropique

$$\Rightarrow v\mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}p}{\rho} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}\rho = \dfrac{\mathrm{d}p}{c^2} \ (1) \\ \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathscr{S}} + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{v}} = 0 \ (2) \\ \dfrac{\mathrm{d}p}{\rho} = -v\mathrm{d}v \ (3) \quad \Rightarrow -\dfrac{v\mathrm{d}v}{c^2} + \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathscr{S}} + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{v}} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathscr{S}} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{v}}\left[\dfrac{v^2}{c^2} - 1\right] \end{cases}$$

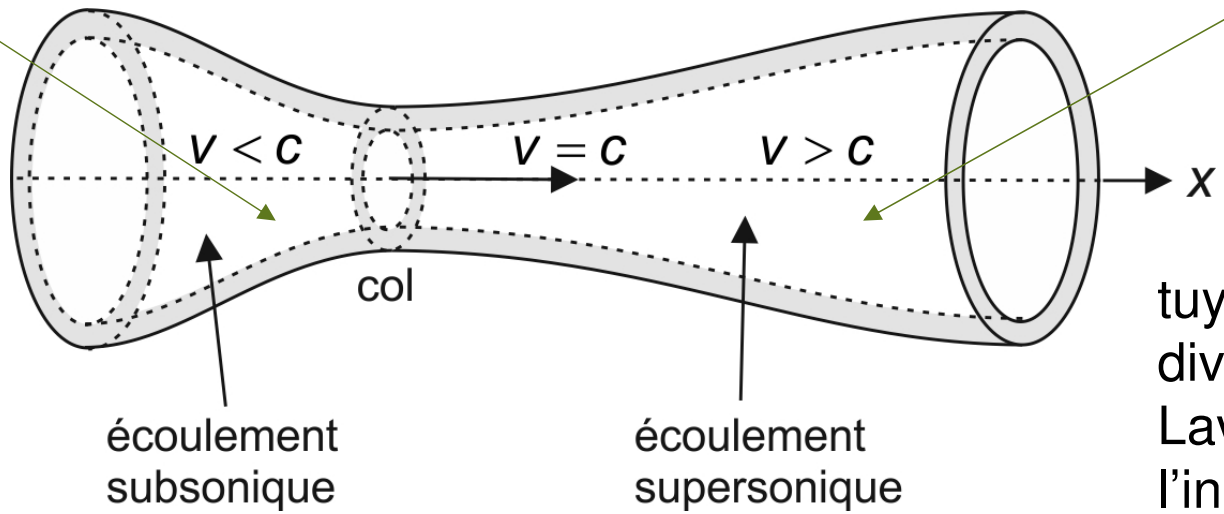
$$\left.\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\rho c^2} + \frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathscr{S}} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{v}} = 0$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathscr{S}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{v}}\left[\mathscr{M}^2 - 1\right] \ \textbf{formule d'Hugoniot}}$$

$\mathscr{M}(x) = \dfrac{v(x)}{c(x)}$ nombre de Mach local

$\mathrm{d}v > 0 \Rightarrow \mathrm{d}\mathscr{S} < 0$ si $\mathscr{M} < 1$

$\mathrm{d}v > 0 \Rightarrow \mathrm{d}\mathscr{S} > 0$ si $\mathscr{M} > 1$



tuyère convergente-divergente : tuyère de Laval (du nom de l'ingénieur suédois Gustaf de Laval)

remarque : écoulement largement subsonique ($\mathscr{M} < 0{,}3$)

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathscr{S}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{v}}\left[\mathscr{M}^2 - 1\right] \approx -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{v}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathscr{S}} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{v}} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}\left[\ln(\mathscr{S}\, v)\right] = 0 \Leftrightarrow \mathscr{S}\, v = Cte$$

on a donc $q_\mathrm{v} = \mathscr{S}\, v = Cte$, or $q_\mathrm{m} = \rho \mathscr{S}\, v = Cte$

$\Rightarrow \rho = Cte$: un écoulement stationnaire parfait à $\mathscr{M} << 1$ est incompressible

5.3 Vitesse d'éjection

la tuyère éjecte des **gaz** qui seront bien sûr considérés comme **parfaits** dans l'hypothèse, plus forte, d'un écoulement de *fluide* parfait

premier principe : $\frac{1}{2} v_2{}^2 + h_2 = \frac{1}{2} \underbrace{v_1{}^2}_{<<v_2{}^2} + h_1 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2)}$ (1)

pour un G.P de masse molaire M : $h(T) = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)} T + Cte$ (2)

entre l'entrée et la sortie, une particule de gaz parfait subit une transformation isentropique ⇒ loi de Laplace :

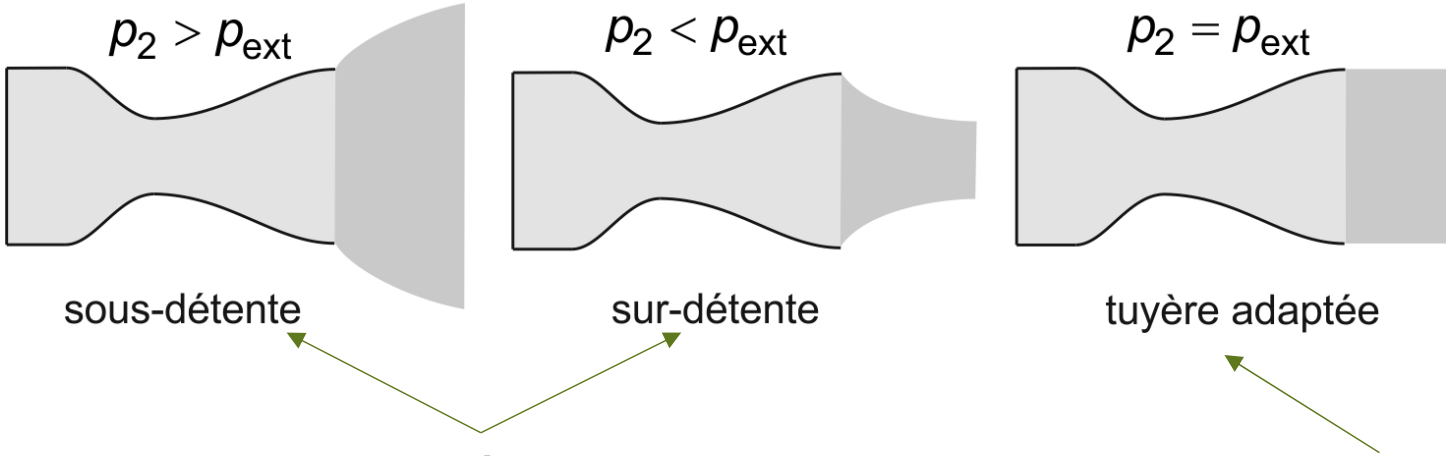
$$T_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 \psi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (3)$$

$\psi = \dfrac{p_2}{p_1}$ est le rapport de compression

$$\Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2R\gamma}{M(\gamma-1)} T_1 \left[1 - \psi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}} \text{ vitesse d'éjection}$$

⇒ propergols (carburant : le réducteur, et comburant : l'oxydant) permettant d'obtenir une grande température T_1 dans la chambre de combustion (réaction très *exothermique*), et possédant une *masse molaire faible*

influence de p_{ext}



perte de quantité de mouvement axiale sortante du fait de la vitesse radiale dans le jet

cas recherché : écoulement parallèle en sortie

premier étage d'une fusée qui traverse l'atmosphère : p_{ext} varie avec l'altitude
$\Rightarrow$ tuyère de longueur variable, ou compromis

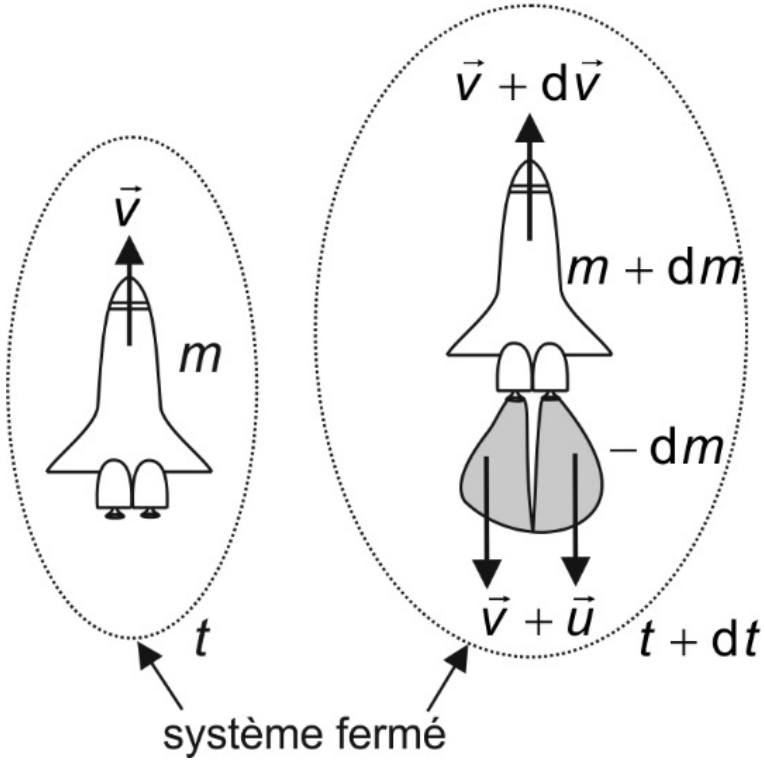
dans le vide : $p_{ext} \approx 0 \Rightarrow$ tuyère suffisamment longue

5.4 Force de poussée sur une fusée / bilan de quantité de mouvement

fusée, de masse $m(t)$, **système ouvert**, expulse par ses tuyères des gaz :

>>> débit massique total q_m

>>> vitesse relative $\vec{u}$ (dans le référentiel de la fusée) colinéaire à la vitesse $\vec{v}$ de la fusée dans le référentiel géocentrique $\mathscr{R}$ supposé galiléen



bilan de quantité de mouvement dans $\mathscr{R}$ au système fermé Σ constitué à t de la fusée et à $t+\mathrm{d}t$ de la fusée et des gaz éjectés (masse $-\mathrm{d}m$) entre t et $t+\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}(t+\mathrm{d}t)-\vec{p}(t)\ =\left[(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-(\vec{u}+\vec{v})\mathrm{d}m\right]-\left[m\vec{v}\right]=m\mathrm{d}\vec{v}-\vec{u}\mathrm{d}m$$

on peut appliquer à ce système fermé Σ le théorème de la résultante cinétique dans $\mathscr{R}$ galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext}} \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{\Pi}$$

tout se passe comme si l'on pouvait appliquer le P.F.D à la fusée, alors que celle-ci est un système ouvert, mais en ajoutant aux forces extérieures, une **force de poussée** :

$\vec{\Pi} = \vec{u}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ de sens opposé à $\vec{u}$ car $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -q_{\text{m}} < 0$