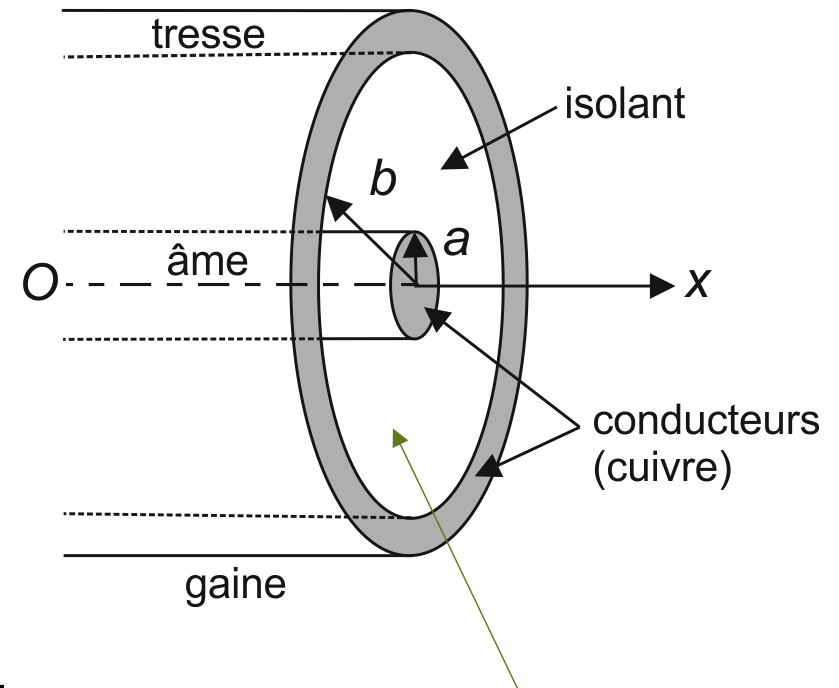
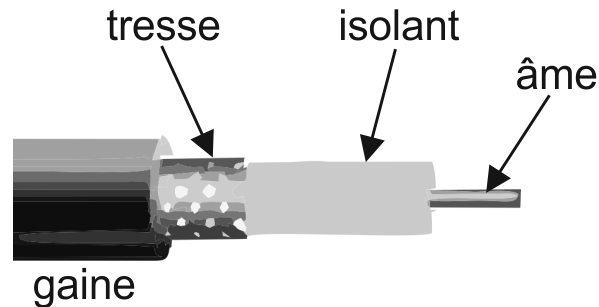


## 5. PROPAGATION NON DISPERSIVE LE LONG D'UN CÂBLE COAXIAL

### 5.1 Le câble coaxial

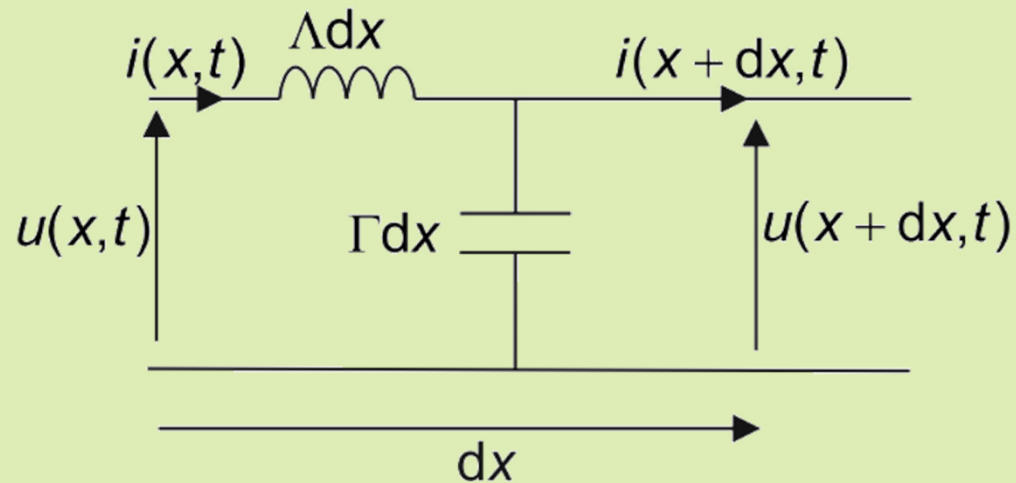


le câble constitue un *guide d'onde* (cf. ondes électromagnétiques dans le vide) : l'onde électromagnétique se propage selon  $Ox$ , dans le diélectrique, par réflexions successives sur l'âme et la tresse

∃ plusieurs modes de propagation (ondes électromagnétiques solutions de l'équation d'onde dans le diélectrique, et vérifiant les C.A.L imposées par la présence des conducteurs)

matériau diélectrique (isolant), par exemple du polyéthylène de permittivité relative  $\epsilon_r = 2,25$

pour des fréquences suffisamment faibles, il n'existe qu'un mode pour lequel un élément de câble de longueur  $dx$  est équivalent au circuit ci-dessous :



$$\Lambda = \frac{dL}{dx} \quad (\text{H} \cdot \text{m}^{-1}) \quad \text{inductance linéique du câble}$$

$$\Gamma = \frac{dC}{dx} \quad (\text{F} \cdot \text{m}^{-1}) \quad \text{capacité linéique du câble}$$

## 5.2 Équations de couplage et équation d'onde

loi des noeuds :  $i(x, t) = \underbrace{i(x + dx, t)}_{i(x, t) + \frac{\partial i}{\partial x} dx} + \underbrace{\Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x + dx, t)}_{\Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \text{ à l'ordre 1 en } dx} \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$

loi des mailles :  $u(x, t) = \underbrace{u(x + dx, t)}_{u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx} + \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$

relations de **couplage** : 
$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} & (2) \end{cases}$$

découplage :

$$\frac{\partial(2)}{\partial x} - \Lambda \frac{\partial(1)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} + \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial(1)}{\partial x} - \Gamma \frac{\partial(2)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

$s(x, t) = u(x, t)$  ou  $i(x, t)$  vérifie pour le mode étudié :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} \quad \text{équation de d'Alembert 1D}$$

$c$  : célérité des ondes électromagnétiques

dans le vide :  $c_0 = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \simeq 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

dans un diélectrique,  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_r \epsilon_0$  :  $c = 1 / \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0} = c_0 / \sqrt{\epsilon_r} \simeq 2,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$   
(pour  $\epsilon_r = 2,25$ )

### 5.3 Impédance caractéristique du câble

on cherche une solution d'onde plane progressive (O.P.P) se propageant le long du câble dans le sens des  $x$  croissants :

$$\begin{cases} u(x, t) = F_u(t - x / c) \\ i(x, t) = F_i(t - x / c) \end{cases}$$

$F_u$  et  $F_i$  sont des fonctions de la seule variable  $\theta(x, t) = t - x / c$

$$\theta(x, t) = t - x / c \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x} = \frac{dF_i}{d\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{dF_i}{d\theta} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dF_u}{d\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{dF_u}{d\theta} \end{cases}$$

connaître ce changement de variable

la relation de couplage (1)  $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$  s'écrit donc :

$$-\frac{1}{c} \frac{dF_i}{d\theta} = -\Gamma \frac{dF_u}{d\theta} \Rightarrow F_u = \frac{1}{\Gamma c} F_i + Cte, \text{ soit } u = Z_c \cdot i + Cte$$

on peut avoir  $Cte \neq 0$  en imposant une tension constante entre la tresse et l'âme alors que le câble ne débite aucun courant

on peut alors étudier à part le régime stationnaire et le régime ondulatoire, puis les ajouter, car les équations sont linéaires (théorème de superposition)

on n'étudie ici que des solutions **ondulatoires**, de **valeur moyenne nulle**, pour lesquelles :

$u = Z_c \cdot i$  pour une O.P.P qui se propage dans le sens des  $x \nearrow$

$$Z_c = \frac{1}{\Gamma c} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \text{ impédance caractéristique du câble } (\Omega)$$

pour une O.P.P  $x \searrow$  : 
$$\begin{cases} u(x,t) = G_u(t + x/c) \\ i(x,t) = G_i(t + x/c) \end{cases} \quad \varphi = t + x/c = \varphi(x,t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x} = \frac{dG_i}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = + \frac{1}{c} \frac{dG_i}{d\varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dG_u}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{dG_u}{d\varphi} \end{cases} \quad (1) : \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \text{ s'écrit } \frac{1}{c} \frac{dG_i}{d\varphi} = -\Gamma \frac{dG_u}{d\varphi} \Rightarrow G_u = -\frac{1}{\Gamma c} G_i$$

(solution *ondulatoire*)

pour une O.P.P  $x \searrow$  :  $u = -Z_c \cdot i$

## 5.4 Réflexion en bout de ligne, cas d'une charge résistive

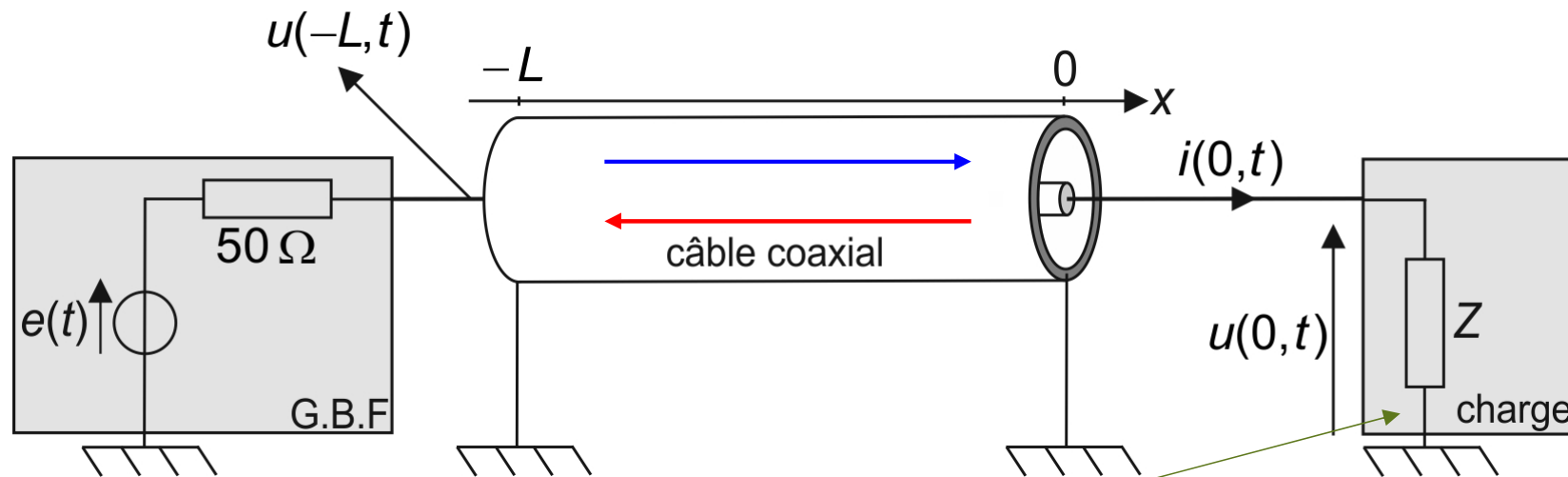
la solution la plus générale correspond à la somme :

d'une O.P.P  $x \nearrow$  (incidente) : 
$$\begin{cases} u(x,t) = F_u(t - x/c) = Z_c F_i(t - x/c) \\ i(x,t) = F_i(t - x/c) \end{cases}$$

d'une O.P.P  $x \searrow$  (réfléchie) : 
$$\begin{cases} u(x,t) = G_u(t + x/c) = -Z_c G_i(t + x/c) \\ i(x,t) = G_i(t + x/c) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,t) = Z_c F_i(t - x/c) - Z_c G_i(t + x/c) \\ i(x,t) = F_i(t - x/c) + G_i(t + x/c) \end{cases}$$

cette onde vérifie les équations locales du problème (les 2 relations de couplage)



il reste à vérifier la C.A.L en  $x = 0$  :  $u(0,t) = Z \cdot i(0,t) \quad \forall t$

$$\Rightarrow Z_c [F_i(t) - G_i(t)] = Z [F_i(t) + G_i(t)]$$

$$\Rightarrow \rho_i = \frac{G_i(t)}{F_i(t)} = \frac{Z_c - Z}{Z_c + Z} \text{ coefficient de réflexion en intensité}$$

$$\rho_u = \frac{G_u(t)}{F_u(t)} = \frac{-Z_c G_i(t)}{Z_c F_i(t)} = -\rho_i = \frac{Z - Z_c}{Z_c + Z} \text{ coefficient de réflexion en tension}$$

étude expérimentale : le G.B.F, placé en entrée  $x = 0$  du câble, délivre un peigne d'impulsions et on observe  $u(-L, t)$  en entrée du câble à l'oscilloscope

trois cas particuliers de résistance de charge :

(1)  $Z = 0 \Rightarrow \rho_u = -1$

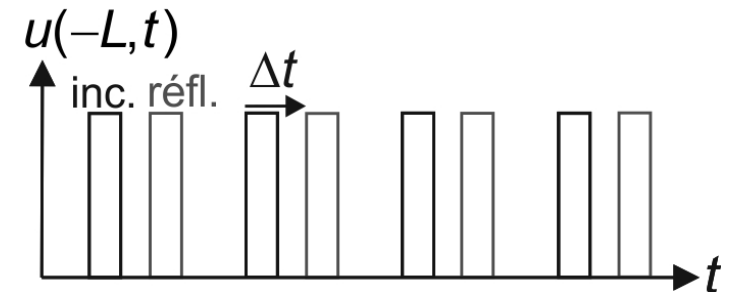
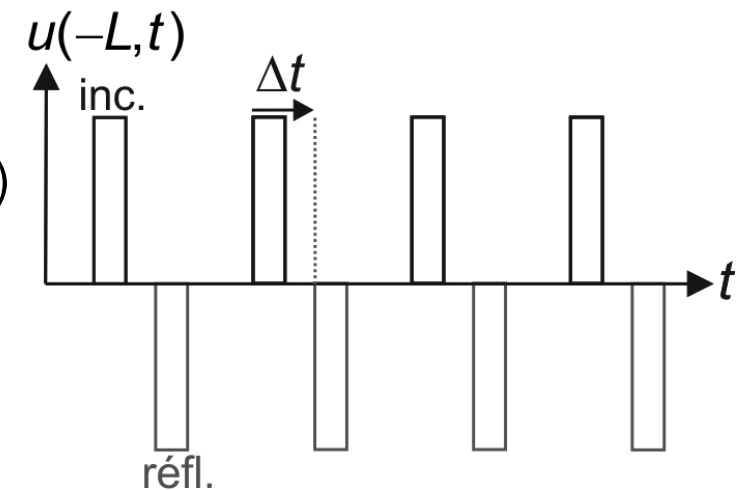
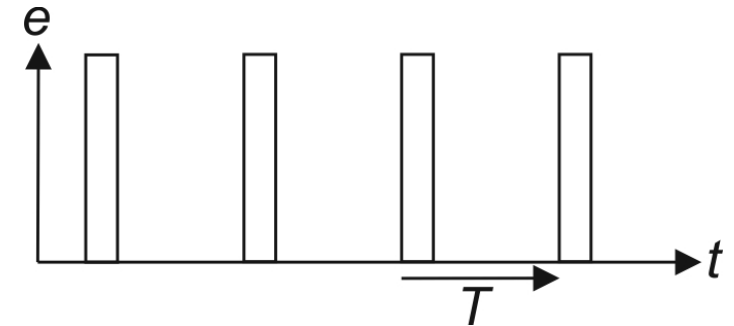
(sortie court-circuitée :  $u(0, t) = 0 \quad \forall t$ , nœud de tension)

on en déduit  $c = 2L / \Delta t$

(2)  $Z = \infty \Rightarrow \rho_u = +1$

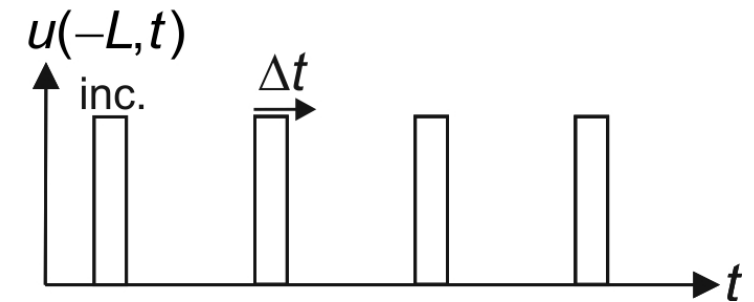
(sortie ouverte :  $i(0, t) = 0 \quad \forall t$ , nœud de courant)

on en déduit  $c = 2L / \Delta t$





$$(3) Z = Z_c \Rightarrow \rho_u = \rho_i = 0$$



pas d'onde réfléchie (même relation  $u(0, t) = Z_c i(0, t)$  que pour une O.P.P qui se propage dans le sens des  $x$  croissants le long d'un câble infini)

l'O.P.P incidente *seule* est solution du problème (elle vérifie les relations de couplage et la C.A.L)

pour  $Z = Z_c$ , pas d'onde réfléchie :  $\rho_u = \rho_i = 0$

on parle alors *d'adaptation d'impédance* : toute la puissance incidente est transmise à la charge

en pratique, les G.B.F possèdent une résistance interne de  $50 \Omega$   
utilisés avec un câble coaxial d'impédance caractéristique  $50 \Omega$ , on évite que les ondes que transmet le câble ne se réfléchissent sur le G.B.F et on élimine ainsi des réflexions parasites.

cas général :  $-1 \leq \rho_u = \frac{Z - Z_c}{Z_c + Z} \leq 1$

prenons une onde incidente *harmonique* de pulsation  $\omega$ , la résultante des ondes de tension incidente et réfléchie est :

$$u(x, t) = u_0 \left[ \underbrace{\cos(\omega t - kx)}_{f(x, t)} + \rho_u \underbrace{\cos(\omega t + kx)}_{g(x, t)} \right] \text{ avec } u_0 \geq 0 : \textbf{interférences}$$

$$f \text{ et } g \text{ en phase en } x \quad \forall t \Leftrightarrow \omega t - kx = \omega t + kx + 2n\pi \Leftrightarrow kx = -n\pi \Leftrightarrow \mathbf{x = x_n = -n\lambda / 2}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\text{alors } u(x_n, t) = u_0 [\cos(\omega t + n\pi) + \rho_u \cos(\omega t - n\pi)] = u_0 (-1)^n [1 + \rho_u] \cos(\omega t)$$

$$f \text{ et } g \text{ en opposition de phase en } x \quad \forall t \Leftrightarrow \omega t - kx = \omega t + kx + (2m + 1)\pi$$

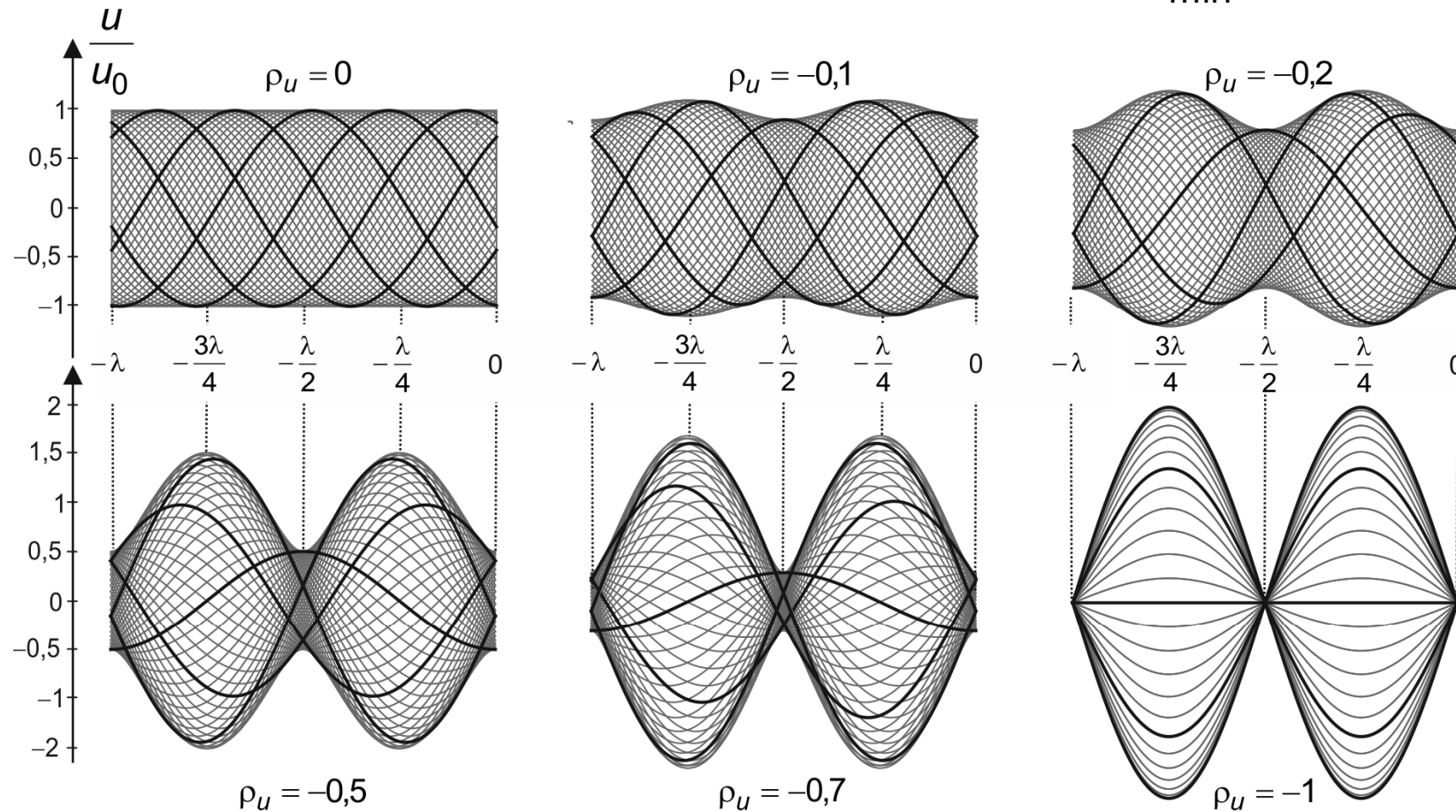
$$\Leftrightarrow kx = -(2m + 1)\pi / 2 \Leftrightarrow \mathbf{x = x_m = -(2m + 1)\lambda / 4 \text{ avec } m \in \mathbb{N}}$$

$$\text{alors } u(x_m, t) = u_0 (-1)^{m+1} [1 - \rho_u] \sin(\omega t)$$

prenons  $\rho_u \leq 0$

$\Rightarrow$  interférences **constructives** pour  $x = -(2m+1)\lambda / 4$  et  $|u|_{\max} = u_0 [1 - \rho_u]$

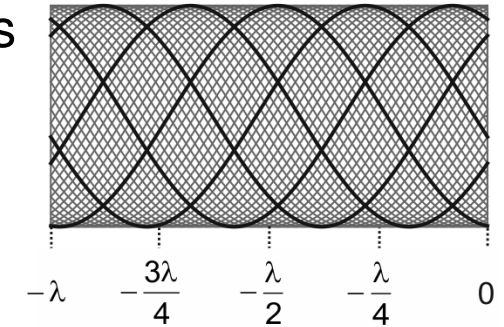
$\Rightarrow$  interférences **destructives** pour  $x = x_n = -n\lambda / 2$  et  $|u|_{\min} = u_0 [1 + \rho_u]$



Les ondes planes harmoniques ne sont purement progressives que si  $\rho_u = 0$ . Elles restent progressives lorsque  $-1 < \rho_u < 0$ , mais il apparaît des « nœuds » d'amplitude minimale (mais non nulle), et des ventres d'amplitude maximale. Pour  $\rho_u = -1$ , l'onde est stationnaire : son l'amplitude est nulle aux nœuds.

pour  $\rho_u = 0 \Leftrightarrow Z = Z_c$ , pas d'onde réfléchie, pas d'interférences

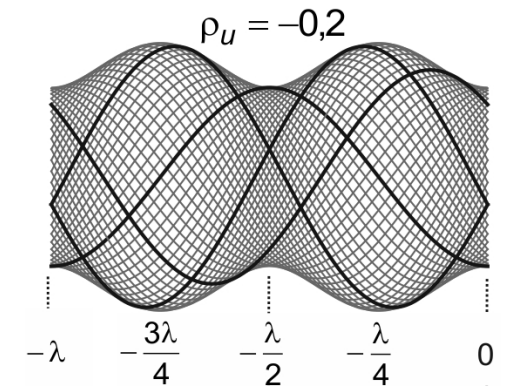
onde dans le câble = onde incidente, *purement progressive* (pas de nœuds ni de ventres :  
l'amplitude =  $u_0$  partout)



pour  $-1 < \rho_u < 0 \Leftrightarrow 0 < Z < Z_c$

"nœuds" en  $x = -n\lambda / 2$ , "ventres" en  $x = -(2m+1)\lambda / 4$

amplitude minimale mais non nulle ; l'onde dans le câble n'est pas purement progressive, ni stationnaire



pour  $\rho_u = -1 \Leftrightarrow Z = 0$

les interférences à deux ondes de même amplitude produisent des nœuds et des ventres; l'onde dans le câble est stationnaire

