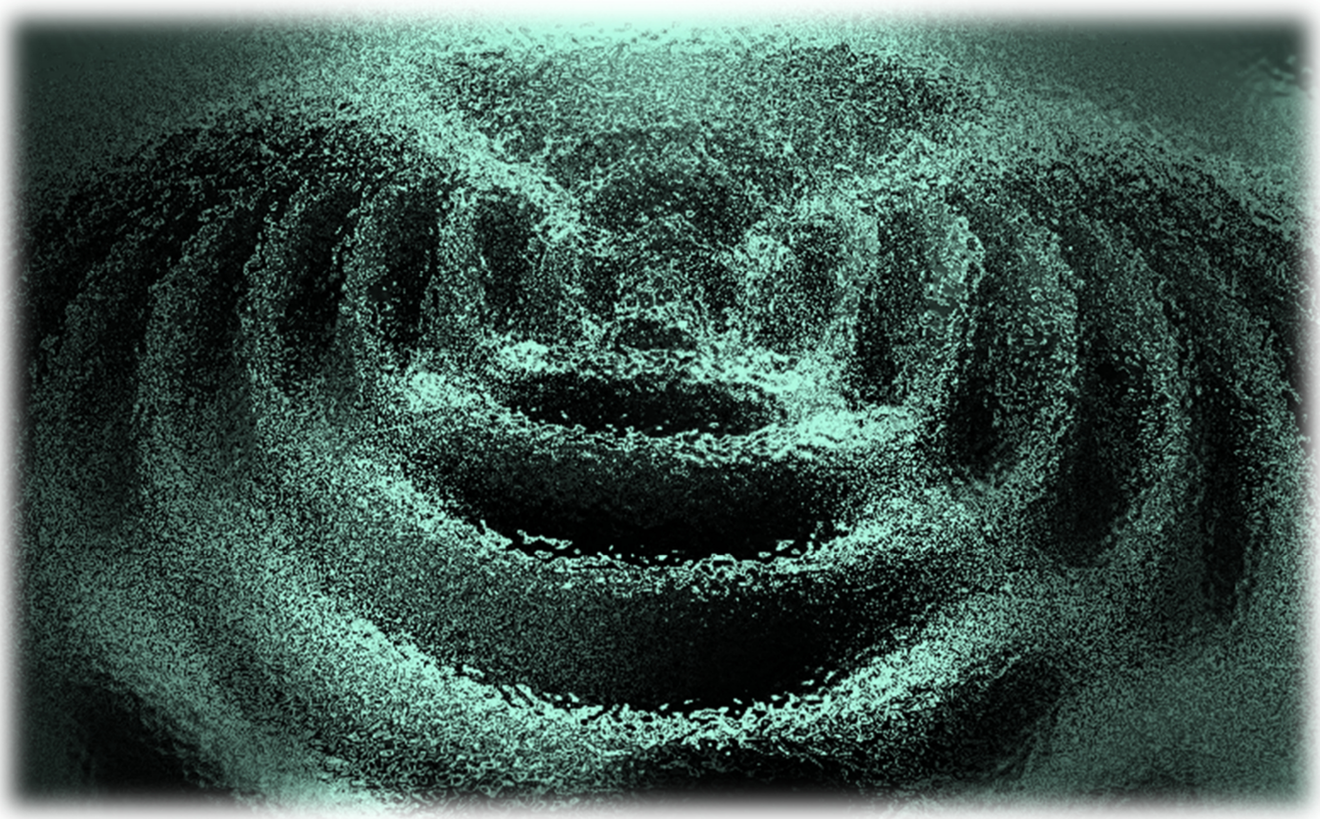
PSI B.X MONTAIGNE

RECUEIL DE TD

PHYSIQUE DES ONDES

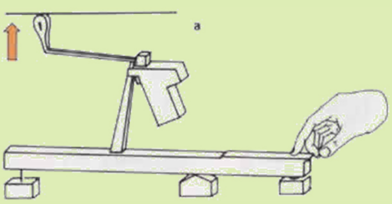


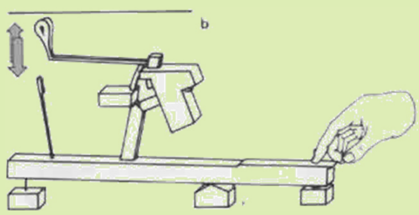
PHÉNOMÈNES ONDULATOIRES NON DISPERSIFS

1. Corde de piano

On considère une corde sans raideur, de masse linéique μ, de longueur L, tendue avec une tension T_0 très supérieure à son poids. La corde au repos est située entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$ d'un axe horizontal Ox ; elle est fixée aux deux extrémités. On note $\psi(x,t)$ le déplacement vertical de la corde et $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$ la célérité des ondes se propageant le long de la corde.

La corde est frappée à $t = 0$ par un petit marteau de largeur $e << L$ entre les abscisses a et $a + e$, avec $e << a$, ce qui communique aux points de la corde en contact avec le marteau une vitesse u transversale à partir de la position d'équilibre, et une vitesse nulle pour les autres points.
Sur les schémas ci-contre sont représentés :
— à gauche un système sans échappement : le marteau reste en contact avec la corde tant que l'on appuie sur la touche ;
— à droite un système avec échappement : le marteau revient dans sa position initiale juste après le contact.





1) Montrer que la solution de l'équation de d'Alembert pour une corde fixée à ses deux extrémités prend la forme générale :

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

2) Déterminer les coefficients a_n et b_n en utilisant les conditions initiales. Écrire une programme Python permettant de faire une animation représentant les oscillations de la corde sur une période.

3) Dans le modèle de corde vibrante utilisé ici, aucun son ne serait audible. Pourquoi ?
En réalité, les vibrations s'amortissent et la puissance rayonnée est proportionnelle à l'énergie moyenne de la corde. Montrer que cette énergie cinétique moyenne vaut pour le mode n : $\left\langle E_{c,n} \right\rangle \simeq \dfrac{2\mu u^2 L}{n^2\pi^2}\sin^2\left[\dfrac{n\pi e}{2L}\right]\sin^2\left[\dfrac{n\pi a}{L}\right]$.

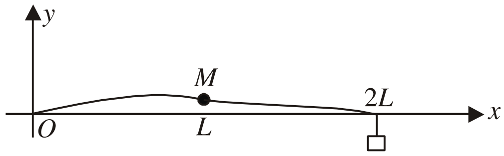
On donne l'énergie potentielle linéique de la corde $e_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2}T_0\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2$, montrer que $\left\langle E_{\mathrm{p},n}\right\rangle = \left\langle E_{\mathrm{c},n}\right\rangle$. Commenter.

4) La corde de piano est frappée au 7ième de sa longueur : $a = \dfrac{L}{7}$. On a $e << a$ et on ne s'intéresse qu'aux premiers harmoniques pour lesquels $\dfrac{n\pi e}{2L} << 1$. Simplifier l'expression de l'énergie moyenne de la corde $\left\langle E_n \right\rangle$ et tracer le spectre de l'énergie rayonnée. Montrer que le choix $a = \dfrac{L}{7}$ permet d'éliminer l'harmonique de rang 7 (cette harmonique est dissonante car elle n'appartient pas à la gamme dite « tempérée »).

réponses : 2) $a_n = 0$; $b_n = \dfrac{4uL}{n^2\pi^2 c}\sin\left[\dfrac{n\pi e}{2L}\right]\sin\left[\dfrac{n\pi a}{L}\right]$ 4) $E_n \simeq \dfrac{\mu u^2 e^2}{L}\sin^2\left[\dfrac{n\pi}{7}\right]$ s'annule pour $n = 7$

2. Corde lestée

On considère une corde homogène fixée à ses deux extrémités, sans raideur, de longueur d'équilibre $2L$, de masse linéique μ et de tension T_0, lestée en son milieu par une masse ponctuelle M. On note $m = 2\mu L$ la masse de la corde.



1) Déterminer les équations différentielles régissant les déplacement $y_1(x \leq L, t)$ et $y_2(x \geq L, t)$. Justifier rapidement la recherche de solutions sous la forme $y_1(x,t) = Y_1 \sin(kx)\cos(\omega t)$ et $y_2(x,t) = Y_2 \sin[k(2L - x)]\cos(\omega t + \varphi)$. Exprimer k en fonction de ω et de la célérité c des ondes se propageant sur la corde.
2) Écrire les deux conditions aux limites résultant de la présence de la masse M au milieu de la corde.
3) On étudie les modes propres de vibration.
— On pose $X = \dfrac{\omega L}{c}$. Montrer qu'il existe des modes symétriques dont les pulsations sont solutions de $\tan(X) = \dfrac{m}{M}\dfrac{1}{X}$. Donner une approximation de ces pulsations ω_n pour n grand à l'aide d'un graphique.
— Montrer qu'il existe des modes antisymétriques dont on donnera les pulsations ω_n'.
4) Dans le cas où $M = 2\mu L$, calculer la plus petite pulsation propre en fonction de $\dfrac{c}{L}$. Dessiner l'allure de la forme de la corde pour ce mode de vibration.

réponses : 2) écrire la continuité de la vibration en $x = L$ et le principe fondamental à la masse M 3) $\omega_n' = \dfrac{n\pi c}{L}$

3. Impédance mécanique d'une corde vibrante

On considère une corde sans raideur, de masse linéique μ, de très grande longueur, tendue avec une tension T_0 très supérieure à son poids. La corde est confondue au repos avec l'axe Ox. On note $\psi(x,t)$ le déplacement transversal de la corde, $v = \dfrac{\partial \psi}{\partial t}$ la vitesse transversale, T la composante transversale de la tension exercée en un point d'abscisse x par la partie gauche ($x' < x$) de la corde sur la partie droite ($x' > x$).

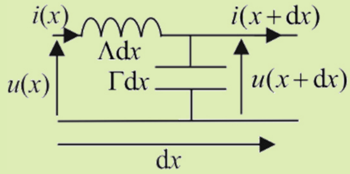
1) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'élément $[x, x + \mathrm{d}x]$ de corde, établir une relation (1) entre $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial T}{\partial x}$. Retrouver l'équation de d'Alembert pour v et T en exprimant d'abord la relation (2) entre $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ dans le cas des petites perturbations par rapport à la position d'équilibre. Exprimer la célérité c des ondes se propageant le long de la corde en fonction de μ et T_0.
2) Montrer que l'on a $T = Zv$ pour une onde progressive se déplaçant dans le sens des x croissants. Exprimer l'impédance Z en fonction de μ et T_0. Donner son unité.
3) Donner les coefficients de réflexion ρ et de transmission τ pour les vitesses dans le cas où deux cordes semi-infinies de masses linéiques différentes μ_1 et μ_2 sont attachées en $x = 0$. L'onde incidente se propage dans la corde de masse linéique μ_1.
On exprimera les résultats à l'aide des impédances Z_1 et Z_2 des deux cordes.

On s'intéresse maintenant à l'aspect énergétique des vibrations d'une corde.
4) Montrer en combinant (1) et (2) que l'on obtient un bilan énergétique de la forme $\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial e}{\partial t} = 0$. Identifier p et e et en déduire que l'énergie potentielle linéique de la corde est $e_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2}T_0\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 = \dfrac{T^2}{2T_0}$.
Interpréter physiquement la relation trouvée.
5) Donner les coefficients de réflexion R et de transmission T pour la puissance dans le cas du 3). Commenter.

réponses : 1) $\mu\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial T}{\partial x}$ (1) ; $\dfrac{\partial T}{\partial t} = -T_0\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (2) ; $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$ 2) $Z = \sqrt{\mu T_0}$ 3) $\rho = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$; $\tau = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$ 4) $p = Tv$ puissance transmise de la gauche vers la droite

4. Réflexion en bout de ligne coaxiale

On considère une ligne coaxiale sans perte dont un élément de longueur dx est modélisé comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



1) Établir les deux équations couplant i et u. Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ obéissent à l'équation de d'Alembert et calculer la célérité c correspondante.

2) Dans le cas d'une onde plane progressive se propageant dans le sens des x croissants, montrer que le rapport $\dfrac{u(x,t)}{i(x,t)}$ est une constante Z_c ne dépendant que des caractéristiques de la ligne.

Calculer le même rapport dans le cas d'une onde plane progressive se propageant dans le sens des x décroissants.

3) Que vaut la densité linéique d'énergie e accumulée à la date t dans l'élément $[x, x+\mathrm{d}x]$ de câble ?

En combinant les équations qui couplent i et u, montrer que l'on obtient un bilan de puissance de la forme $\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial e}{\partial t}=0$. Identifier p et e et interpréter physiquement la relation trouvée.

4) On étudie une onde plane progressive se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants. Montrer que la puissance transférée en x dans le sens des x croissants vaut $P = Z_c i^2$ et que $e = \Lambda i^2$. Montrer que l'énergie se déplace également à la célérité c.

5) Un générateur placé en entrée de la ligne délivre une tension sinusoïdale de pulsation ω. On se place en régime forcé et on utilise la notation complexe. La ligne est fermée en $x = 0$ avec un dipôle d'impédance Z.

Calculer les coefficients de réflexion en amplitude ρ_i pour les courants et ρ_u pour les tensions, en fonction de Z et Z_c. Quelle doit être la valeur de Z pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie ?

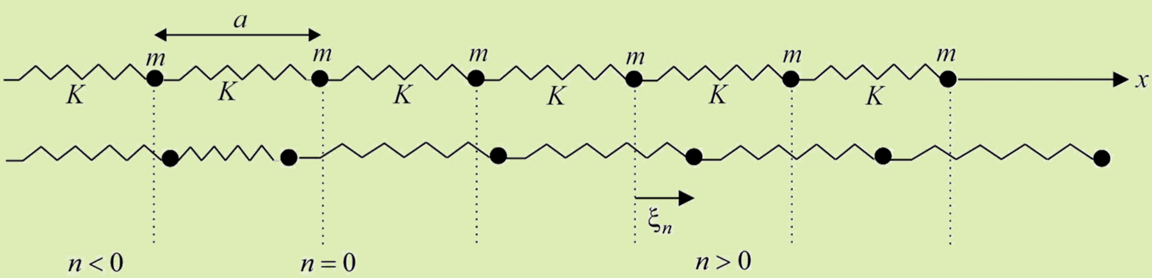
6) Calculer le coefficient de réflexion énergétique R, rapport de la puissance moyenne réfléchie sur la puissance moyenne incidente, en valeur absolue. Discuter la valeur de R selon le type de dipôle placé en sortie.

7) On court-circuite la ligne en $x = 0$. Une onde plane progressive sinusoïdale est émise en $x = -\infty$. Calculer $\underline{u}(x,t)$ et $\underline{i}(x,t)$ en tout point de la ligne. De quelle nature est l'onde obtenue ?

réponses : 3) $e = \frac{1}{2}\Lambda i^2 + \frac{1}{2}\Gamma u^2$ 2) $p = ui$ puissance transférée dans le sens des x croissants à cause des conventions 4) exprimer de deux façons l'énergie qui traverse le câble en x pendant dt 5) $\rho_i = \dfrac{Z_c - Z}{Z_c + Z} = -\rho_u$ 6) $R = |\rho_i|^2$ 7) ondes stationnaires $\underline{i}(x,t) = 2I_0 e^{j\omega t}\cos(kx)$; $\underline{u}(x,t) = -2Z_c I_0 e^{j\omega t}\sin(kx)$

5. Chaîne infinie d'atomes / célérité des ondes acoustiques dans un solide cristallin

On considère une chaîne infinie linéaire d'atomes ponctuels de masse m liés par des ressorts de raideur K. La chaîne est portée par l'axe Ox ; à l'équilibre, les atomes occupent les positions $x_n = na$ avec $n \in \mathbb{Z}$, où a est la longueur à vide des ressorts.

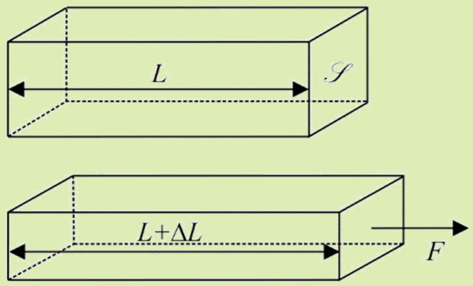


1) Établir les équations différentielles régissant la position ξ_n de l'atome n par rapport à sa position d'équilibre.

2) On se place dans l'approximation des milieux continus : $a \ll \lambda$ où λ est la longueur d'onde caractéristique du phénomène. On note alors $\xi_n = \xi(x_n, t)$: une masse d'abscisse x au repos se déplace de $\xi(x,t)$, avec $|\xi(x,t)| \ll a$, du fait de la perturbation, considérée comme un infiniment petit du premier ordre.

Montrer que $\xi(x,t)$ est régie par l'équation de d'Alembert à une dimension et calculer la célérité de l'onde en fonction de a, K et m.

La loi de Hooke donne dans le domaine des faibles déformation la contrainte normale à exercer sur un matériau homogène de longueur L et de section $\mathscr{S}$ pour l'étirer ou le comprimer de $\Delta L << L$: $\sigma = \dfrac{F}{\mathscr{S}} = E\dfrac{\Delta L}{L}$ où E est le module d'Young du matériau.



On donne pour l'acier la masse volumique $\rho = 7{,}85\cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et le module d'Young $E = 2{,}10\cdot 10^{11}\ \mathrm{Pa}$.

3) En reliant les paramètres macroscopiques de l'acier aux paramètres microscopiques, exprimer la célérité c des ondes acoustiques dans l'acier en fonction de ρ et E et faire l'application numérique.

réponses : 2) $c = a\sqrt{\dfrac{K}{m}}$ 3) $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}} \simeq 5\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$

6. Modes propres d'un ressort vertical

On considère un ressort vertical à spires non jointives, de longueur à vide L, de masse linéique μ, de raideur K dont une extrémité est fixée en O et dont l'extrémité mobile est attachée à une masse m mobile sans frottement le long de l'axe Ox vertical descendant.

À la date t la position d'une spire qui se trouverait à l'abscisse x en l'absence de pesanteur (ou bien si le ressort était horizontal) et au repos est repérée par l'abscisse $x + \xi(x,t)$.

Les calculs sont menés à l'ordre 1 en $\xi(x,t)$. La force exercée à l'abscisse x par la partie $x' > x$ du ressort sur la partie $x' < x$ est donnée par la loi de Hooke $\vec{F} = KL\dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)\vec{e}_x$.

1) Calculer $\xi_{\text{éq}}(x)$ à l'équilibre en introduisant la masse $m_0 = \mu L$ du ressort. Commenter le cas d'un ressort de masse nulle : quelle force exerce-t-il sur la masse m ?

2) Montrer que $\psi(x,t) = \xi(x,t) - \xi_{\text{éq}}(x)$ est solution d'une équation de d'Alembert. Déterminer la célérité c intervenant dans cette équation.

3) Donner l'équation permettant de calculer les pulsations des modes propres de vibration du ressort. On pose $X = \dfrac{\omega L}{c}$. Discuter graphiquement du nombre de solutions et des intervalles dans lesquels elles se situent.

Commenter les cas $m >> m_0$ et $m << m_0$.

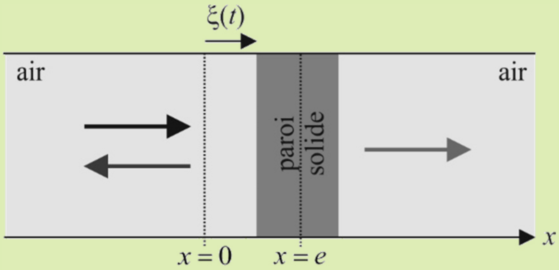
réponses : 1) $\xi_{\text{éq}}(x) = \dfrac{m_0 g}{2KL^2}x\left[2L\left(1+\dfrac{m}{m_0}\right) - x\right]$ 2) d'Alembert avec $c = L\sqrt{\dfrac{K}{m_0}}$ 3) $\tan\left(\dfrac{\omega L}{c}\right) = \dfrac{m_0}{m}\dfrac{c}{\omega L}$

ONDES ACOUSTIQUES DANS UN FLUIDE

• *Ondes acoustiques planes*

1. Isolation phonique

Un mur est modélisé par une membrane de masse volumique ρ et d'épaisseur e en translation au voisinage de $x = 0$ dans un tuyau sonore de section $\mathscr{S}$ rempli d'air à la température de 20°C, de masse volumique $\rho_0 = 1{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.



On cherche à déterminer les ondes transmise et réfléchie en $x = 0$ pour une onde de vitesse incidente :
$\underline{v}_\mathrm{i} = v_0 e^{j(\omega t - kx)}$ pour $x < 0$.

1) La position de la paroi à la date *t* est repérée par l'abscisse $\xi(t)$. On considère pour les conditions aux limites que la membrane se trouve constamment en $x = 0$. À quelles conditions cette approximation est-elle valable ?

2) Écrire les conditions aux limites en $x = 0$.

3) Donner la forme des ondes de pression et de vitesse du côté (1) : $x < 0$ et du côté (2) : $x > 0$.

4) En déduire le coefficient complexe de transmission en vitesse $\tau(j\omega)$, puis celui en puissance $T(\omega)$. Commenter le type de filtre obtenu au vu de la fonction de transfert $\tau(j\omega)$. Donner l'expression de sa fréquence de coupure.

5) Pour $\rho = 1800\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, quelle est l'épaisseur du mur permettant une atténuation de 40 dB à 400 Hz ?
Quels instruments d'un groupe de rock entend-on le mieux à travers un mur ?

réponses : 4) $f_\mathrm{c} = \dfrac{\rho_0 c}{\pi \rho e}$ 5) $e \geq 1{,}8\,\mathrm{cm}$

2. Réflexion et transmission dues à un changement de section

On considère la propagation d'ondes sonores planes dans un tube cylindrique d'axe *Ox* rempli d'un gaz. On se place dans l'approximation acoustique : on pose pour les champs de pression, masse volumique, température et vitesse :
$p(x,t) = p_0 + p_1(x,t)$; $\vec{v}(x,t) = v_1(x,t)\vec{e}_x$, où les grandeurs indicées par 1 sont des infiniment petits du même ordre (perturbations acoustiques) et les grandeurs indicées par 0 sont les grandeurs dans le fluide au repos, supposées uniformes. On note *c* la célérité des ondes sonores dans le fluide ; ρ_0 la masse volumique du fluide au repos.

En $x = 0$, la section du cylindre passe de $\mathscr{S}_1$ à $\mathscr{S}_2$. On s'intéresse au cas où une onde plane progressive harmonique se propage pour $x < 0$ dans le sens des *x* croissants : la vitesse s'écrit alors pour $x < 0$: $\underline{\vec{v}}(x,t) = v_0 e^{i(\omega t - kx)}\vec{e}_x$.

1) À quelle condition un changement de section continu peut-il être modélisé comme dans cet exercice par un changement brutal en $x = 0$? Quelles sont alors les conditions aux limites que vérifient les champs en $x = 0$?

2) En déduire les coefficients de réflexion *r* et de transmission τ en vitesse des ondes en fonction de $\alpha = \dfrac{\mathscr{S}_2}{\mathscr{S}_1}$, puis ceux *R* et *T* en puissance. Faire un bilan énergétique et commenter. Tracer $R(\alpha)$ et $T(\alpha)$. Commenter le cas $\mathscr{S}_2 >> \mathscr{S}_1$.

réponses : 1) continuité de p_1 et de $\mathscr{S} v$ 2) $R(\alpha) = \left[\dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right]^2$; $T(\alpha) = \dfrac{4\alpha}{(\alpha + 1)^2}$

3. Couche sonore anti-reflet

On donne :

— les impédances caractéristiques des tissus musculaires et de l'air pour les ultrasons de fréquence 3 MHz :
$Z_m = 1{,}7\cdot10^6\ \mathrm{kg\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}}$ et $Z_a = 4{,}0\cdot10^2\ \mathrm{kg\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}}$;

— les coefficients de transmission et de réflexion acoustique en énergie du milieu 1 d'impédance Z_1 vers le milieu 2 d'impédance Z_2 : $T = \dfrac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}$ $R = \left(\dfrac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}\right)^2$

1) Calculer les coefficients de transmission et de réflexion acoustique en énergie à l'interface air-muscle et commenter.

On réalise pour supprimer l'onde réfléchie une couche anti-reflet en graisse, d'épaisseur *e* et d'impédance Z_g. On note c_a, c_g et c_m les célérités des ondes acoustiques dans ces trois milieux, et on pose $k_a = \dfrac{\omega}{c_a}$, $k_g = \dfrac{\omega}{c_g}$ et $k_m = \dfrac{\omega}{c_m}$. On cherche alors en notation complexe les champs de vitesse dans les trois milieux de la forme :

$\underline{v}_a = A_a e^{i(\omega t - k_a x)}$ pour $x \le 0$; $\underline{v}_g = A_g e^{i(\omega t - k_g x)} + B_g e^{i(\omega t + k_g x)}$ pour $0 \le x \le e$ et enfin $\underline{v}_m = A_m e^{i(\omega t - k_m x)}$ pour $x \ge e$.

2) Justifier les formes adoptées. Donner les formes correspondantes des surpressions dans les trois milieux.

3) Écrire les conditions aux limites et en déduire la relation $e^{2ik_g e} = \dfrac{(Z_a+Z_g)(Z_g-Z_m)}{(Z_g-Z_a)(Z_g+Z_m)}$.

4) En déduire les valeurs qu'il faut choisir pour *e* et Z_g. Analyser le résultat en termes d'interférences.

réponses : 1) $R = 0{,}9991$; $T = 9{,}4\cdot10^{-4}$ réflexion totale 4) $Z_g = \sqrt{Z_a Z_m}$ et $e = \dfrac{(2n+1)\pi}{2k_g} = (2n+1)\dfrac{\lambda_g}{4}$: interférences destructives entre les rayons réfléchis par la graisse et le muscle.

• *Ondes acoustiques sphériques*

4. Modes propres d'une cavité sphérique

Un fluide parfait est enfermé dans un récipient indéformable sphérique de centre *O* et de rayon *a*.
On cherche à étudier les modes propres d'oscillation à symétrie sphérique du fluide dans l'approximation acoustique.

1) Quelles sont les solutions de l'équation d'onde de d'Alembert $\Delta p_1 = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$ quand la surpression p_1 présente la symétrie sphérique ? Le champ de vitesses $\vec{v}(r,t)$ est-il de la même forme ?

2) Déterminer $\vec{v}(r,t)$ en utilisant une des relations qui le couple à p_1. Déterminer graphiquement les pulsations propres ω_n en utilisant les conditions aux limites.

réponses : 1) $\underline{p_1} \propto e^{i\omega t}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\omega r}{c}\right)}{r}$ 2) quantification de ω par $\tan\left(\dfrac{\omega a}{c}\right) = \dfrac{\omega a}{c}$

5. Impédance de rayonnement

On considère l'onde sonore émise par une petite sphère de centre *O* fixe placée dans l'air, et dont le rayon varie dans le temps selon la loi $R(t) = R_0 + R_1\cos(\omega t)$ avec $R_1 << R_0 << \lambda$, longueur d'onde du rayonnement. On note *c* la célérité des ondes acoustiques dans l'air dont la masse volumique est ρ_0 au repos. On utilise pour repérer un point un système de coordonnées sphériques de centre *O*.

1) Justifier la recherche de solutions de la forme $p_1(r,t) = \dfrac{f(t - r/c)}{r}$ pour la surpression dans l'air et de la forme $\vec{v} = v(r,t)\vec{e}_r$ pour la vitesse de l'air. Pourquoi $v(r,t)$ n'a-t-elle pas *a priori* la même forme que la surpression ? On prend par la suite pour la surpression $p_1(r,t) = \dfrac{A\cos(\omega t - kr - \varphi)}{r}$. Justifier cette expression.

2) Donner la forme que prend l'équation d'Euler dans l'approximation acoustique. En déduire $v(r,t)$. Déterminer *A* et φ en exploitant les conditions aux limites.

3) Simplifier $v(r,t)$ dans le cas $r >> \lambda$ (zone de rayonnement) ; quelle est alors la structure locale de l'onde ?

Calculer alors la puissance acoustique moyenne qui traverse une sphère de centre O et de rayon $r >> \lambda$. Commenter le résultat obtenu.

4) Calculer l'impédance $Z_{\text{ac,ray}} = \dfrac{\underline{p}_1}{\underline{v}}$ au niveau de la membrane. Comparer son module à celui Z_{ac} des O.P.P.

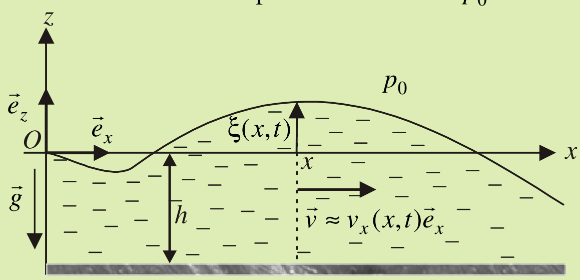
Justifier que pour une onde acoustique plane se propageant dans un tuyau cylindrique de rayon $R_0 << \lambda$, on ait un nœud de surpression à une extrémité ouverte sur l'atmosphère.

réponses : 2) $A = \rho_0 \omega^2 {R_0}^2 R_1$; $\varphi = \pi - kR_0$ 3) structure locale d'onde plane avec $p_1(r,t) = \rho_0 c v(r,t)$; $\langle P_{\text{ac}} \rangle = \dfrac{2\pi\rho_0 {R_0}^4 {R_1}^2}{c}\omega^4$ indépendant de r 4) $\dfrac{|\underline{Z}_{\text{ac,ray}}|}{Z_{\text{ac}}} = \dfrac{2i\pi R_0}{\lambda} << 1$

● *Ondes de gravitation dans un fluide incompressible (≠ondes acoustiques)*

6. Ondes de gravitation dans un fluide incompressible peu profond

Les ondes étudiées ici ne sont pas des ondes acoustiques (le fluide est supposé incompressible). Les techniques utilisées sont en revanches les mêmes : linéarisation des équations dans le cas de petites perturbations.
L'eau est considérée comme un fluide parfait, incompressible, de masse volumique ρ, soumis à l'accélération de la pesanteur g. À l'équilibre, l'eau est au repos sur un fond rigide, plan, horizontal, situé à la profondeur h en dessous de la surface libre d'équation $z = 0$. L'air au-dessus de la surface libre est à la pression uniforme p_0.



On étudie une onde plane (les tranches de fluide $[x, x+\mathrm{d}x]$ se déplacent en bloc avec $\vec{v} \simeq v_x(x,t)\vec{e}_x$) se propageant suivant Ox. Les écarts de position $\xi(x,t)$ entre la surface libre et le plan $z = 0$ sont supposés très petits devant les autres dimensions du phénomène étudié (profondeur h, longueur d'onde λ des oscillations).

1) Linéariser le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule fluide (on écrira $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \simeq \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ en donnant la condition sur v_x pour que cette approximation soit valable). Projeter cette équation sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$. Déterminer la pression $p(x,z)$ en utilisant les C.A.L ; en déduire $\dfrac{\partial v_x}{\partial t} = -g\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$.

2) Faire un bilan de masse entre t et $t + \mathrm{d}t$ à une tranche de fluide $[x, x+\mathrm{d}x]$ et montrer $\dfrac{\partial \xi}{\partial t} = -h\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$. Pourquoi n'a-t-on pas utilisé l'équation de continuité $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ pour traduire la conservation de la masse ?

3) En déduire que $v_x(x,t)$ et $\xi(x,t)$ obéissent bien à une équation de d'Alembert. Exprimer la célérité c de ces ondes de gravitation en fonction de g et de h.
À l'approche d'une plage, h diminue. Donner qualitativement l'allure de la déformation d'une vaque lorsqu'elle se rapproche de la plage.

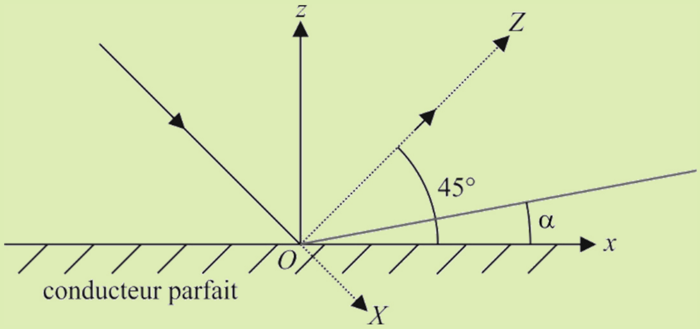
4) On considère de telles ondes de gravitation dans un bassin, situé entre $x = 0$ et $x = L$. Déterminer les fréquences des modes propres de vibration. Faire l'application numérique avec $h = 1\,\text{m}$ et $L = 50\,\text{m}$.

réponses : 3) pas de dispersion $c = \sqrt{gh}$; les vagues déferlent 4) pour le bassin $f_n = \dfrac{nc}{2L}$: $f_1 \simeq 0{,}032\ \text{Hz}$ et on peut monter jusqu'à f_{10} en vérifiant $h << \lambda$

PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

1. Expérience de Wiener

On considère une onde électromagnétique plane en incidence sur un conducteur parfait avec un angle d'incidence de 45°. On donne l'expression de son champ électrique : $\underline{\vec{E}_{\mathrm{i}}} = \vec{E}_{0\mathrm{i}} e^{j(\omega t - kX)}$. L'espace $z<0$ est un conducteur parfait et l'espace $z>0$ est vide. On cherche l'onde réfléchie sous la forme $\underline{\vec{E}_{\mathrm{r}}} = \vec{E}_{0\mathrm{r}} e^{j(\omega t - kZ)}$



1) L'onde incidente est polarisée rectilignement suivant $\vec{e}_Z$.

— Déterminer $\vec{E}_{0\mathrm{r}}$.

— Déterminer la valeur moyenne $\left\langle \vec{E}^2(M,t) \right\rangle$ en un point quelconque du vide.

2) Reprendre les questions précédentes si l'onde est polarisée rectilignement suivant $\vec{e}_y$.

3) On place une pellicule photographique qui forme un angle α avec le conducteur et on suppose qu'elle ne perturbe pas le champ électrique calculé précédemment. Elle est impressionnée là où $\left\langle \vec{E}^2 \right\rangle$ est maximal. Qu'observe-t-on après développement dans les deux cas précédents ?
L'oeil distingue les détails de plus de 0,5 mm. Dans le cas d'une onde monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 480\,\mathrm{nm}$, comment placer la pellicule pour que l'on puisse distinguer les franges sur la pellicule ?

4) Expliquer sans calcul ce que l'on observerait si la pellicule était sensible à $\left\langle \vec{B}^2 \right\rangle$.

réponses : 1) $\left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = {E_{0\mathrm{i}}}^2$ 2) $\left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = 2{E_{0\mathrm{i}}}^2 \sin^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} kz\right)$ 3) $\alpha < 6{,}8 \cdot 10^{-4}$ rad

2. O.P.P.H.P.R dans le vide, impédance caractéristique

L'O.P.P.H dans le vide est polarisée rectilignement selon Oz. Son vecteur d'onde s'écrit $\vec{k} = k(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y) = k\vec{e}_\alpha$.

1) Déterminer $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$

2) Calculer l'impédance caractéristique de l'onde $Z_{\mathrm{c}} = \mu_0 \left\|\vec{E}\right\| / \left\|\vec{B}\right\|$. Quelles sont les grandeurs analogues à $\left\|\vec{E}\right\|$ et à $\left\|\vec{B}\right\|$ dans le cas d'une onde acoustique ?

3) Calculer la densité d'énergie électromagnétique u puis sa valeur moyenne $\langle u \rangle$

4) Calculer le vecteur de Poynting $\vec{S}_{\mathrm{p}}$ puis $\left\langle \vec{S}_{\mathrm{p}} \right\rangle$. Donner et interpréter la relation entre $\left\langle \vec{S}_{\mathrm{p}} \right\rangle$ et $\langle u \rangle$.

5) On considère deux O.P.P.H de même amplitude, polarisées rectilignement selon Oz avec $\vec{k}_j = k_j(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y)$, avec $j \in [1,2]$, telles que $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega/2$ et $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega/2$, avec $\Delta\omega << \omega_0$, et $k_1 = k_0 - \Delta k/2$, et $k_2 = k_0 + \Delta k/2$, avec $\Delta k << k_0$. On note $r = \vec{r}\cdot\vec{e}_\alpha$. Représenter le champ électrique $E_z(r,t)$ résultant.

Comme il existe deux échelles de temps très différentes : $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} << T = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$, on effectue une moyenne du vecteur de Poynting sur une durée τ telle que $T_0 << \tau << T$. Représenter $\left\langle \vec{S}_{\mathrm{p}} \right\rangle$ en un point M fixé.

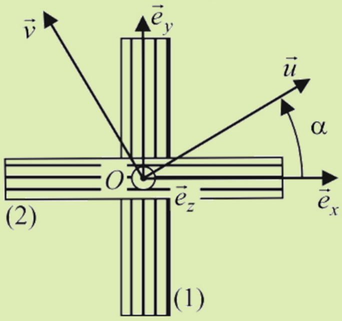
En déduire que l'information reçue par un capteur placé en M est proportionnelle à l'enveloppe du signal $E_z(r,t)$. On appelle vitesse de groupe v_g la vitesse de propagation de cette enveloppe. Montrer que $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. La comparer à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ dans le cas étudié d'une onde plane dans le vide.

réponses : 1) $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = E_0 e^{i(\omega t - kx\cos\alpha - ky\sin\alpha)}\vec{e}_z$ et $\underline{\vec{B}}(\vec{r},t) = E_0 / c e^{i(\omega t - kx\cos\alpha - ky\sin\alpha)}\left[\sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_y\right]$ 2) $Z_c = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$
3) $\langle u \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 / 2$ 4) $\langle \vec{S}_p \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 / 2\, \vec{c}$, $\vec{v}_U = \langle \vec{S}_p \rangle / \langle u \rangle = \vec{c}$

3. Radiogoniométrie

Une radio source émet une onde électromagnétique monochromatique, de fréquence 1 MHz. Dans la zone d'observation celle-ci est assimilée à une onde localement plane dont le champ électrique en un point $M(x,y,z)$ s'écrit:

$\vec{E}(M,t) = E_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})\vec{e}_z + E_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})\vec{v}$. L'onde se propage suivant la direction de vecteur unitaire $\vec{u}$.
Pour déterminer cette direction, on place deux bobines circulaires, identiques, de rayon a et qui comprennent N tours de fils. Leurs centres sont confondus en O ; La bobine n°1 est dans le plan yOz et la n°2 dans le plan xOz.

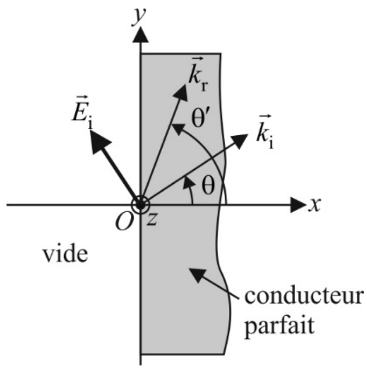


1) Quel type de polarisation cette onde présente-t-elle ? Indiquer l'expression du produit $\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}$ en fonction de $k = \|\vec{k}\|$, x, y et α.
Déterminer la valeur numérique de la longueur d'onde.
2) On observe les tensions aux bornes de chaque bobine sur les deux voies d'un oscilloscope.
Pour cette observation, faut-il se placer en mode AC, DC ou est-ce indifférent ?
Le champ $\vec{E}$ au niveau des bobines est considéré comme uniforme et égal à sa valeur en O. Justifier et donner son expression dans ce cas.
3) En déduire le champ magnétique correspondant au niveau des bobines dans le repère $(\vec{u},\vec{v},\vec{e}_z)$.
4) Établir l'expression du rapport e_1 / e_2 des tensions induites e_1 et e_2 apparaissant aux bornes des bobines et mesurées par l'oscilloscope.
5) Sachant que la mesure donne $e_1 / e_2 = -0{,}6$ en déduire l'angle α caractérisant la direction de propagation de l'onde.

réponses : 1) O.P.P.H polarisée circulairement gauche 3) $\vec{B}(O,t) = \frac{E_0}{c}\left[\cos(\omega t)\vec{e}_z - \sin(\omega t)\vec{v}\right]$ 4) $e_1 / e_2 = -\tan\alpha$.

4. Réflexion oblique d'une O.P.P.H polarisée dans le plan d'incidence

On considère une O.P.P.H polarisée rectilignement dans le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ avec un vecteur d'onde $\vec{k}_i = \omega / c\left[\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y\right]$ en incidence oblique sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$.

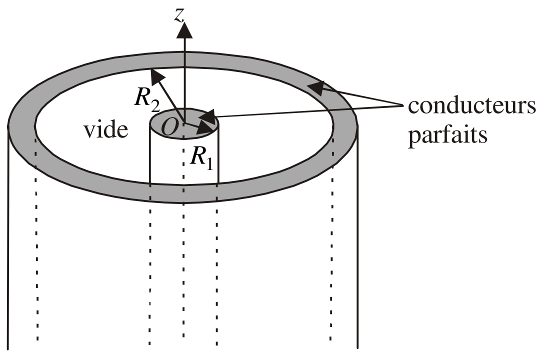


1) Donner l'expression de champ électrique et du champ magnétique incidents en un point du vide.
2) On recherche l'onde réfléchie sous la forme d'une O.P.P.H polarisée rectilignement dans le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ avec un vecteur d'onde $\vec{k}_r = \omega' / c\left[\cos\theta'\vec{e}_x + \sin\theta'\vec{e}_y\right]$.
Montrer que $\omega' = \omega$ et $\theta' = \pi - \theta$. Quelle loi traduit cette dernière relation ?
Calculer le champ électrique et le champ magnétique réfléchis en un point du vide.
3) Donner l'expression du champ électromagnétique résultant dans le vide. Commenter sa structure. Vérifier qu'il est bien solution du problème étudié. Calculer la valeur moyenne temporelle et spatiale de la densité

volumique d'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting. En déduire la vitesse de groupe de l'onde et la comparer à la vitesse de phase.
4) Calculer la charge surfacique et le courant surfacique à la surface du conducteur. En déduire l'expression de la pression moyenne de radiation s'exerçant sur le conducteur.
Retrouver ce résultat en utilisant un modèle photonique. On rappelle qu'un photon associé à une onde électromagnétique de fréquence ν possède une énergie $h\nu$ et une quantité de mouvement $h\nu / c$.

réponses : 3) $\underline{\vec{E}} = -2E_0 e^{i[\omega t - ky\sin\theta]}\begin{bmatrix} \sin\theta\cos(kx\cos\theta) \\ i\cos\theta\sin(kx\cos\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$; $\underline{\vec{B}} = 2\dfrac{E_0}{c}\cos(kx\cos\theta)e^{i[\omega t - ky\sin\theta]}\vec{e}_z$; $\overline{\langle u \rangle} = \varepsilon_0 {E_0}^2$;
$\overline{\langle \vec{S}_p \rangle} = \dfrac{{E_0}^2}{\mu_0 c}\sin\theta\vec{e}_y \Rightarrow \vec{v}_g = \vec{v}_U = c\sin\theta\vec{e}_y$ alors que $\vec{v}_\varphi = \dfrac{c}{\sin\theta}\vec{e}_y$ 4) $\sigma = 2\varepsilon_0 E_0 \sin\theta\cos(\omega t - ky\sin\theta)$;
$\vec{J}_{\mathscr{S}} = 2\varepsilon_0 c E_0\cos(\omega t - ky\sin\theta)\vec{e}_y$; $\langle p \rangle = -\varepsilon_0 {E_0}^2\cos^2\theta$.

5. Guide d'onde coaxial



On considère une onde guidée se propageant dans le vide entre deux conducteurs parfaits à base circulaire, de rayon extérieur R_1 pour le conducteur intérieur, de rayon intérieur R_2 pour le conducteur extérieur.
On donne une structure d'onde en coordonnées cylindriques d'axe Oz confondu avec l'axe des conducteurs :
$\underline{\vec{E}} = E(r)e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_r$; $\underline{\vec{B}} = \vec{B}_0(r)e^{i(\omega t - kz)}$. On note $E_1 = \lim\limits_{r \to R_1^+} E(r)$.

On donne en coordonnées cylindriques :

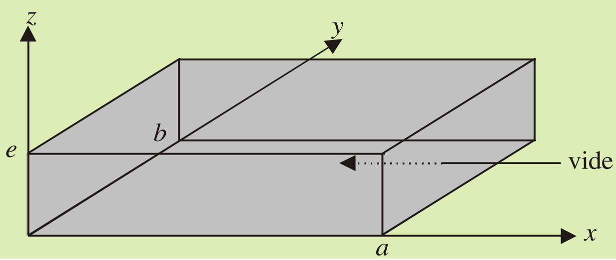
$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

1) Calculer $E(r)$.
2) Calculer $\vec{B}_0$.
3) Déterminer les densités surfaciques de charge et de courants $\underline{\sigma_1}$ et $\underline{\sigma_2}$; $\underline{\vec{J}_{\mathscr{S}1}}$ et $\underline{\vec{J}_{\mathscr{S}2}}$ à la surface des deux conducteurs.
4) Montrer que la conservation de la charge se traduit ici pour des grandeurs surfaciques par $\dfrac{\partial \underline{J_{\mathscr{S}}}}{\partial z} + \dfrac{\partial\underline{\sigma}}{\partial t} = 0$. En utilisant cette relation, montrer qu'il n'y a pas de dispersion pour le mode étudié.
Montrer que le mode de propagation étudié ici est bien une solution du problème.

réponses : 1) $E(r) = E_1\dfrac{R_1}{r}$ 2) $\vec{B}_0 = \dfrac{k}{\omega}E_1\dfrac{R_1}{r}\vec{e}_\theta$ 3) $\underline{\sigma_1} = \varepsilon_0 E_1 e^{i(\omega t - kz)}$ $\underline{\sigma_2} = -\varepsilon_0 E_1\dfrac{R_1}{R_2}e^{i(\omega t - kz)}$; $\underline{\vec{J}_{\mathscr{S}1}} = \dfrac{k}{\mu_0\omega}E_1 e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_z$
$\underline{\vec{J}_{\mathscr{S}2}} = -\dfrac{k}{\mu_0\omega}E_1\dfrac{R_1}{R_2}e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_z$ 4) On obtient $\omega = ck$, le champ vérifie 4 équations locales + les C.A.L

6. Cavité résonante

On considère une cavité parallélépipédique limitée par des conducteurs parfaits :



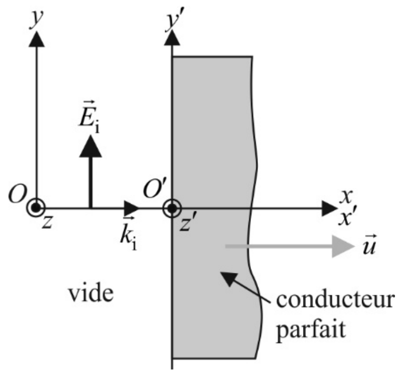
1) Comment qualifier une onde dans la cavité caractérisée par $\vec{E} = E_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{\pi y}{b}\right)e^{i\omega t}\vec{e}_z$?

2) Montrer que pour que $\vec{E}$ corresponde à une solution du problème, il faut que la pulsation ω vérifie une équation
3) Calculer le champ magnétique en tout point de la cavité.
4) Calculer $U_{\mathrm{e}}(t)$ et $U_{\mathrm{m}}(t)$, énergies électrique et magnétique dans toute la cavité à la date *t*. En déduire la loi $U(t) = U_{\mathrm{e}}(t) + U_{\mathrm{m}}(t)$. Commenter.
5) Calculer la densité surfacique de charges sur les faces des conducteurs. En déduire la capacité *C* de la cavité.
6) En utilisant une analogie, déduire sans calcul l'inductance *L* de la cavité.

réponses : 2) $\omega = \pi c\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}$ 3) $\begin{cases} \underline{B_x} = \dfrac{iE_0}{\omega}\dfrac{\pi}{b}\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{\pi y}{b}\right)e^{i\omega t} \\ \underline{B_y} = -\dfrac{iE_0}{\omega}\dfrac{\pi}{a}\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{\pi y}{b}\right)e^{i\omega t} \\ \underline{B_z} = 0 \end{cases}$ 4) $U_{\mathrm{e}}(t) = \dfrac{\varepsilon_0 {E_0}^2 \cos^2(\omega t)abe}{8}$

$U_{\mathrm{m}}(t) = \dfrac{\varepsilon_0 {E_0}^2 \sin^2(\omega t)abe}{8}$ donc $U(t) = Cte$ 5) $\underline{\sigma}(x,y,z=0) = \varepsilon_0 E_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{\pi y}{b}\right)e^{i\omega t} = -\underline{\sigma}(x,y,z=e)$; ailleurs, $\underline{\sigma} = 0$.

7. Radar Doppler



Lorsqu'un objet en mouvement par rapport à un émetteur en *O*, reçoit une onde émise par ce dernier, la fréquence de réception est différente de la fréquence d'émission : c'est l'effet Doppler. Une fraction de l'onde reçue par l'objet est renvoyée vers *O*, où un récepteur mesure une fréquence de réception également différente de celle émise par l'objet, ce qui permet d'en déduire des informations sur la vitesse de l'objet. C'est le principe du radar.
1) On considère un miroir métallique plan, parfaitement conducteur, perpendiculaire à la direction *Ox*, et en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel du laboratoire $\mathscr{R}$ avec la vitesse $\vec{u} = u\vec{e}_x$. En utilisant le fait que la charge d'une particule ponctuelle et la force de Lorentz qu'elle subit sont les mêmes dans $\mathscr{R}$ que dans le référentiel $\mathscr{R}'$ du conducteur, prouver que le champ électromagnétique dans $\mathscr{R}'$ se déduit de celui dans $\mathscr{R}$ par les relations $\vec{B}' = \vec{B}$ et $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u}\wedge\vec{B}$.
Une O.P.P.H.P.R de pulsation ω arrive sur le miroir en incidence normale. Le champ électromagnétique ($\vec{E}'$, $\vec{B}'$) étant nul à l'intérieur du conducteur dans $\mathscr{R}'$, en déduire la C.A.L : $\vec{E} + \vec{u}\wedge\vec{B} = \vec{0}\ \forall t$ en $x = ut$. Déterminer la pulsation et l'amplitude de l'onde réfléchie en fonction de celles de l'onde incidente. Pourquoi ne retrouve-t-on le résultat du 1) que si $u \ll c$?
2) Un radar de gendarmerie émet une fréquence de 2500 MHz et contrôle une automobile de vitesse 123 $\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Déterminer l'écart entre les fréquences émise et reçue.

réponses : 1) écrire la forme des ondes incidentes et réfléchies dans le référentiel du laboratoire, puis dans celui du conducteur pour pouvoir exploiter les C.A.L ; $\omega' = \omega(1-u/c)/(1+u/c)$, qui est faux puisque l'on a utilisé les équations de Maxwell et la relativité newtonienne, elle ne donne le bon résultat que dans la limite non relativiste $u \ll c$: $\omega' \simeq \omega(1-2u/c)$
2) $\Delta f = 2uf/c = 570$ Hz

8. Lever d'une étoile

Un détecteur d'ondes radio muni d'un filtre sélectionnant la longueur d'onde $\lambda = 21\,\mathrm{cm}$ est placé près d'un lac à $H = 0{,}5$ m au-dessus de la surface de l'eau. Une étoile se lève lentement à l'horizon.
On suppose que le champ électrique de l'onde issue de l'étoile est polarisé orthogonalement au plan d'incidence. Par ailleurs, on indique que l'onde réfléchie par l'eau l'est avec un coefficient de réflexion en amplitude du champ électrique de -1
Le détecteur indique des maxima et des minima successifs d'intensité lumineuse.
1) En déterminant le champ électromagnétique au niveau du détecteur, déterminer l'angle θ que fait l'étoile au-dessus de l'horizon lorsque le premier maximum est détecté.
2) Retrouver ce résultat en raisonnant sur les rayons issus de l'étoile qui interfèrent au niveau du détecteur.

réponses : 1) $\sin(\theta\min) = \dfrac{\lambda}{4H}$

DISPERSION, ABSORPTION, ATTÉNUATION / ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES PLASMAS ET LES CONDUCTEURS

• *O.P.P.H dans un milieu linéaire*

1. Amortissement d'une onde sonore par viscosité

En acoustique, la vitesse particulaire $\vec{v}_1$, l'écart relatif de masse volumique $\dfrac{\rho_1}{\rho_0} = \dfrac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ et de pression $\dfrac{p_1}{p_0} = \dfrac{p - p_0}{p_0}$ sont des infiniment petits du même ordre. On néglige l'influence de la pesanteur.

1) Donner les formes linéarisées des trois équations locales de l'acoustique pour un fluide <u>visqueux</u> (le fluide étant très peu compressible, la prise en compte de la viscosité se traduit par l'apparition d'une force volumique $\eta\Delta\vec{v}$ comme dans le cas incompressible). On admettra que l'on peut toujours considérer que les particules fluides suivent une évolution isentropique et on introduira le coefficient de compressibilité isentropique $\chi_S = 1/\rho_0 c^2$.

2) Établir l'équation de propagation de la surpression. Commenter son expression.

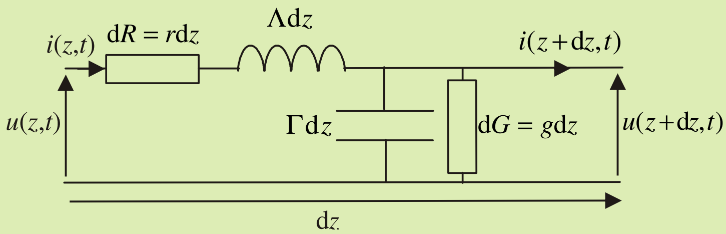
Introduire la grandeur $\tau = \dfrac{\eta}{\rho_0 c^2} = \dfrac{\nu}{c^2}$ et donner sa valeur numérique pour l'air pour lequel à 20 °C, $\nu = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$. En déduire que dans le domaine audible (ondes de pulsation ω), $\omega\tau \ll 1$.

3) On cherche des solutions harmoniques de cette équation sous la forme d'ondes planes : $\underline{p_1} = P_1 e^{i(\omega t - kx)}$. À quelle équation de dispersion satisfont-elles ? Montrer que l'on a $k \simeq \dfrac{\omega}{c}\left[1 - i\dfrac{\omega\tau}{2}\right]$. En déduire la vitesse de phase de l'onde et la distance δ caractéristique de l'absorption de l'onde. Faire l'application numérique pour $f = 1\,\mathrm{kHz}$ puis $f = 10\,\mathrm{kHz}$ et commenter.

réponses : 2) $\Delta p_1 + \tau \dfrac{\partial \Delta p_1}{\partial t} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$: irréversibilité

2. Câble coaxial avec pertes, équation du télégraphiste

Les pertes dans un câble coaxial sont prises en compte en ajoutant des éléments résistifs. Le premier, de résistance $\mathrm{d}R = r\mathrm{d}z$ est en série avec la bobine et le second, de conductance $\mathrm{d}G = g\mathrm{d}z$, est en parallèle avec le condensateur.



Les grandeurs r et g sont relatives à l'unité de longueur.

1) En appliquant les lois élémentaires de l'électrocinétique, établir deux relations entre $u(z, t)$, $i(z, t)$ et (ou) leurs dérivées premières. En déduire que les fonctions $u(z, t)$ et $i(z, t)$ satisfont à l'équation du télégraphiste :

$$\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2} - \alpha\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial t^2} - \beta\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial t} - \gamma\psi(z,t) = 0\,.$$

Donner l'expression des coefficients α, β et γ en fonction de Λ, r, Γ et g. Vérifier l'homogénéité de l'équation du télégraphiste.

2) On cherche des solutions de cette équation sous la forme $\underline{\psi}(z,t) = \psi_0 e^{j(\omega t - kz)}$. En déduire la relation de dispersion :

$$k^2 = -(r + j\Lambda\omega)(g + j\Gamma\omega)\,.$$

Montrer qu'on peut écrire $k = \pm(k' + jk'')$ avec $k' > 0$ et $k'' < 0$ deux réels positifs que l'on ne cherchera pas à calculer.

En déduire la forme générale des solutions de l'équation de propagation. Donner l'interprétation physique des différents termes de cette solution.

3) On appelle impédance caractéristique Z_c d'une ligne le rapport de la tension sur le courant au cours de la propagation progressive : $Z_c = \dfrac{\underline{u}^+}{\underline{i}^+}$. Écrire *a priori* l'expression de $\underline{u}^+(z,t)$ et $\underline{i}^+(z,t)$. On note U_0 et I_0 leurs amplitudes respectives.

Déduire des deux relations de couplage que $Z_c = \left(\dfrac{r + j\Lambda\omega}{g + j\Gamma\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$.

4) À quelles conditions doit satisfaire ω pour qu'on puisse négliger les pertes ? Quelle forme prend alors la relation de dispersion et l'impédance caractéristique Z_c ?

On se place dans le cas où $\dfrac{r}{\Lambda\omega} << 1$ et $\dfrac{g}{\Gamma\omega} << 1$. Effectuer à l'ordre 2 en ces grandeurs le développement limité de *k*. On rappelle qu'à l'ordre 2 $(1+X)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{X}{2} - \dfrac{X^2}{8}$. En déduire k' et k''. Montrer que dans ces conditions, le câble est non dispersif si la condition de Heaviside $\dfrac{r}{\Lambda} = \dfrac{g}{\Gamma}$ est vérifiée.

réponses : 1) $\alpha = \Lambda\Gamma = \dfrac{1}{c^2}$; $\beta = r\Gamma + g\Lambda$; $\gamma = rg$ 2) somme d'une O.P.P.H qui se propage dans le sens des z croissants en s'atténuant, et d'une O.P.P.H qui se propage dans le sens des z décroissants en s'atténuant 4) $k' = \dfrac{\omega}{c}\left[1 - \dfrac{1}{8\omega^2}\left(\dfrac{r}{\Lambda} - \dfrac{g}{\Gamma}\right)^2\right]$ et $k'' = -\dfrac{1}{2c}\left(\dfrac{r}{\Lambda} + \dfrac{g}{\Gamma}\right)$.

3. Correction ionosphérique pour le système G.P.S

On considère une O.P.P.H.P.R transverse électrique ($\vec{E} \perp \vec{k}$) se propageant dans l'ionosphère, plasma dilué contenant *n* électrons libres par unité de volume, soit, en utilisant la notation complexe : $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$; $\underline{\vec{B}} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$. On note $-e$ la charge d'un électron, *m* sa masse, et *c* la célérité de la lumière dans le vide.

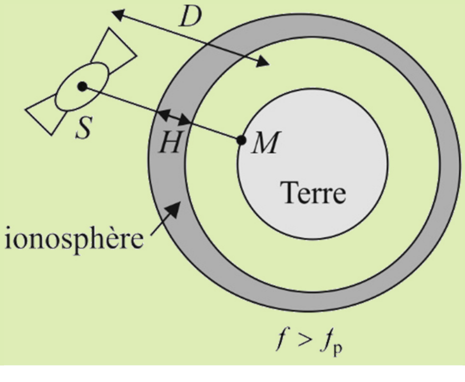
Le champ électrique de l'onde engendre des courants de densité volumique $\underline{\vec{J}} = \dfrac{ne^2}{im\omega}\underline{\vec{E}}$.

1) Écrire les équations de Maxwell dans le plasma en notation complexe. En déduire que le milieu reste neutre lors du passage de l'onde.

2) En déduire que la relation de dispersion dans le plasma se met sous la forme $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p{}^2}{c^2}$. Exprimer la pulsation ω_p en fonction de *n*, *e*, ε_0 et *m*. La fréquence $f_p = \dfrac{\omega_p}{2\pi}$ est appelée pulsation de coupure du plasma. Justifier son nom. En journée, cette fréquence est de l'ordre de 1 MHz.

3) On suppose $f > f_p$. Calculer la vitesse de groupe : vitesse d'un paquet d'ondes très étroit centré sur la fréquence *f*. Donner cette vitesse en fonction de *f* et de f_p.

4) Un satellite *S* se trouve au-dessus de l'ionosphère et communique avec un point *M* de la Terre. On note *D* la distance *SM* et *H* l'épaisseur locale d'ionosphère traversée. La partie de l'atmosphère qui n'est pas l'ionosphère est assimilée au vide.



Le satellite émet à $t=0$ un paquet d'ondes de fréquence f telle que $f >> f_\mathrm{p}$. Calculer la date t de réception du signal en M en fonction de D, c, H, f_p et f. On pourra utiliser le développement limité en 0 : $(1+X)^{-\frac{1}{2}} = 1 - X/2$ à l'ordre 1 en X.

5) Deux paquets d'ondes de fréquences f_1 et f_2 telles que $f_1 > f_2 >> f_\mathrm{p}$ sont émis simultanément en S à la date $t=0$, ils arrivent respectivement en M aux dates t_1 et t_2. Exprimer en fonction de H, c, f_p, f_1 et f_2 le décalage temporel $\Delta t = t_2 - t_1$ entre les deux paquets d'ondes à leur arrivée en M.

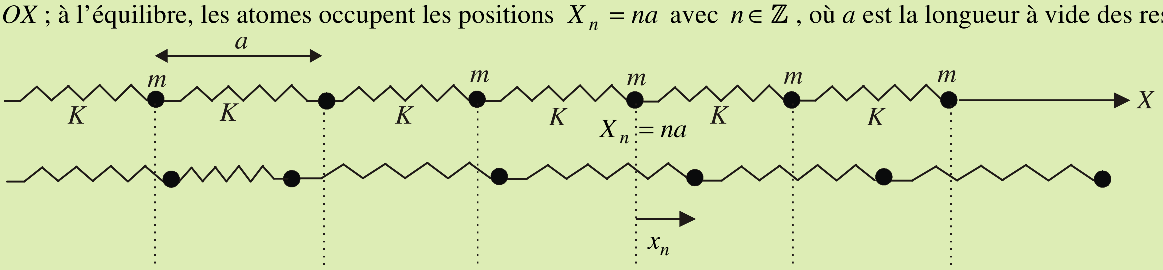
6) Déduire des deux questions précédentes que la distance entre M et le satellite peut s'écrire $D = ct - d$, avec : $d = \dfrac{c\Delta t}{f^2\left(\dfrac{1}{f_2^{\,2}} - \dfrac{1}{f_1^{\,2}}\right)}$. Le terme d est appelé correction ionosphérique, obtenu par mesure de Δt en temps réel. Justifier son nom.

A.N : $f_1 = 1{,}575\ \mathrm{GHz}$; $f_2 = 1{,}228\ \mathrm{GHz}$; $c = 3\cdot 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. On mesure $\Delta t = 1{,}58\cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}$. Quelle erreur sur D serait commise pour un signal de fréquence f_1 si l'on n'effectuait pas la correction ionosphérique ? Commenter cette valeur.

réponses : 3) $v_\mathrm{g} = c\sqrt{1-\left[\dfrac{f_\mathrm{p}}{f}\right]^2}$ 4) $t \simeq \dfrac{D}{c} + \dfrac{H}{2c}\left[\dfrac{f_\mathrm{p}}{f}\right]^2$ 5) $\Delta t \simeq \dfrac{Hf_\mathrm{p}^{\,2}}{2c}\left[\dfrac{1}{f_2^{\,2}} - \dfrac{1}{f_1^{\,2}}\right]$ 6) $d = 7{,}3$ m

4. Dispersion d'une onde dans une chaîne infinie d'atomes

On considère une chaîne infinie linéaire d'atomes ponctuels de masse m liés par des ressorts de raideur K. La chaîne est portée par l'axe OX ; à l'équilibre, les atomes occupent les positions $X_n = na$ avec $n \in \mathbb{Z}$, où a est la longueur à vide des ressorts.



1) Établir les équations différentielles régissant la position x_n de l'atome n par rapport à sa position d'équilibre.

2) On cherche des solutions sous la forme $\underline{x_n} = Ae^{i(\omega t - kX_n)}$, avec A constante réelle. Déterminer la relation de dispersion. Montrer que la chaîne se comporte comme un filtre passe-bas dont on calculera la pulsation de coupure ω_c. Tracer le graphe $\omega(k)$.

3) Calculer $\underline{x_n}$ lorsque $\omega = \omega_\mathrm{c}$. Commenter.

4) Calculer $\underline{x_n}$ lorsque $\omega << \omega_\mathrm{c}$. Commenter. Déterminer alors la vitesse de phase et la vitesse de groupe l'onde. Montrer que l'on peut déterminer dans ce cas une équation d'onde et retrouver les résultats précédents.

réponses : 2) $\omega = 2\omega_0\left|\sin\left(\dfrac{ka}{2}\right)\right|$ 3) vibration en opposition de phase pour deux atomes voisins 4) pas de dispersion (approximation des milieux continus), on retrouve l'équation d'onde de d'Alembert

• *Dispersion d'ondes NON planes dans un milieu non dispersif*

5. Pavillon exponentiel

On considère un pavillon rempli d'air de masse volumique ρ_0, de révolution autour de l'axe Ox, dont la section est de la forme $\mathscr{S} = \mathscr{S}_0 e^{\frac{x}{d}}$, avec d très grand devant la longueur L du pavillon : la vitesse eulérienne de l'air est $\vec{v} \simeq v_x(x,t)\vec{e}_x$ (l'onde n'est pas rigoureusement plane). On note c la célérité du son dans l'air. On se place dans l'approximation acoustique.

1) Écrire le principe fondamental linéarisé appliqué à une particule fluide ainsi que la relation entre l'écart entre la masse volumique au repos $\rho_1(x,t) = \rho(x,t) - \rho_0$ et la surpression $p_1(x,t) = p(x,t) - p_0$ dans l'hypothèse d'une transformation isentropique des particules fluides (on note χ_S le coefficient de compressibilité isentropique).

2) Pourquoi l'équation de continuité $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{v})=0$ n'est-elle pas applicable ici avec $\vec{v}=v_x(x,t)\vec{e}_x$? Faire directement un bilan de masse entre x et $x+\mathrm{d}x$ et en déduire que $\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\rho_0 v}{d}$.

3) Établir l'équation d'onde régissant v et p_1.

4) On cherche des solutions O.P.P.H : $\underline{v}(x,t)=v_0 e^{i(\omega t-kx)}$. Montrer que la propagation ne peut se faire que si $\omega\geq\omega_c$, pulsation de coupure à calculer. Trouver alors la relation de dispersion entre $k'=\mathrm{Re}(k)$ et ω. Calculer les vitesses de phase et de groupe. Tracer la courbe donnant $k'(\omega)$. Commenter le cas $d\to\infty$.

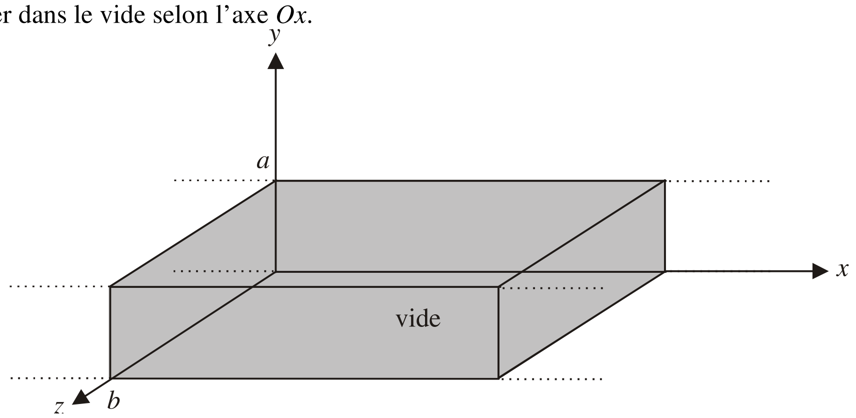
5) Déterminer dans le cas d'une O.P.P.H se propageant dans le sens des x croissants le champ de vitesse et de surpression.

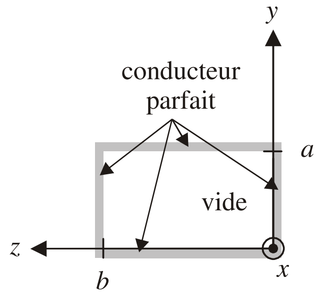
6) Calculer la vitesse de propagation $\vec{c}_U$ de l'énergie. Commenter.

réponses : 2) On a $|v_r|<<|v_x|$ mais pas $\left|\frac{\partial v_r}{\partial r}\right|<<\left|\frac{\partial v_x}{\partial x}\right|$ 3) $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\rho_0\chi_S\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=-\frac{1}{d}\frac{\partial v}{\partial x}$, pareil pour p_1 4) $\omega_c=\frac{c}{2d}$; $k'^2=\frac{\omega^2-\omega_c^{\ 2}}{c^2}$ 5) $\underline{v}=v_0 e^{-\frac{x}{2d}}e^{j(\omega t-k'x)}$; $\underline{p_1}=\frac{i\omega\rho_0 v_0}{1/(2d)+ik'}e^{-\frac{x}{2d}}e^{j(\omega t-k'x)}$ 6) $\vec{c}_U=\frac{\langle\vec{J}_{\mathrm{ac}}\rangle}{\langle u_{\mathrm{ac}}\rangle}=v_{\mathrm{g}}\vec{e}_x$

6. Guide d'onde rectangulaire, étude du mode TE$_{n,0}$

Un guide d'onde est constitué de quatre parois planes parfaitement conductrices permettant à une onde électromagnétique de se propager dans le vide selon l'axe Ox.





1) Écrire les équations régissant le champ électromagnétique, ainsi que les conditions aux limites imposées par la présence des conducteurs parfaits.

On cherche pour le champ électrique des solutions de la forme $\underline{\vec{E}}=f(y,z)e^{i(\omega t-kx)}\vec{e}_z$ où f est une fonction réelle. Commenter la forme de la solution recherchée : s'agit-il d'une onde plane ? stationnaire ? Pourquoi parle-t-on d'onde transverse électrique TE ? Écrire deux équations locales ne faisant intervenir que $\underline{\vec{E}}$. Les résoudre et montrer que les modes de propagation recherchés sont quantifiés (modes TE$_{n0}$) : $\underline{\vec{E}}=E_0\sin\left[\frac{n\pi}{a}y\right]e^{i(\omega t-kx)}\vec{e}_z$ avec n entier. Déterminer la relation de dispersion entre k et ω.

2) Calculer $\underline{\vec{B}}$. L'onde est-elle transverse électromagnétique ? Montrer que l'on a bien trouvé un champ électromagnétique solution du problème.

3) On revient sur la relation de dispersion. Montrer que le guide se comporte comme un filtre passe-haut. Le vide est-il un milieu dispersif ? Comment expliquer alors ce comportement ?

Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde, les comparer à la célérité c de la lumière dans le vide. Commenter.

Montre que l'onde étudiée est la somme de deux ondes planes O.P.P.H.P.R dont on donnera les directions de propagation. Retrouver la relation de dispersion en raisonnant sur ces ondes planes.

4) Aspect énergétique : calculer $\langle u_e\rangle$ et $\langle u_m\rangle$, puis $\overline{\langle u_e\rangle}$ et $\overline{\langle u_m\rangle}$, valeurs moyennes spatiales. En déduire $\overline{\langle u\rangle}$. Calculer la moyenne temporelle $\langle\vec{S}_p\rangle$ du vecteur de Poynting, puis $\overline{\langle\vec{S}_p\rangle}$: montrer $\overline{\langle\vec{S}_p\rangle}=\overline{\langle u\rangle}v_g\vec{e}_x$. Commenter cette relation.

réponses : 1) l'onde cherchée n'est ni plane ni stationnaire, elle se propage selon $\vec{e}_x$; $k^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ 2) utiliser M.F 3) dispersion car onde non plane (due aux C.A.L) : somme de 2 O.P.P.H correspondant à des réflexions sur les conducteurs en $y=0$ et $y=a$ 4) $\overline{\langle u\rangle}=\frac{\varepsilon_0 E_0^{\ 2}}{4}$; $\overline{\langle\vec{S}_p\rangle}=\frac{kE_0^{\ 2}}{4\mu_0\omega}\vec{e}_x$; la vitesse moyenne de propagation de l'énergie est la vitesse de groupe dans un milieu non absorbant

DISPERSION, ABSORPTION, ATTÉNUATION / ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES PLASMAS ET LES CONDUCTEURS