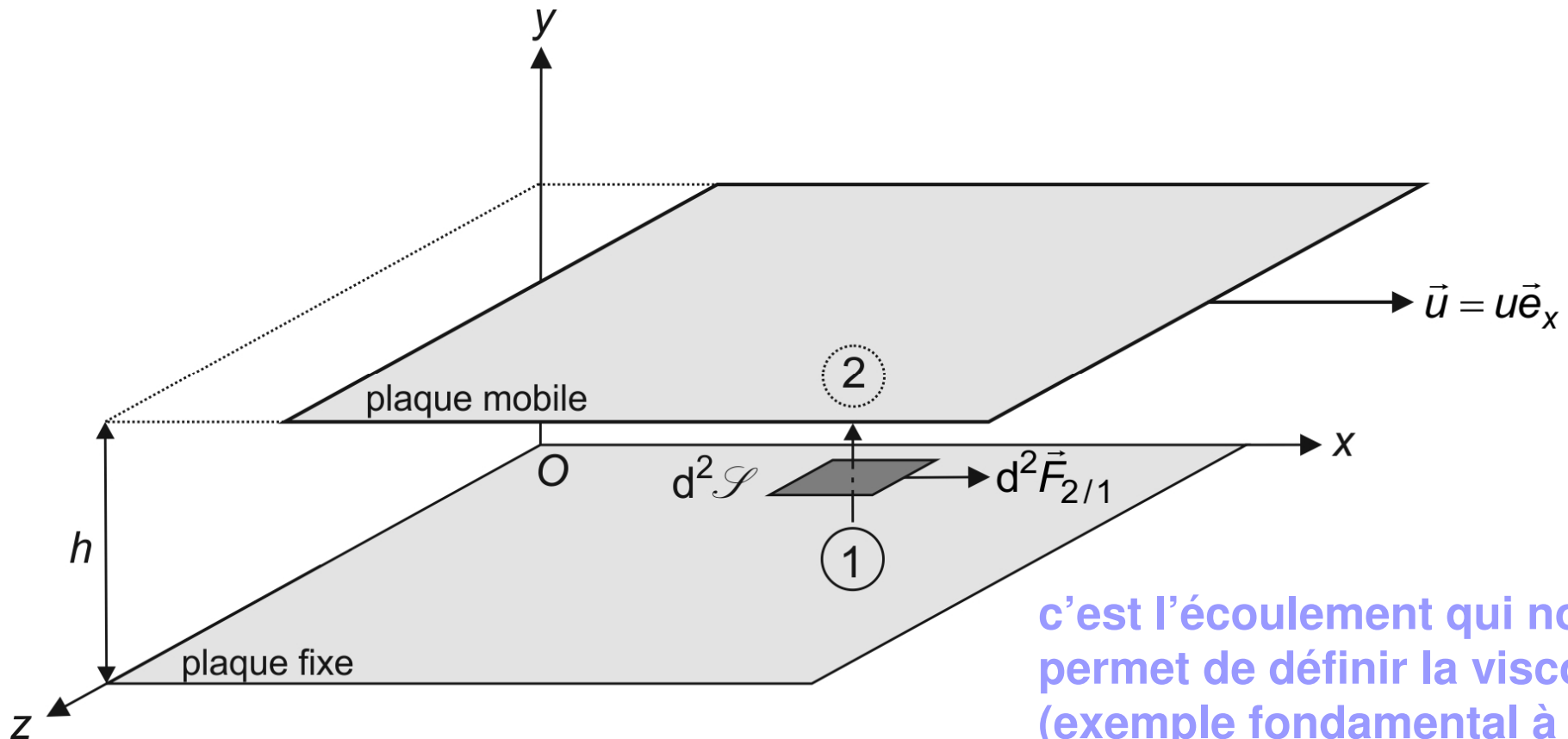


DYNAMIQUE DES FLUIDES

1. ACTIONS DE CONTACT SUR UN FLUIDE

1.1 Contraintes tangentielles / viscosité

écoulement de **Couette** : fluide incompressible entre deux plaques horizontales, mis en mouvement car la plaque supérieure est déplacée avec une vitesse constante $\vec{u} = u\vec{e}_x$

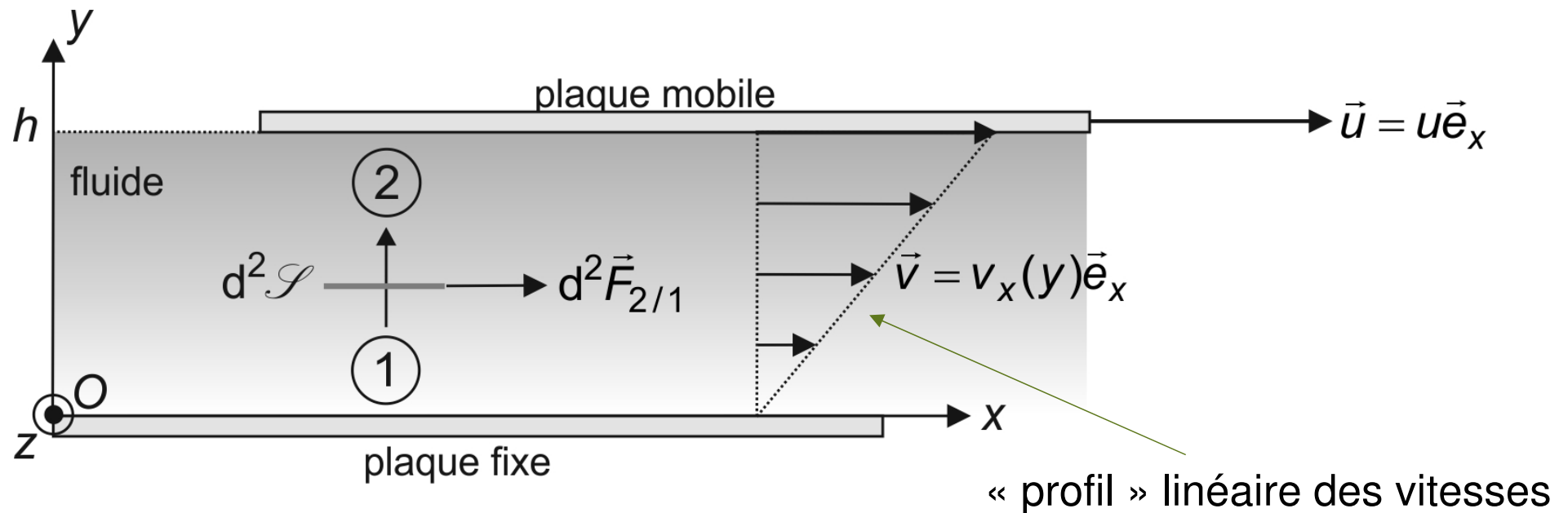


c'est l'écoulement qui nous permet de définir la viscosité (exemple fondamental à connaître)

en régime stationnaire : champ $\vec{v} = v_x(y) \vec{e}_x = \frac{u}{h} y \vec{e}_x$ obtenu expérimentalement

>>> un écoulement où existe un gradient de vitesse orthogonal à l'écoulement est dit « *cisaillé* »

>>> on remarque que $\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, l'écoulement étant incompressible



force visqueuse de (2) sur (1) :

$$d^2 \vec{F}_{2/1} = d^2 \vec{F}_v = \vec{\sigma}_v d^2 \mathcal{S}$$

↑
contrainte visqueuse

$$\vec{\sigma}_v = \frac{d^2 \vec{F}_v}{d^2 \mathcal{S}} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e}_x \quad \text{obtenue expérimentalement}$$

↑
 $\eta \geq 0$ viscosité **dynamique** du fluide (Pa · s)

$$\vec{\sigma}_v = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e}_x \quad \text{or} \quad \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right] = T^{-1} \quad \text{et} \quad [\sigma_v] = [\rho]$$

$\Rightarrow \eta$ est bien en $\text{Pa} \cdot \text{s}$ (anciennement "poiseuille" Pl)

η est une caractéristique du fluide ; η est nulle dans la limite des fluides *parfaits*
 η ne dépend que de la température T (η augmente avec T pour un gaz, η diminue pour un liquide) pour un fluide « classique », dit **newtonien** (l'eau, l'air, l'huile, le miel...).

pour un fluide *non* newtonien (pas au programme), elle dépend :

>>> de σ_v (η diminue avec σ_v pour un fluide « rhéofluidifiant » : sang, η augmente avec σ_v pour un fluide « rhéoépaississant » : mélange eau-maïzena

>>> de la durée pendant laquelle est exercée σ_v (exemple : fluide « thixotrope » comme une peinture qu'on remue avec une spatule $\Rightarrow \eta$ diminue)

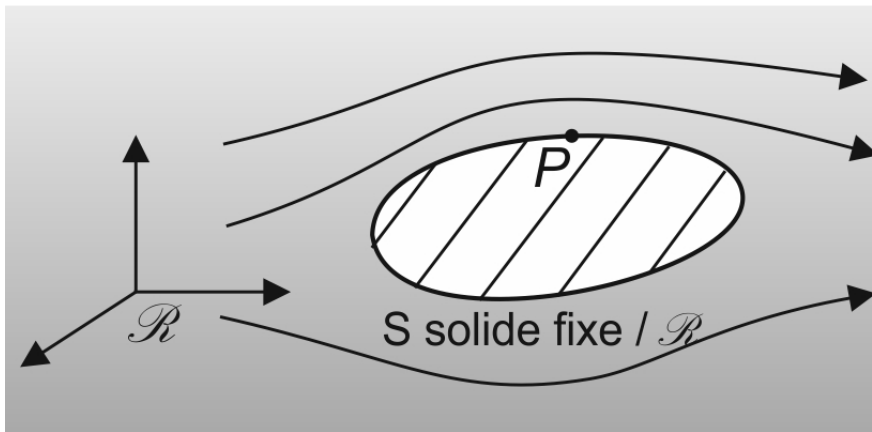
viscosité de fluides newtoniens à 298 K :

air	eau	huile de ricin	miel
$1,85 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$	$1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$	$\simeq 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$	$\simeq 10 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

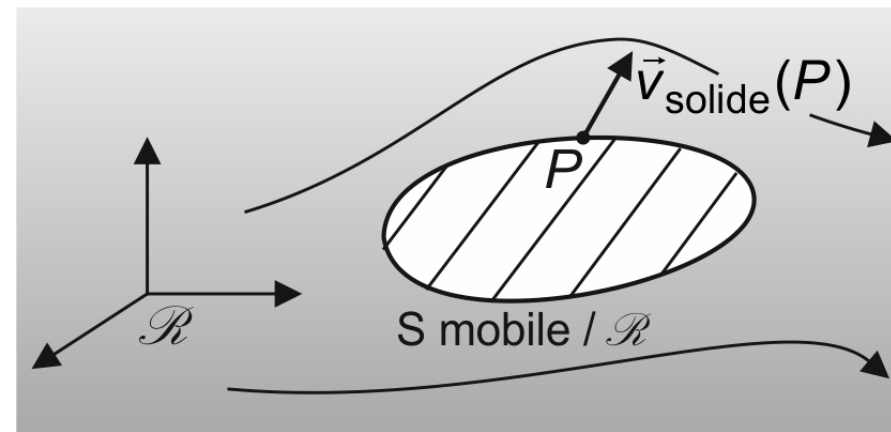
1.2 Conditions aux limites pour un écoulement réel (visqueux)

expérience de Couette : $\begin{cases} \vec{v}(y=0) = \vec{0} \\ \vec{v}(y=h) = \vec{u} \end{cases} \Rightarrow$ adhérence du fluide aux parois solides

de façon générale, un fluide *visqueux* adhère aux parois solides (il y a non-glissement du fluide sur le solide)

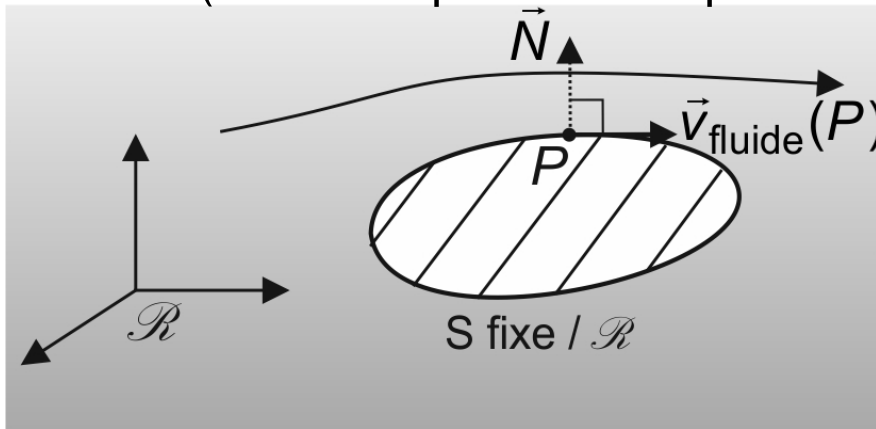


$$\vec{v}_{\text{fluide}}(P) = \vec{0}$$

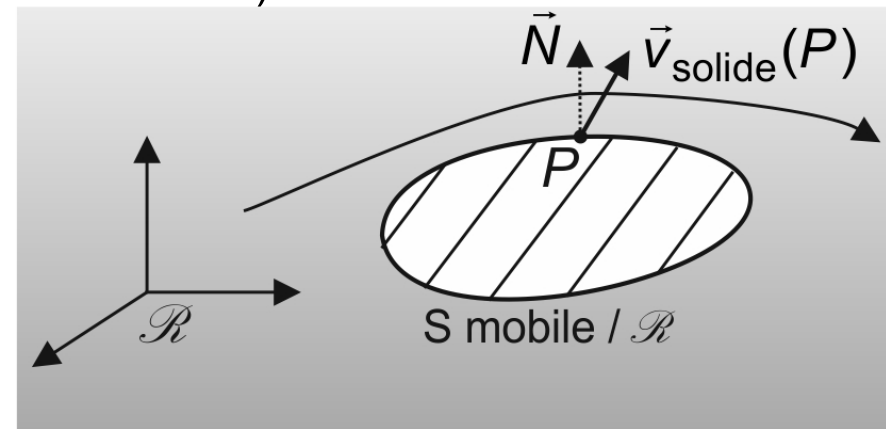


$$\vec{v}_{\text{fluide}}(P) = \vec{v}_{\text{solide}}(P)$$

en revanche un fluide *parfait* peut glisser sur le solide et la condition aux limites ne porte alors *que* sur la composante normale de la vitesse en un point P de la paroi solide (car cette paroi est imperméable au fluide)

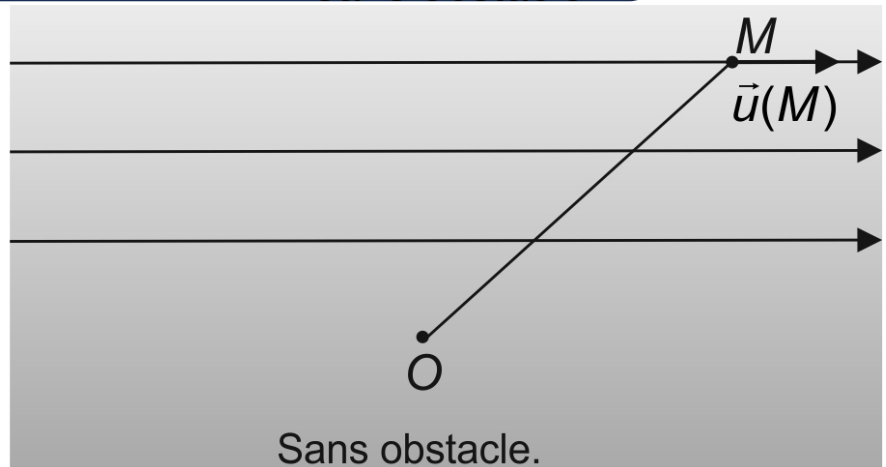
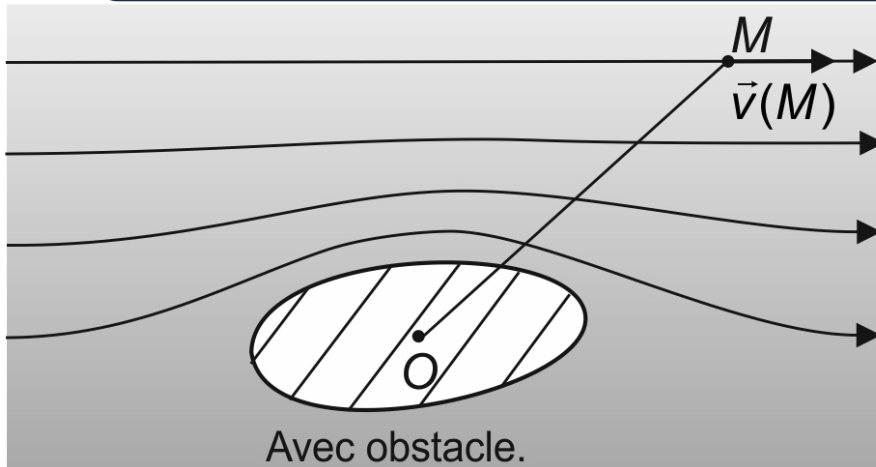


$$\vec{v}_{\text{fluide}}(P) \cdot \vec{N} = 0$$



$$\vec{v}_{\text{fluide}}(P) \cdot \vec{N} = \vec{v}_{\text{solide}}(P) \cdot \vec{N}$$

condition loin d'un obstacle : $\lim_{OM \rightarrow \infty} \vec{v}(M) = \underbrace{\vec{u}(M)}_{\text{sans obstacle}}$



l'obstacle fini ne perturbe l'écoulement que localement

1.3 Interprétation microscopique de la viscosité pour les gaz

pendant dt , des molécules de (2) passent dans (1) et réciproquement

⇒ quantité de mouvement :

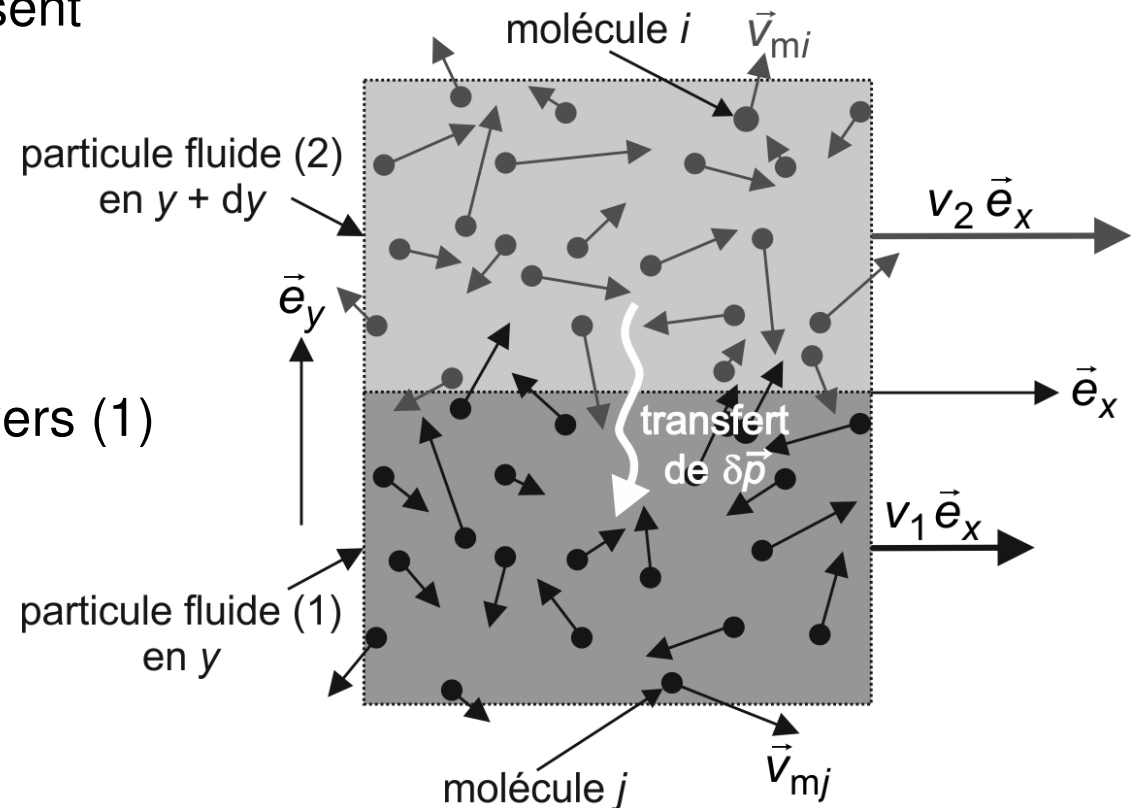
$\delta \vec{p}_2$ passe de (2) à (1)

$\delta \vec{p}_1$ passe de (1) à (2)

⇒ transfert total $\delta \vec{p} = \delta \vec{p}_2 - \delta \vec{p}_1$ de (2) vers (1)

$$\delta p_x = \delta p_{2x} - \delta p_{1x} > 0$$

car $v_2 > v_1$



théorème de la quantité de mouvement : (1) subit de la

part de (2) une force tangentielle à \mathcal{S} : $\vec{F}_{2/1 \text{ T}} = \frac{\delta p_x}{dt} \vec{e}_x$ force de viscosité

La quantité de mouvement δp_x qui traverse \mathcal{S} pendant dt est proportionnelle à \mathcal{S}
 $\Rightarrow F_{2/1x}$ l'est aussi : les forces de viscosité sont *surfaciques*

les actions de contact visqueuses sont dues à *un transfert de quantité de mouvement* entre deux particules fluides en mouvement relatif

1.4 Équivalent volumique des actions visqueuses pour un écoulement incompressible (hors-programme PSI)

écoulement incompressible de Couette

$$\vec{v} = v_x(y) \vec{e}_x \Rightarrow \text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

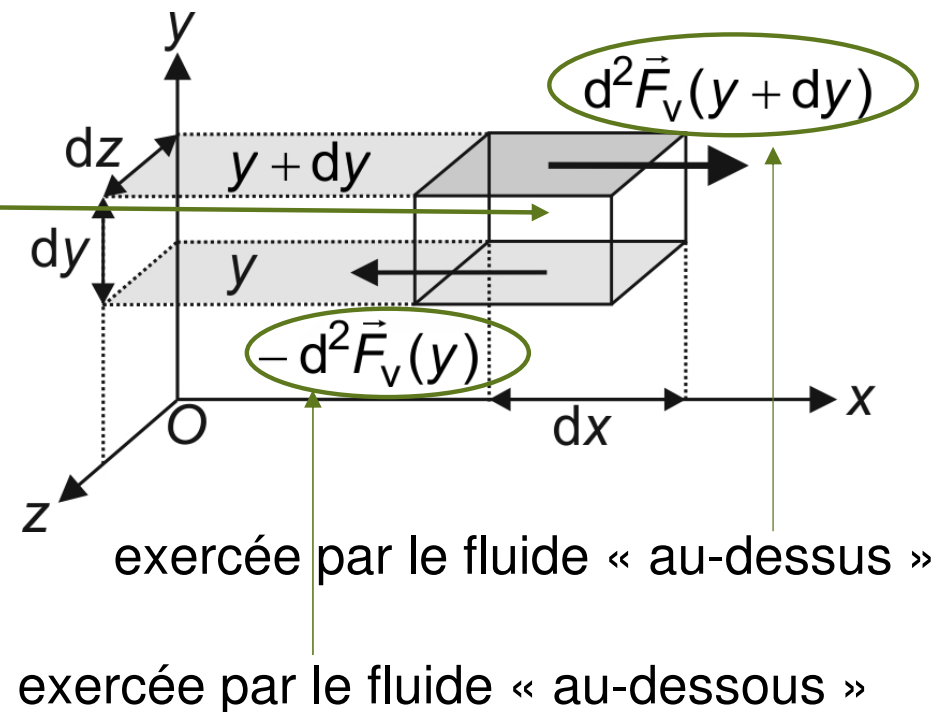
forces visqueuses sur la **particule fluide** :

$$d^2 \vec{F}_v(y + dy) = +\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}(y + dy, t) dx dz \vec{e}_x$$

"+" car $d^2 \vec{F}_v(y + dy) > 0$ si $\frac{\partial v_x}{\partial y}(y + dy, t) > 0$

$$-d^2 \vec{F}_v(y) = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}(y, t) dx dz \vec{e}_x$$

"-" car $-d^2 \vec{F}_v(y) < 0$ si $\frac{\partial v_x}{\partial y}(y, t) > 0$



résultante $d^3\vec{F}_V = d^2\vec{F}_V(y+dy) - d^2\vec{F}_V(y) = \eta \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right] dy dx dz \vec{e}_x = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy dx dz \vec{e}_x$

$$\Rightarrow d^3\vec{F}_V = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{e}_x d^3\mathcal{V} = \eta (\Delta v_x) \vec{e}_x d^3\mathcal{V} = \eta \Delta \vec{v} d^3\mathcal{V}$$

↑
laplacien

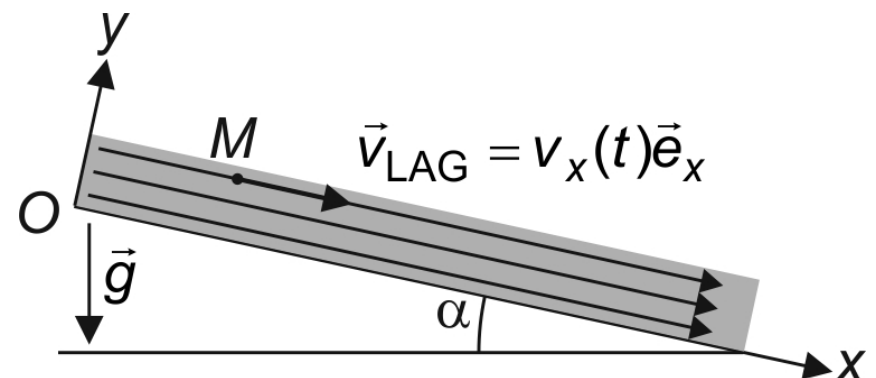
l'expression $d^3\vec{F}_V = \eta \Delta \vec{v} d^3\mathcal{V}$ est valable pour tout écoulement newtonien incompressible

1.5 Loi de pression dans une direction orthogonale à un écoulement parallèle

écoulement // : $\vec{v}_{EUL} = v_x(x, y, z, t) \vec{e}_x \Rightarrow \vec{v}_{LAG} = v_x(t) \vec{e}_x$

pour une particule fluide de volume $d^3\mathcal{V}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{e}_x$$



P.F.D à la particule dans \mathcal{R} galiléen :

$$\rho d^3\mathcal{V} \frac{dv_x}{dt} \vec{e}_x = \underbrace{\rho \vec{g} d^3\mathcal{V}}_{\text{poids}} - \underbrace{\overrightarrow{\text{grad } p} d^3\mathcal{V}}_{\text{pression}} + \underbrace{d^3F_v \vec{e}_x}_{\text{viscosité}}$$

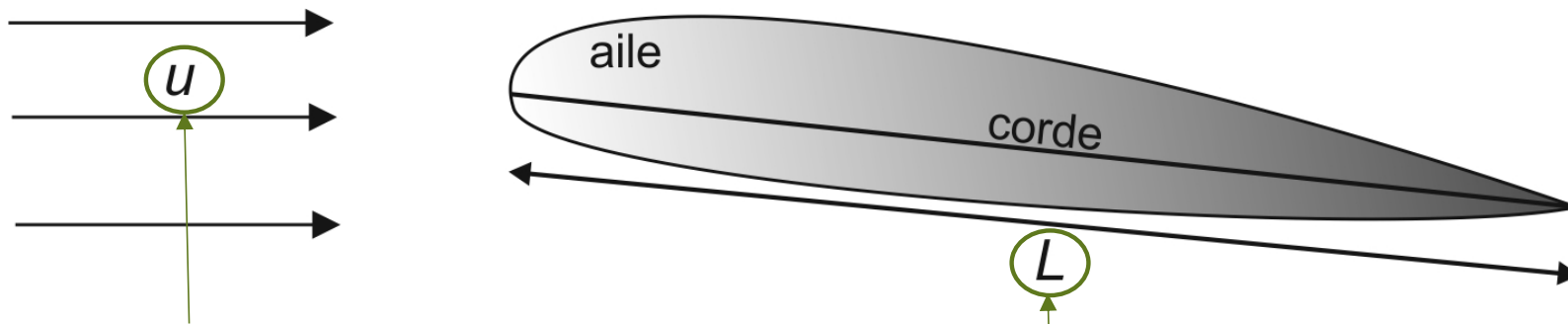
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z \end{cases} : \text{même loi de pression qu'en statique dans les directions } \perp \text{ à l'écoulement}$$

2. NOMBRE DE REYNOLDS

2.1 Les différents types d'écoulement

— écoulements externes (*autour* d'un obstacle)

exemple : écoulement autour d'une aile d'avion

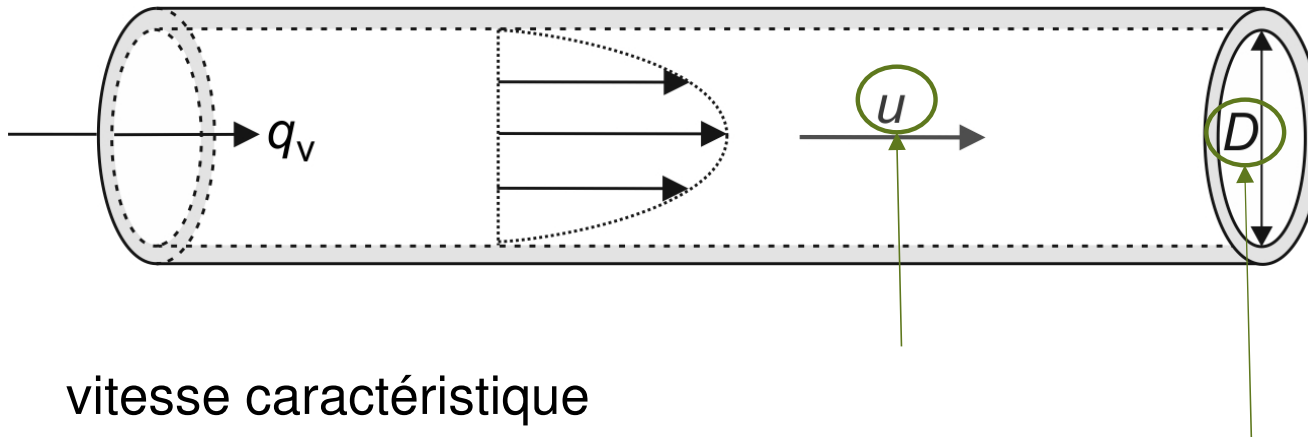


vitesse caractéristique (à l'infini de l'aile)

longueur caractéristique

— écoulements internes (*dans* une conduite)

exemple : écoulement dans une canalisation de section circulaire



vitesse caractéristique

(vitesse débitante)

$$u \text{ définie par : } q_v = u \frac{\pi D^2}{4}$$

longueur caractéristique (diamètre par convention)

(vitesse moyenne correspondant à un écoulement uniforme de même débit volumique)

2.2 Les deux modes de transfert de quantité de mouvement

une surface \mathcal{S} placée dans un écoulement peut être traversée pendant dt par $\delta\vec{p}$ selon deux modes différents dont on cherche les durées caractéristiques

exemple fondamental : écoulement de Couette $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$

— transfert *convectif* : dû au mouvement *macroscopique*

$$\delta\vec{p} = \underbrace{\rho \mathcal{S} v_x dt}_{\delta m} v_x \vec{e}_x$$

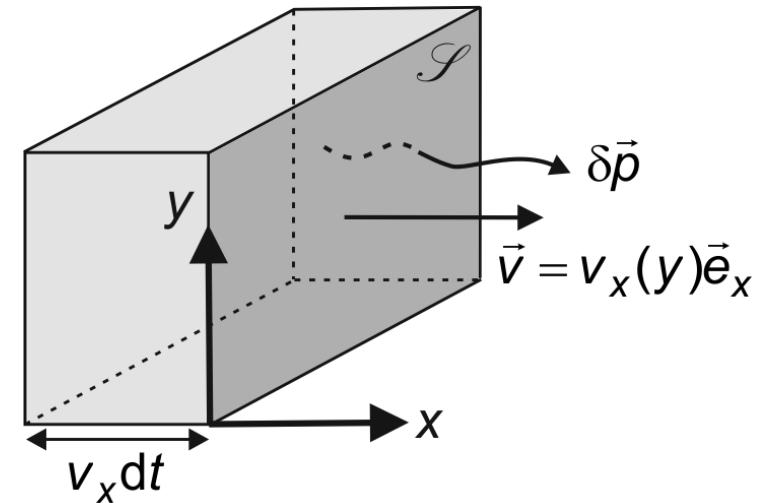
(\mathcal{S} petite mais pas notée $d^2\mathcal{S}$ pour simplifier)

$$\frac{\delta\vec{p}}{dt} = \rho \mathcal{S} v_x^2 \vec{e}_x \Rightarrow \left\| \frac{\delta\vec{p}}{dt} \right\| = O(\rho \mathcal{S} u^2)$$

$$\text{et aussi } \left\| \frac{\delta\vec{p}}{dt} \right\| = O\left(\frac{p}{\tau_c}\right) \text{ avec } p = O(\rho \mathcal{S} Lu)$$

↑
durée caractéristique de la convection

$$\rho \mathcal{S} u^2 = O(\rho \mathcal{S} Lu / \tau_c) \Rightarrow \tau_c = O(L / u)$$



la durée caractéristique du transfert de quantité de mouvement par convection sur la

longueur L est définie par $\tau_c = \frac{L}{u}$

— transfert *diffusif* : dû au mouvement *microscopique*

surface \mathcal{S} dans un plan $y = Cte$ traversée
dans le sens des y croissants par $\delta \vec{p} = \delta p \vec{e}_x$

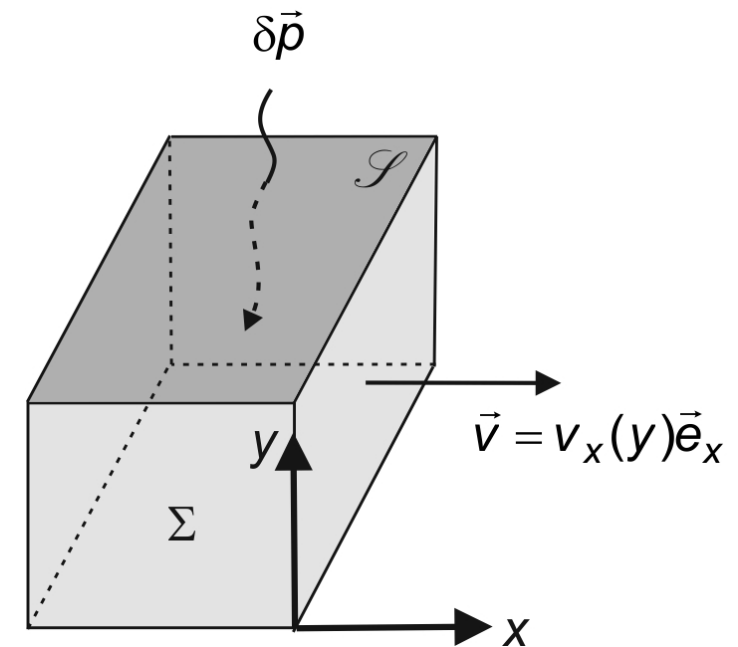
la quantité de mouvement du système Σ ,
fluide en dessous de \mathcal{S} , varie de $d\vec{p} = \delta \vec{p}$

$\Rightarrow \Sigma$ subit une force visqueuse de la part
du fluide au-dessus de \mathcal{S} :

$$\vec{F}_v = \frac{\delta \vec{p}}{dt} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \mathcal{S} \vec{e}_x = O\left(\frac{\eta u \mathcal{S}}{L}\right)$$

$$\text{et aussi } \left\| \frac{\delta \vec{p}}{dt} \right\| = O\left(\frac{\rho}{\tau_d}\right) = O\left(\frac{\rho \mathcal{S} L u}{\tau_d}\right)$$

durée caractéristique de la diffusion



$$\frac{\eta u \mathcal{S}}{L} = O\left(\frac{\rho \mathcal{S} L u}{\tau_d}\right) \Rightarrow \tau_d = O\left(\frac{\rho L^2}{\eta}\right)$$

$$\text{viscosité cinématique } \nu = \frac{\eta}{\rho} \text{ en } \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{en effet } [\nu] = [L^2 / \tau_d]$$

ordres de grandeur :

$$\nu_{\text{eau}} \simeq \frac{10^{-3}}{10^3} = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } \nu_{\text{air}} \simeq \frac{10^{-5}}{1} = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

la durée caractéristique du transfert de quantité de mouvement par diffusion sur la

$$\text{longueur } L \text{ est définie par } \tau_d = \frac{\rho L^2}{\eta} = \frac{L^2}{\nu}$$

2.3 Nombre de Reynolds et signification

$$Re = \frac{\tau_d}{\tau_c} = \frac{\rho u L}{\eta} = \frac{u L}{\nu}$$

>>> si $Re \ll 1 \Leftrightarrow \tau_d \ll \tau_c$

les phénomènes diffusifs (liés à la viscosité), beaucoup plus rapides, dominent les phénomènes convectifs (liés au déplacement macroscopique)
 \Rightarrow la viscosité doit être prise en compte.

>>> $Re \gg 1 \Leftrightarrow \tau_c \ll \tau_d$

les phénomènes convectifs dominent les phénomènes diffusifs ; on peut négliger la viscosité du fluide et adopter le modèle de fluide parfait

2.4 Équation de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible (hors-programme PSI)

P.F.D à la particule fluide dans \mathcal{R} galiléen :

$$\rho d^3\mathcal{V} \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\rho \vec{g} d^3\mathcal{V}}_{\text{poids}} - \underbrace{\vec{\text{grad}} p d^3\mathcal{V}}_{\text{pression}} + \underbrace{\eta \Delta \vec{v} d^3\mathcal{V}}_{\text{viscosité}} \Rightarrow \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$$

équation de Navier-Stokes, valable pour un fluide newtonien incompressible

seul le terme visqueux est hors-programme...

l'équation de Navier-Stokes est une des équations les plus complexes de la Physique, et admet très rarement des solutions analytiques car :

>>> $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ terme *non* linéaire

>>> couplage entre v_x, v_y et v_z : en projection sur \vec{e}_x

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) v_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

>>> dérivées spatiales du second ordre : laplacien $\Delta \vec{v}$

termes en $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \dots$

\Rightarrow chaos, turbulence dans certains écoulements fluides

heureusement, des simplifications sont possibles dans certains cas

$$\text{nombre de Reynolds } Re = \frac{O\left[\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right]}{O[\eta\Delta\vec{v}]}$$

← terme « convectif »

← terme « diffusif »

$$\text{or } O\left[\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right] = \frac{\rho u^2}{L} \text{ et } O[\eta\Delta\vec{v}] = \frac{\eta u}{L^2} \Rightarrow \mathbf{Re} = \frac{\rho u L}{\eta} = \frac{u L}{\nu}$$

$$>>> \text{si } Re \ll 1 \Rightarrow \text{terme convectif négligeable : } \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$$

équation de Stokes, du second ordre mais linéaire

$$>>> Re \gg 1 \Rightarrow \text{terme visqueux négligeable : } \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p$$

équation d'Euler, non linéaire mais du premier ordre

3. ÉCOULEMENT EXTERNE INCOMPRESSIBLE

3.1 Couche limite

exemple : aile d'avion

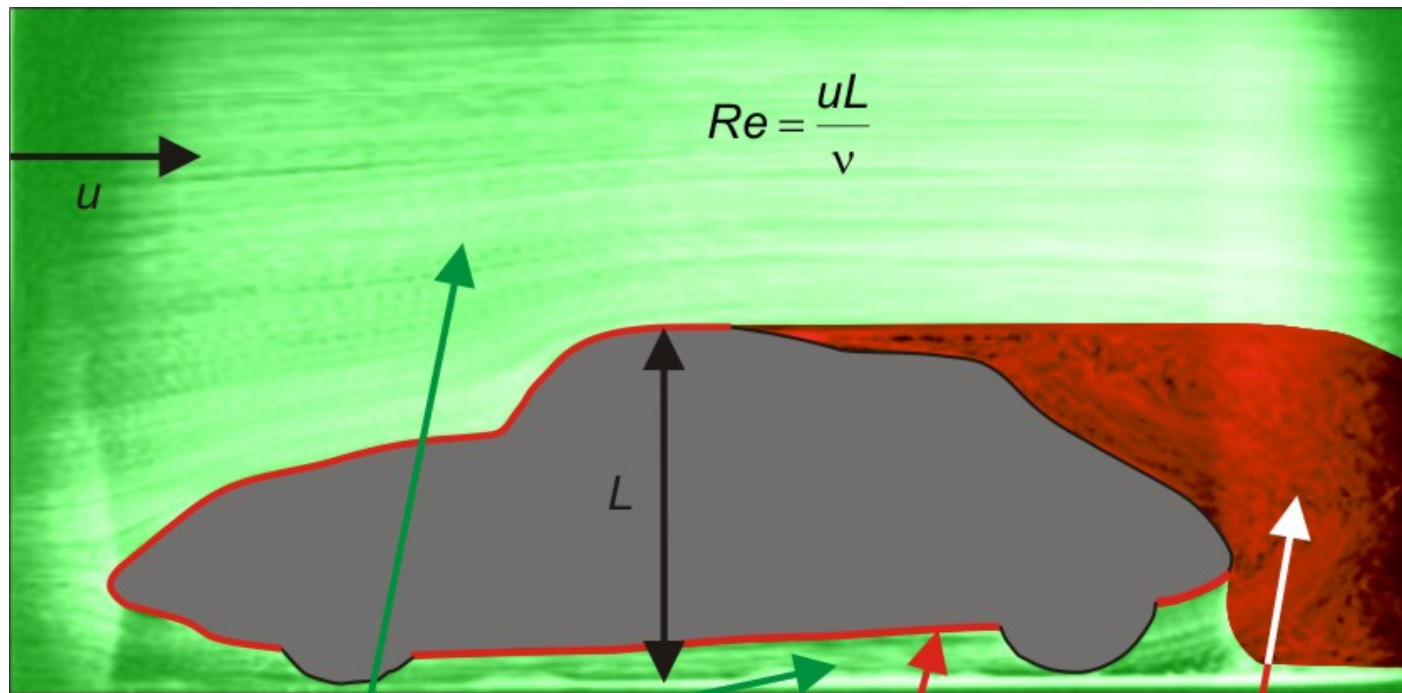
corde $L = 1 \text{ m}$ vitesse de l'avion $u = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow Re = \frac{uL}{\nu_{\text{air}}} \simeq \frac{1 \times 100}{10^{-5}} = 10^7$

exemple : modèle réduit aile d'avion dans un tunnel hydrodynamique

largeur $L = 10 \text{ cm}$ vitesse $u = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow Re = \frac{uL}{\nu_{\text{eau}}} \simeq \frac{10^{-1} \times 10^{-1}}{10^{-6}} = 10^4$

sauf exceptions (*petits* objets en mouvement *lent* dans un fluide *visqueux*), Re (global) $\gg 1$ pour les écoulements externes : on peut négliger la viscosité du fluide et considérer l'écoulement parfait sauf :

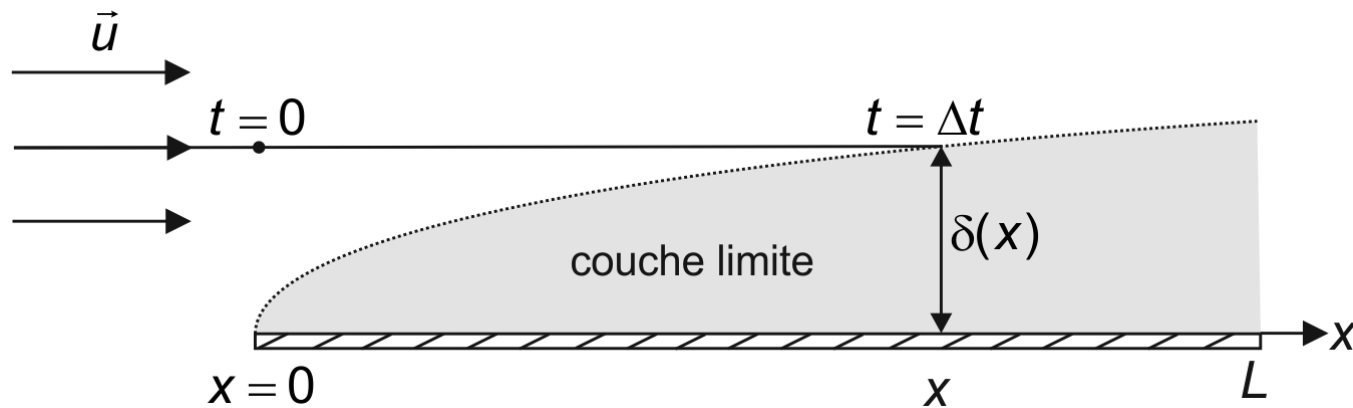
- dans une **couche limite** proche des parois ($\nu \rightarrow 0$ en se rapprochant de la paroi : effets convectifs dominés par les effets diffusifs).
- dans le sillage, zone tourbillonnaire en aval de l'obstacle



écoulement
 \approx parfait
alors que le fluide est
visqueux...

couche limite sillage turbulent
c'est dans ces zones qu'il faut
prendre en compte la viscosité
du fluide

ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite : écoulement sur une plaque de longueur L avec une vitesse en amont parallèle à la plaque



>>> les particules fluides arrivent en x en une durée $\Delta t = O(x / u)$

>>> pendant cette durée , la couche limite croît de $\delta(x)$ orthogonalement à l'écoulement

or si $\tau_d = L^2 / \nu$ est la durée caractéristique de la diffusion sur L , $\delta = \sqrt{(\nu \Delta t)}$ est la longueur caractéristique de la diffusion pendant Δt

$$\Rightarrow \delta(x) = O\left(\sqrt{\nu x / u}\right) \propto \sqrt{x} \quad \text{bien vérifié expérimentalement}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta(x)}{x} = O\left(\sqrt{\frac{\nu}{ux}}\right) = O\left[Re(x)^{-1/2}\right]$$

nombre de Reynolds local : $Re(x) = \frac{ux}{\nu}$

en bout de plaque : $\delta(L) = O[Re \cdot L]$

nombre de Reynolds global : $Re = \frac{uL}{\nu}$

écoulement d'air autour d'une voiture :

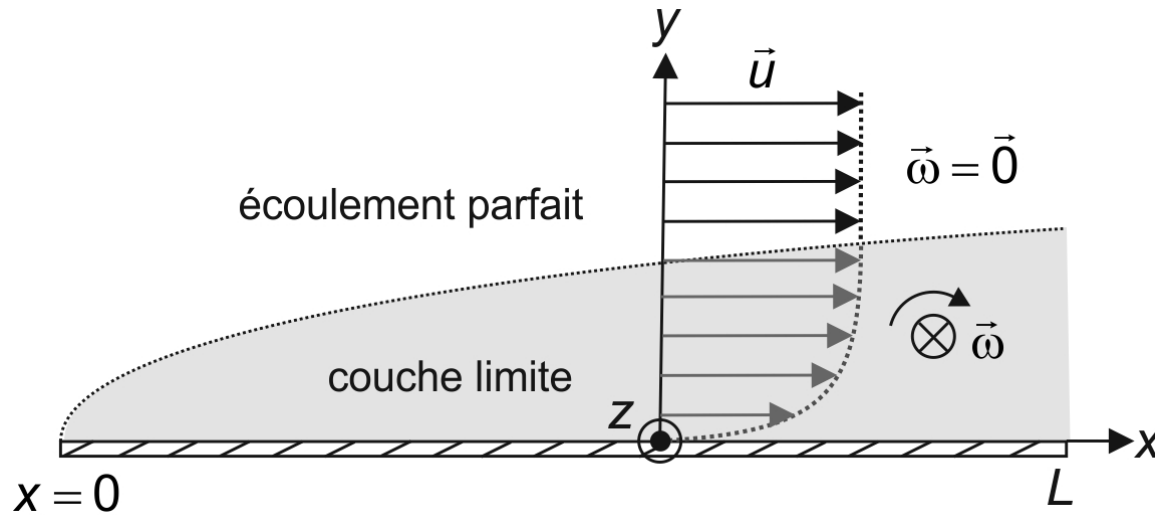
$$L = 1 \text{ m} \quad u = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow Re \simeq 10^6 \text{ et } \delta(L) \simeq 1 \text{ mm}$$

dans les situations courantes ($Re \gg 1$) d'écoulements externes, δ est très faible : le fluide est parfait « presque partout » MAIS la couche limite joue un rôle fondamental et doit être prise en compte :

— pour les conditions aux limites qui sont celles d'un fluide réel (adhérence à la paroi), pas celles d'un fluide parfait qui glisserait sur la paroi

— pour les forces tangentielles sur l'obstacle ne sont pas nulles à cause de la viscosité dans la couche limite, alors qu'elles le seraient si le fluide était parfait partout

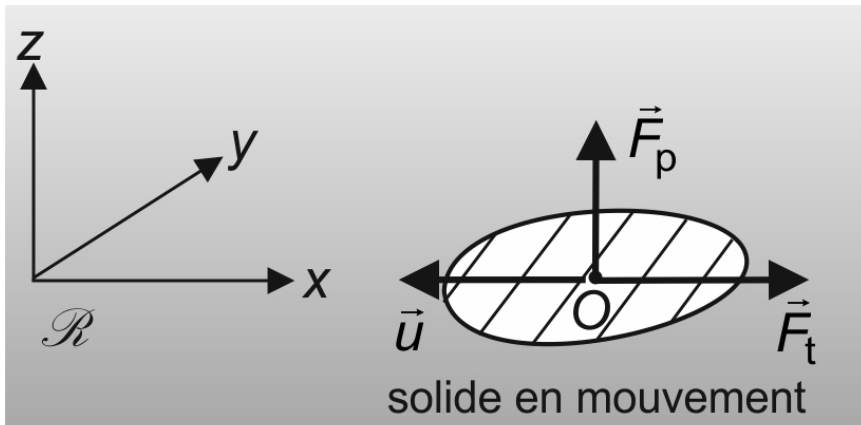
remarque :



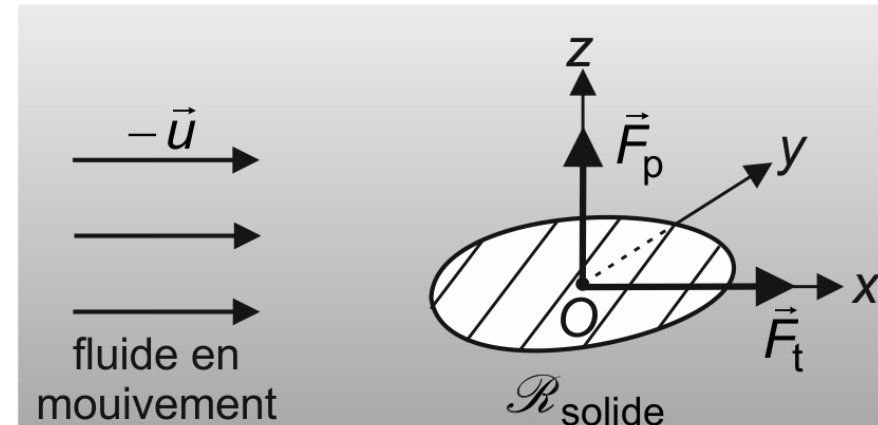
dans la couche limite, l'écoulement est *cisaillé* : fort gradient de vitesse orthogonalement à l'écoulement ; l'écoulement y est tourbillonnaire

dans la zone où l'écoulement est parfait, ce gradient est très faible et l'écoulement est quasiment irrotationnel

3.2 Traînée / Portance



solide en translation rectiligne uniforme avec \vec{u} dans un fluide initialement au repos dans le référentiel d'étude \mathcal{R} (où l'écoulement est instationnaire)



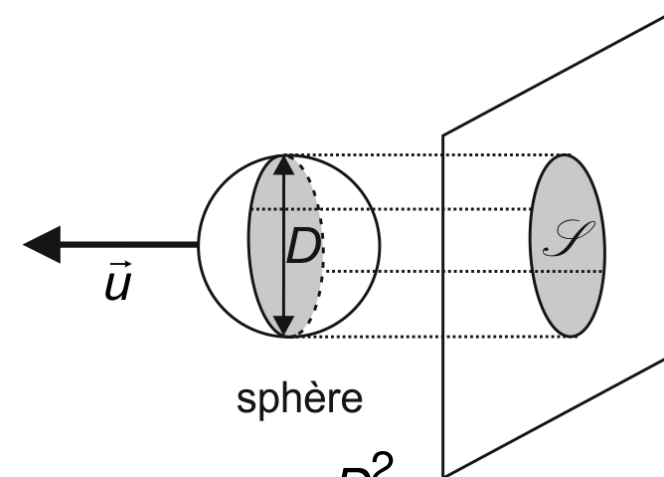
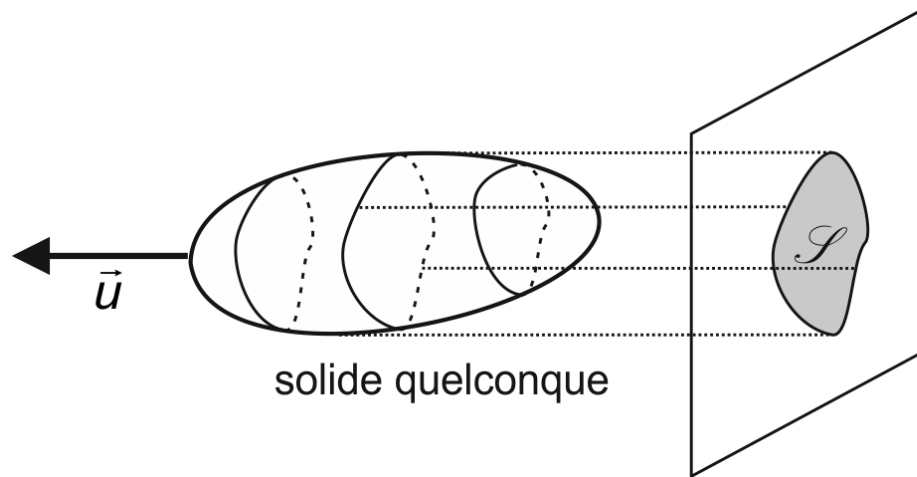
dans le référentiel $\mathcal{R}_{\text{solide}}$, le fluide est en mouvement rectiligne uniforme avec la vitesse $-\vec{u}$ loin du solide, et l'écoulement est stationnaire

mêmes forces sur le solide (dues au mouvement relatif / fluide) :

force de traînée ("traînée") \vec{F}_t qui s'oppose à \vec{u}

force de portance ("portance") $\vec{F}_p \perp \vec{u}$

l'expérience montre que ces forces font intervenir la surface obtenue en projetant le solide sur un plan orthogonal à la vitesse, surface appelée *maître-couple* \mathcal{S}



$$\mathcal{S} = \frac{\pi D^2}{4}$$

on raisonne sur la sphère pour déterminer les nombres sans dimension intervenant dans l'étude de la traînée ou de la portance ;

on note $F = \|\vec{F}_t\|$ ou $\|\vec{F}_p\|$

(1) : F dépend de D , de u , de la masse volumique ρ du fluide, et de sa viscosité dynamique η

$$\Rightarrow f(F, D, u, \rho, \eta) = 0$$

(2) : on cherche à former des nombres sans dimension indépendants à partir de ces 5 grandeurs, de la forme $N^* = F^\alpha D^\beta u^\gamma \rho^\delta \eta^\lambda$

analyse dimensionnelle :

$$[F] = M \cdot L \cdot T^{-2} \quad [D] = L \quad [u] = L \cdot T^{-1} \quad [\rho] = M \cdot L^{-3} \quad [\eta] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$$

seules interviennent trois dimensions : masse M , longueur L et temps T

$$\Rightarrow N^* = M^{\alpha+\delta+\lambda} \cdot L^{\alpha+\beta+\gamma-3\delta-\lambda} \cdot T^{-2\alpha-\gamma-\lambda} \quad \underbrace{\quad}_{N^* \text{ sans dim.}} = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \delta + \lambda = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma - 3\delta - \lambda = 0 \\ -2\alpha - \gamma - \lambda = 0 \end{cases} : 3 \text{ équations pour 5 inconnues}$$

on peut donc fixer 2 coefficients, par exemple α et β , et résoudre le système

$$\Rightarrow \text{résolution} \begin{cases} \gamma = \beta \\ \delta = \alpha + \beta \\ \lambda = -2\alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow N^* = F^\alpha D^\beta u^\beta \rho^{\alpha+\beta} \eta^{-2\alpha-\beta}$$

$$\text{soit } N^* = \left(\frac{\rho F}{\eta^2} \right)^\alpha \cdot \left(\frac{\rho u D}{\eta} \right)^\beta = [n_1^*]^\alpha \cdot [n_2^*]^\beta$$

seulement 2 nombres sans dimension *indépendants* formés à partir de F , D , u , ρ et η
tous les nombres sans dimension qu'on peut former à partir de ces grandeurs sont de cette forme

(3) on fait le choix de ces nombres :

$$\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow Re = \frac{\rho u D}{\eta} \text{ nombre de Reynolds}$$

$$\alpha = 1, \beta = -2 \Rightarrow \frac{F}{\rho u^2 D^2} \text{ indépendant de } \eta$$

$$\text{on l'écrit par convention } C = \frac{2F}{\rho u^2 \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{2F}{\rho u^2 \mathcal{S}}$$

$$\begin{cases} C_x = \frac{2 \|\vec{F}_t\|}{\rho u^2 \mathcal{S}} \text{ pour la traînée} \\ C_z = \frac{2 \|\vec{F}_p\|}{\rho u^2 \mathcal{S}} \text{ pour la portance} \end{cases}$$

pour un solide *quelconque*, on écrit :

$$\|\vec{F}_t\| = \frac{1}{2} \rho \mathcal{S} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coefficient de traînée}}}{C_x} u^2 \quad \text{et} \quad \|\vec{F}_p\| = \frac{1}{2} \rho \mathcal{S} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coefficient de portance}}}{C_z} u^2 \quad \text{où } \mathcal{S} \text{ est le maître-couple}$$

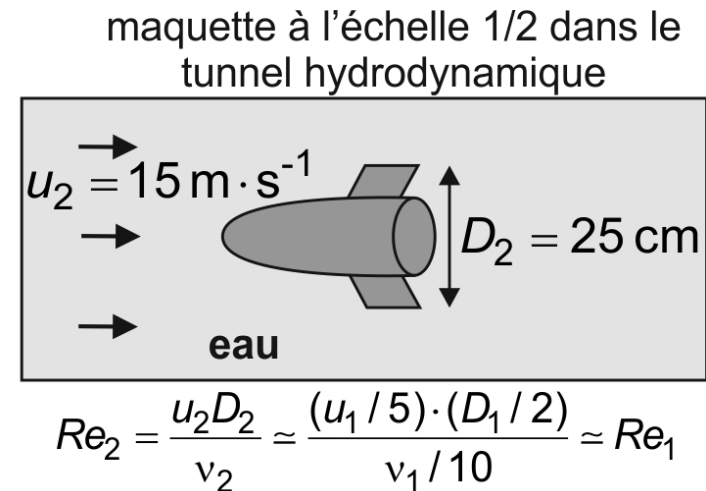
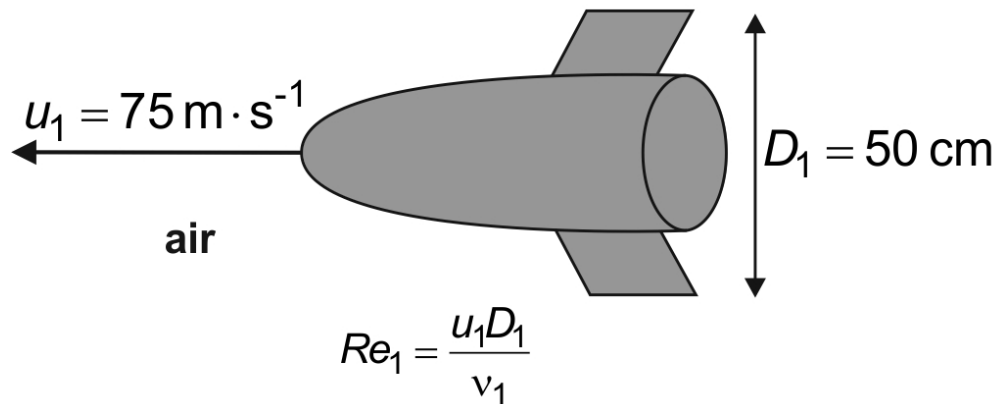
$$\vec{F}_t = -\frac{1}{2} \rho \mathcal{S} C_x u \vec{u} \text{ s'oppose à } \vec{u}$$

C_x et C_z dépendent du *profil* du solide : à ρ , \mathcal{S} et u fixés, plus ils sont faibles, plus la traînée et la portance sont faibles

(4) comme F , D , u , ρ et η ne sont pas indépendantes, les nombres sans dimension Re et C (C_x ou C_z) sont liés par une relation du type $g(C, Re) = 0$

pour une même géométrie, C_x et C_z ne dépendent *que* du nombre de Reynolds Re

application : étude en tunnel hydrodynamique d'une maquette à échelle réduite :
on obtient le même Re et donc on mesure le même C_x avec une vitesse plus faible



3.3 Écoulement autour d'une sphère de rayon R

études expérimentales avec des diamètres, des vitesses d'écoulement, et des fluides différents $\Rightarrow Re$ varie de 0,1 à 10^6

effets visqueux sont sous-estimés par l'analyse en ordres de grandeur car :

>>> les phénomènes diffusifs dominent dès que $Re < 1$ (et pas $Re \ll 1$)

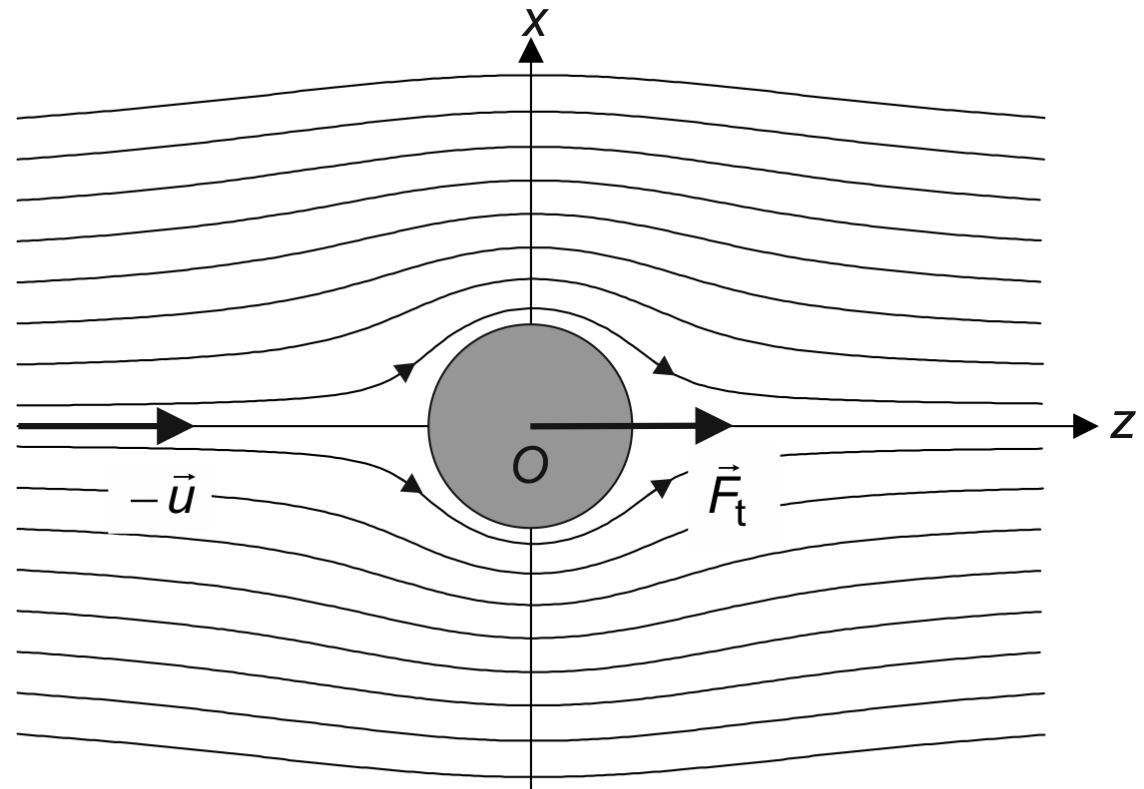
>>> l'épaisseur de la couche visqueuse autour de la sphère devient $\ll R$ (on peut alors parler de couche limite) si $Re >$ quelques milliers

domaine A : $Re < 1$ écoulement de Stokes

>>> écoulement *laminaire* (les différentes lames de fluide s'écoulent sans se mélanger)

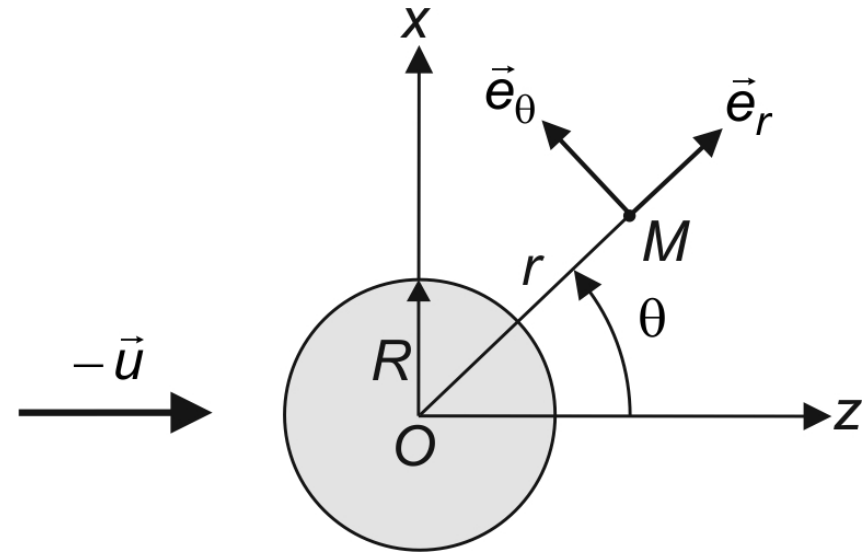
>>> écoulement *stable* (une perturbation ne provoque pas de changement durable), et *stationnaire*

>>> écoulement *prédictible*, on sait calculer le champ de vitesse et de pression en coordonnées sphériques



(A) écoulement de Stokes autour d'une sphère

$$\begin{cases} v_r = u \cos \theta \left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right] \\ v_\theta = -u \sin \theta \left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right] \\ v_\varphi = 0 \end{cases}$$



symétrie de révolution autour de Oz

les C.A.L $\begin{cases} \vec{v}(r=R, \theta) = \vec{0} \\ \vec{v}(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\vec{u} = u\vec{e}_z \end{cases}$ sont bien vérifiées

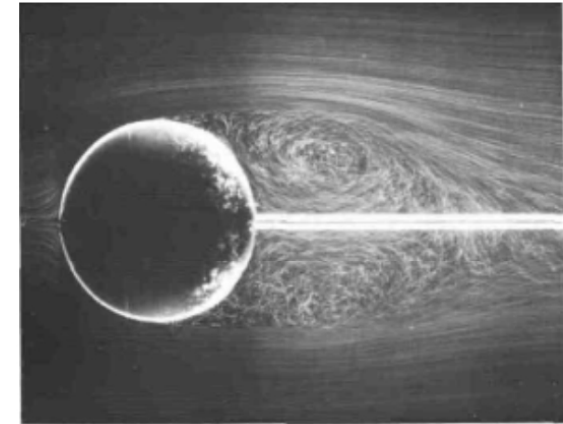
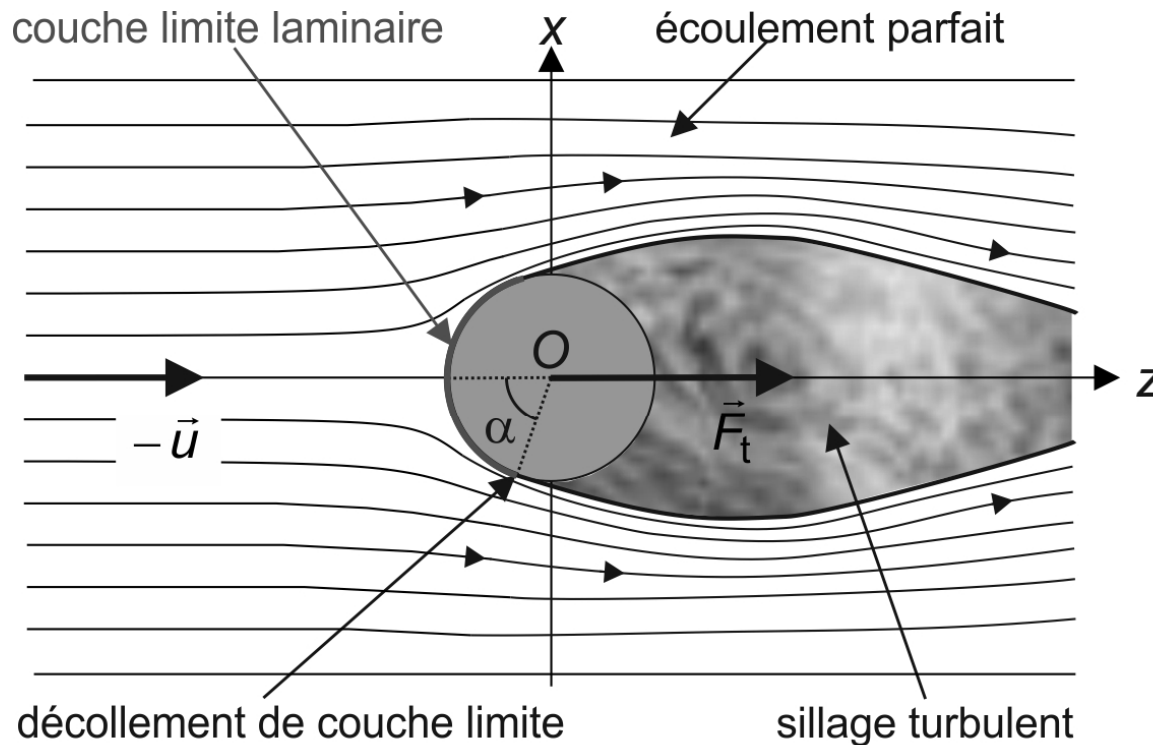
$$p(r, \theta) = p_0 - \frac{3u\eta R}{2r^2} \cos \theta \text{ en prenant } p \xrightarrow{r \rightarrow \infty} p_0$$

$\Rightarrow p$ diminue de $\theta = \pi$ (amont) à $\theta = 0$ (aval) : pertes de charge

on calcule avec ces champs la traînée (force de Stokes) $\vec{F}_t = -6\pi R\eta \vec{u}$

linéaire en vitesse

domaine B : $Re > 2000$ écoulement turbulent dans le sillage



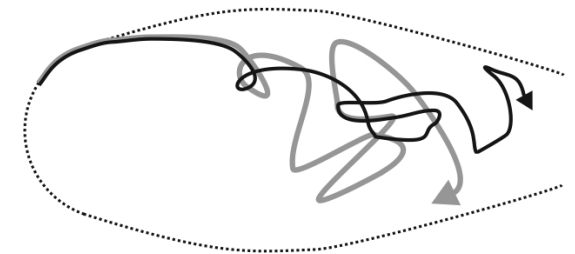
$Re = 15\,000$

(B) Écoulement turbulent autour d'une sphère.

dans le sillage :

>>> écoulement *instable* et *instationnaire* : grandes fluctuations spatiales et temporelles de $\vec{v}(M, t)$

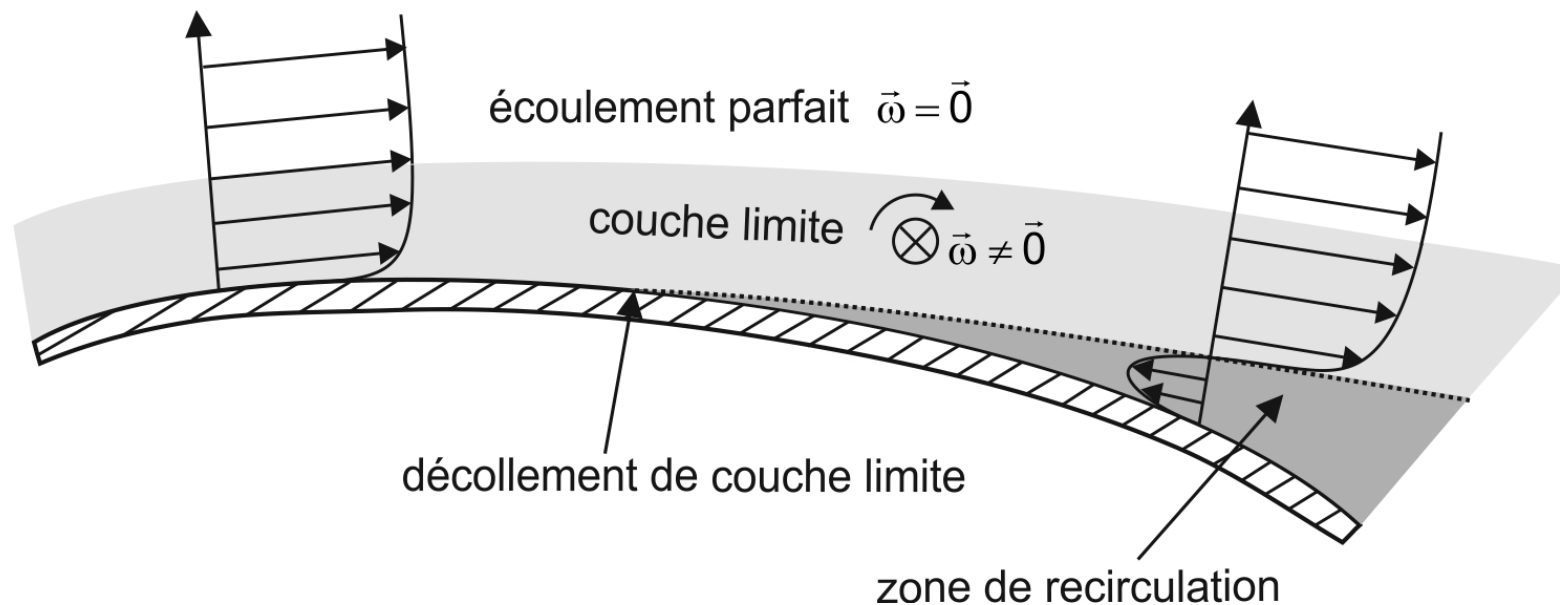
>>> écoulement *imprédictible* : grande *sensibilité* aux *conditions initiales*



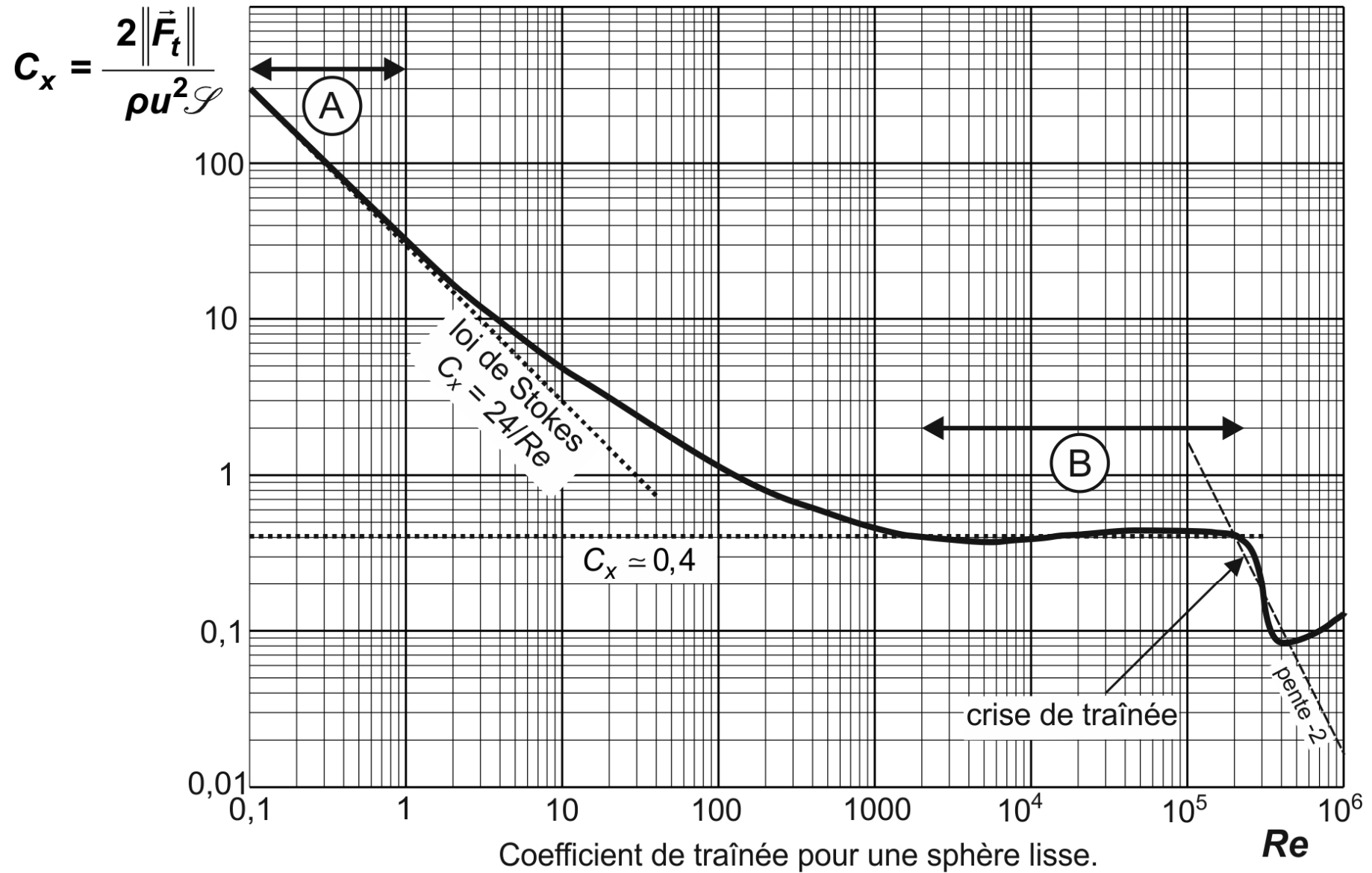
$$C_x \approx 0,4 \text{ pour } 2000 < Re < 200\,000 \Rightarrow \|\vec{F}_t\| = \frac{1}{2} \rho \mathcal{S} C_x u^2 \propto u^2$$

quadratique en vitesse

la couche limite *décolle* pour un angle α à partir duquel apparaît une *zone de recirculation* où le champ de vitesse change de sens



courbe $C_x = f(Re)$ en échelle log-log

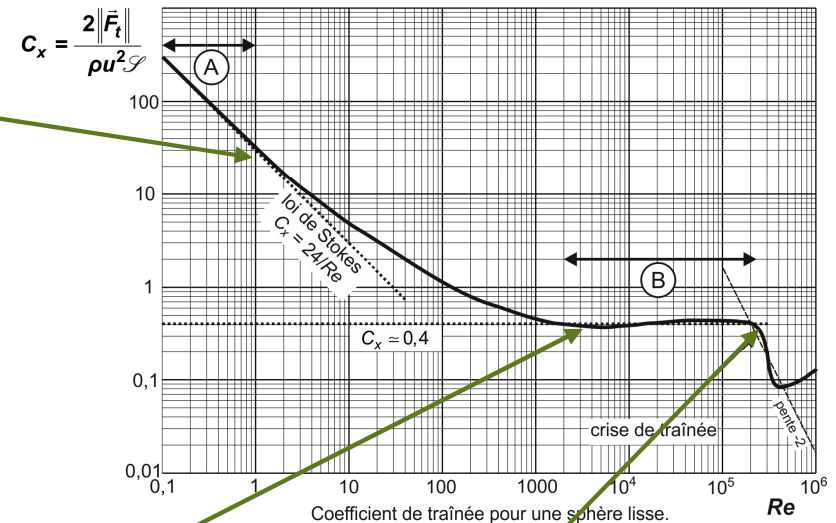


domaine A ($Re < 1$): $\|\vec{F}_t\| = 6\pi R\eta u$

avec $Re = \frac{2\rho u R}{\eta} \Rightarrow \eta = \frac{2\rho u R}{Re}$

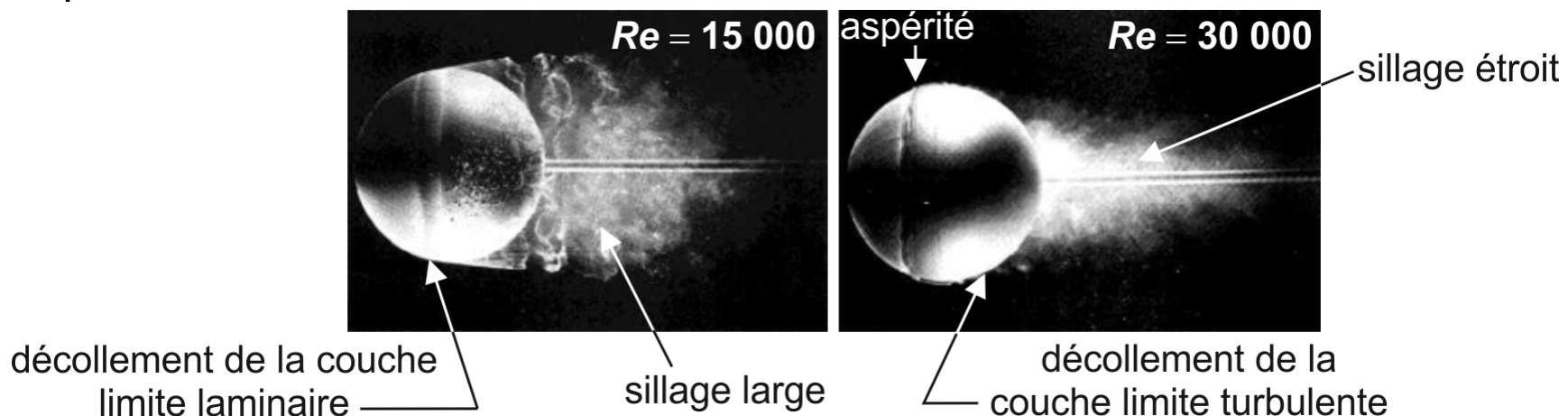
d'où : $\|\vec{F}_t\| = \frac{1}{2}\rho \underbrace{\pi R^2}_{\mathcal{S}} \frac{24}{Re} u^2 \Rightarrow C_x = \frac{24}{Re}$

$\log C_x = Cte - \log Re$: droite de pente -1



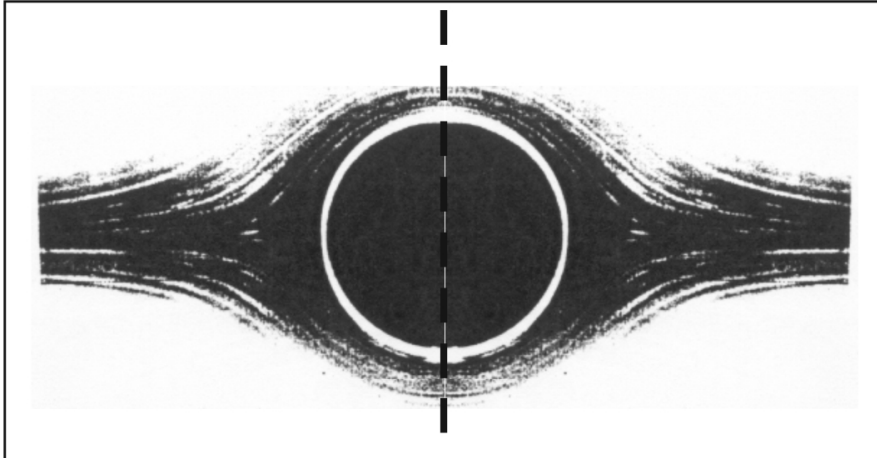
domaine B ($2000 < Re < 2 \cdot 10^5$): $C_x \approx 0,4$

crise de traînée car la couche limite qui passe de laminaire à turbulente ; elle décolle plus en aval et le sillage est réduit \Rightarrow la traînée diminue
cette transition peut être obtenue à des Re plus faibles en introduisant des aspérités sur la sphère



3.4 Écoulement autour d'autres corps

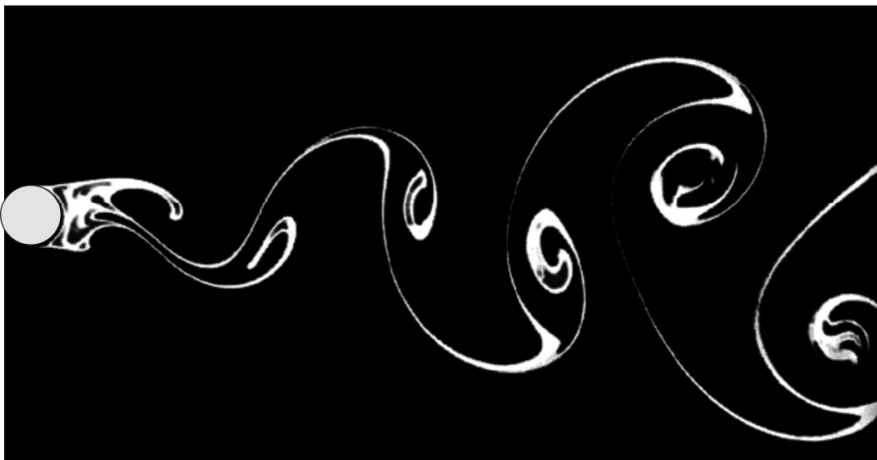
cylindre :



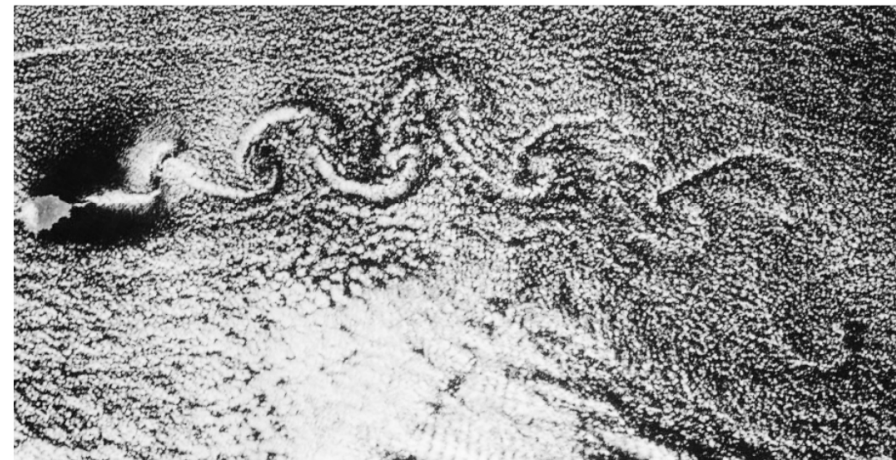
$Re = 0,16$. Antisymétrie de l'écoulement par rapport au plan indiqué (réversibilité de l'écoulement pour $Re \ll 1$).



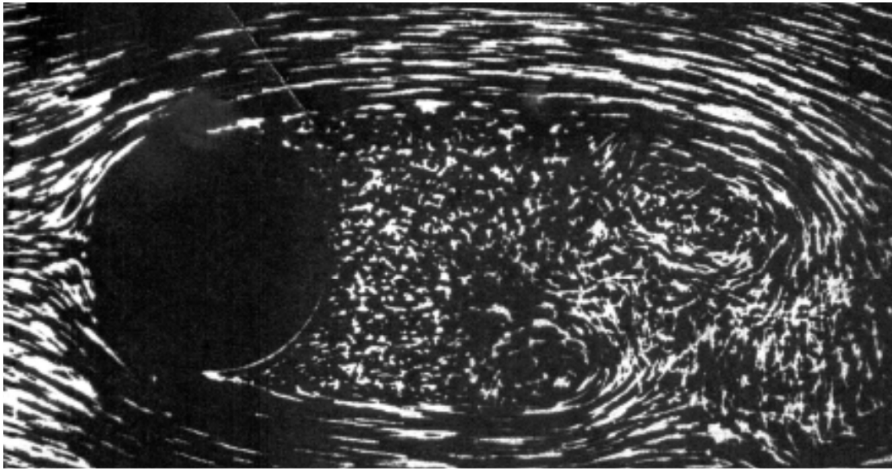
$Re = 26$. Perte de symétrie, apparition d'une zone de recirculation. L'écoulement est encore stationnaire.



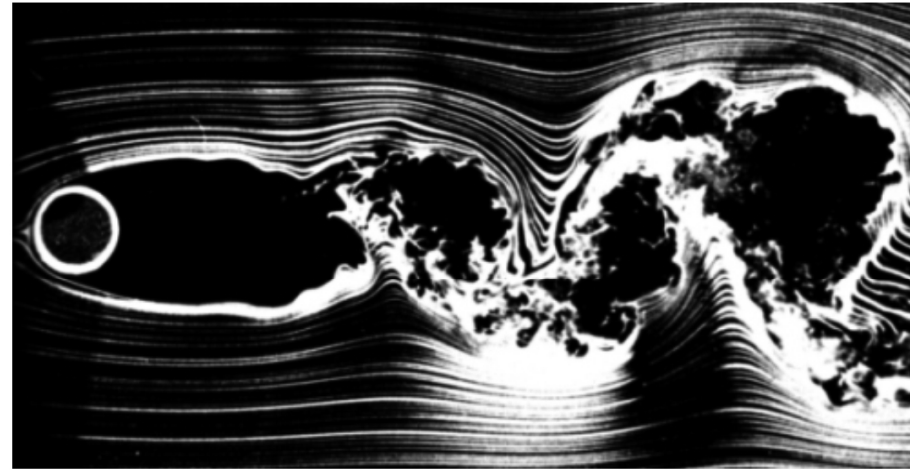
$Re = 105$. L'écoulement devient instationnaire. Des tourbillons se détachent périodiquement du cylindre et migrent dans le sillage : rouleaux de Karman alternés.



De tels rouleaux s'observent dans l'atmosphère nuageuse quand le vent est perturbé par un île.



$Re = 2000$. L'écoulement devient instable. Dans le sillage, les fluctuations spatiales et temporelles sont importantes.




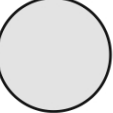
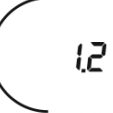




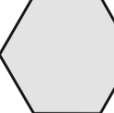

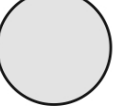
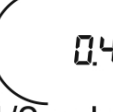
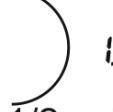




$Re = 10\,000$. L'écoulement dans le sillage est nettement turbulent, très irrégulier dans le temps et dans l'espace.

autres corps :

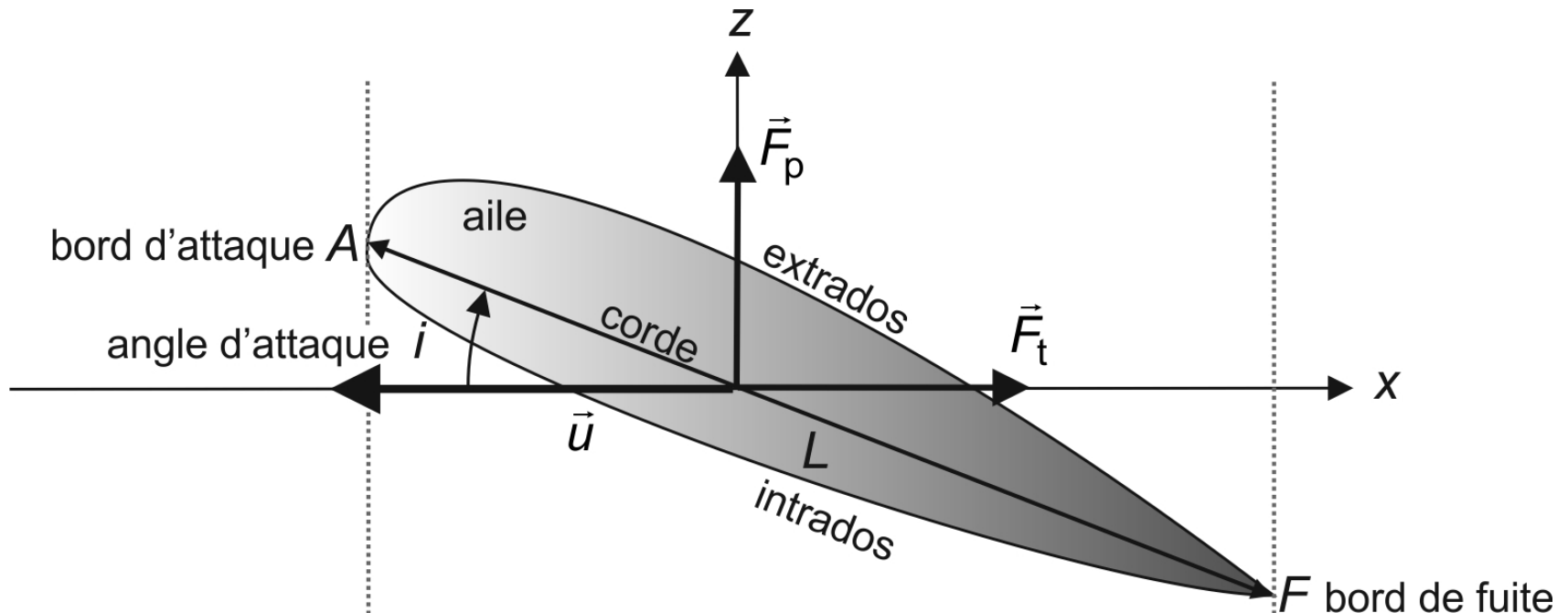
La plupart des véhicules, édifices, etc. ne sont pas profilés : ils présentent des arêtes vives qui provoquent le décollement de la couche limite

⇒ pas de crise de traînée

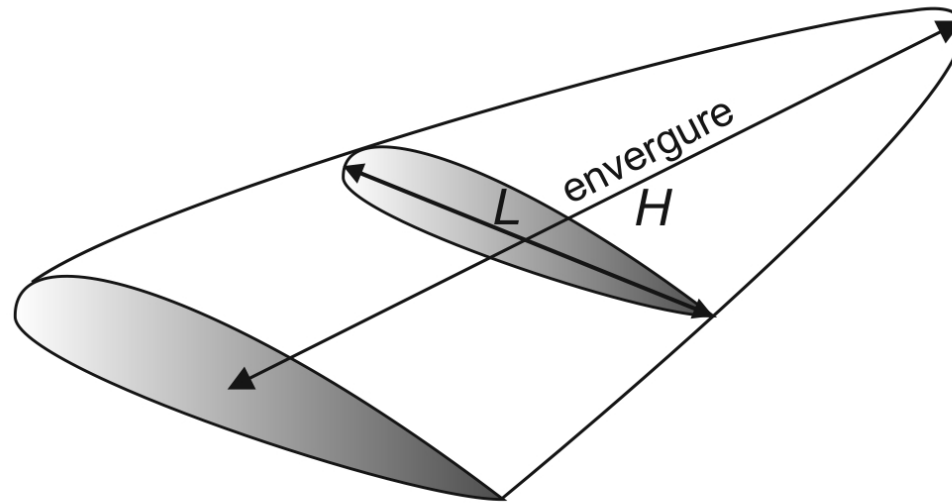
on retrouve pour ces corps un grand domaine $Re > 2000$ où $C_x \approx Cte$

2D	\vec{u}	 2.0 plaque	 1.1 cylindre	 1.2 1/2 cylindre creux	 2.3 1/2 cylindre creux	 2.1 cylindre	 1.6 cylindre	 1.2 1/2 cylindre plein	 0.7 cylindre
3D	\vec{u}	 1.2 plaque carrée ou disque	 0.4 sphère	 0.4 1/2 sphère creuse	 1.4 1/2 sphère creuse	 1.1 cube	 0.8 cube	 0.45 1/2 sphère pleine	 0.25-0.5 voiture standard

3.5 Écoulement autour d'une aile d'avion / portance



Rapport de forme : rapport entre la longueur H (envergure) de l'aile et la longueur moyenne de la corde.



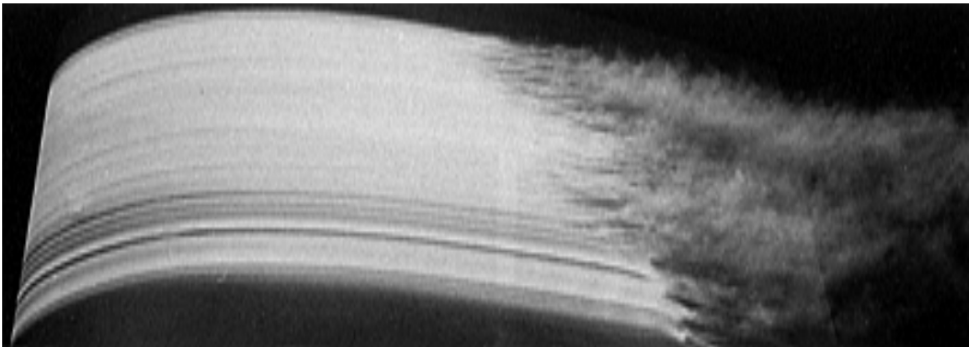
la corde diminue lorsqu'on se rapproche du bout de l'aile : la longueur moyenne L de la corde est définie par $\mathcal{S} = H \cdot L$

\mathcal{S} est la *surface alaire* (surface de l'aile vue de dessus) et H l'*envergure* de l'aile (distance entre le fuselage et le bout de l'aile) ; c'est elle qui est utilisée pour définir les coefficients de traînée et de portance (pas le maître couple qui varie avec l'incidence)

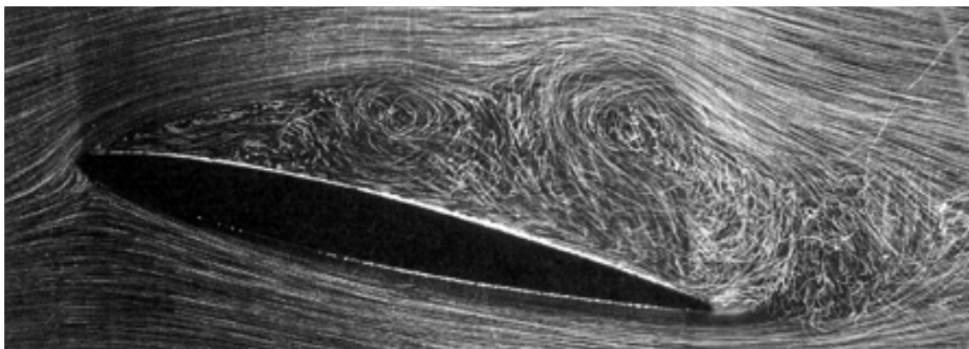
l'aile d'avion est bien mieux profilée que le cylindre : lorsqu'elle est peu inclinée, la couche limite ne décolle que très près du bord de fuite : faible traînée

lorsque l'incidence augmente (pendant les phases de décollage et d'atterrissage), la traînée augmente, ainsi que la portance

pour une incidence critique (de 16° à 20°), la couche limite décolle près du bord d'attaque \Rightarrow chute importante de la portance : *décrochage*.



À faible incidence, pas de décollement de couche limite.



Pour une incidence trop grande, il y a décrochage.

