1. DISPERSION / ATTÉNUATION

1.1 Technique de résolution

si on prend en compte des frottements linéaires dans l'équation la corde vibrante , on obtient :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad \Rightarrow \psi(x,t) \neq F(t - x/c) + G(t + x/c)$$

équation d'onde **linéaire**, mais ≠ d'Alembert

le terme $F(t - x / c)$ correspond à une onde se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants, *sans déformation*, alors que la présence de forces de frottement va *atténuer* l'onde lors de sa propagation

cependant, l'équation restant **linéaire**, on peut rechercher des solutions sinusoïdales dans le temps, et utiliser la notation complexe :

$$\underline{\psi}(x,t) = f(x)e^{i\omega t} \text{ avec } f \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ régie par une équation différentielle linéaire à coefficients complexes

$\Rightarrow$ les solutions de cette équation se décomposent sur une base de fonctions qu'on cherche sous la forme e^{rx} avec r complexe, ou, ce qui est équivalent, sous la forme : $x \mapsto e^{-ikx}$ avec $k \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\underline{\psi}(x,t) = \psi_0 e^{i(\omega t - kx)}$ prend la forme d'une O.P.P.H

plus généralement, on peut chercher des solutions :

— d'une équation d'onde **linéaire** régissant une grandeur $s(x,t)$
— d'un système d'équations **linéaires** couplant des grandeurs $[s_1(x,t), s_2(x,t), \ldots]$

sous la forme $\underline{s}(x,t) = s_0 e^{i(\omega t - kx)}$ ou $\left[\ \underline{s_1} = A_1 e^{i(\omega t - kx)}, \underline{s_2} = A_2 e^{i(\omega t - kx)}, \ldots\right]$

avec $\omega \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{C}$: $k(\omega) = k'(\omega) + ik''(\omega)$, $(k', k'') \in \mathbb{R}^2$

la relation qu'on obtient entre k et ω est appelée ***relation de dispersion*** si $k'' \neq 0$ $\underline{s}(x,t) = s_0 e^{k''x} e^{i(\omega t - k'x)}$: l'onde est atténuée ou amplifiée lors de sa propagation

si $k' = 0$ l'onde est stationnaire et ne se propage pas, sinon c'est bien une O.P.P.H

forme intrinsèque : $\underline{s}(\vec{r},t) = s_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ avec $\vec{k}(\omega) = \left[k'(\omega) + ik''(\omega)\right]\vec{e}$

vecteur unitaire dans la direction de propagation

si $\vec{k} = k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z \Rightarrow \underline{s}(\vec{r},t) = s_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = s_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$

$\Rightarrow$ les opérateurs sont simplifiés :

$$\boxed{\frac{\partial \underline{s}}{\partial t} = i\omega \underline{s} \qquad \frac{\partial \underline{s}}{\partial x} = -ik_x \underline{s} \qquad \frac{\partial \underline{s}}{\partial y} = -ik_y \underline{s} \qquad \frac{\partial \underline{s}}{\partial z} = -ik_z \underline{s}}$$

laplacien $\Delta \underline{s} = \frac{\partial^2 \underline{s}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{s}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{s}}{\partial z^2} = -\left[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right]\underline{s} = -k^2 \underline{s} \Rightarrow \Delta \underline{\vec{A}} = -k^2 \underline{\vec{A}}$

$$\boxed{\Delta \underline{s} = -k^2 \underline{s}}$$

divergence $\operatorname{div} \underline{\vec{A}} = \frac{\partial \underline{A_x}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{A_y}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{A_z}}{\partial z} = -i\left[k_x \underline{A_x} + k_y \underline{A_y} + k_z \underline{A_z}\right]$

rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{A_x} \\ \underline{A_y} \\ \underline{A_z} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{A_x} \\ \underline{A_y} \\ \underline{A_z} \end{pmatrix}$

pour une O.P.P.H : $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ qui se propage selon $\vec{k}$, on a :

$$\frac{\partial \underline{\vec{A}}}{\partial t} = i\omega \underline{\vec{A}} \qquad \text{div}\,\underline{\vec{A}} = -i\vec{k}\cdot\underline{\vec{A}} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\ \underline{\vec{A}} = -i\vec{k}\wedge\underline{\vec{A}} \qquad \Delta\underline{\vec{A}} = -k^2\,\underline{\vec{A}}$$

1.2 Vitesse de phase

• **définitions** pour O.P.P.H $x \nearrow$ **sans atténuation**, on a $\vec{k} = k\vec{e}_x$, avec $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underline{s}(x,t) = s_0 e^{i(\omega t - kx)}$

$\varphi = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = \omega t - kx$ est appelée phase de l'onde si t varie de dt et x de dx, φ varie de $\mathrm{d}\varphi = \omega \mathrm{d}t - k\mathrm{d}x$

même phase en $x + \mathrm{d}x$ à $t + \mathrm{d}t$ qu'en x à $t \Leftrightarrow \mathrm{d}\varphi = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega}{k}$

$\Rightarrow \dfrac{\omega}{k}$ est la vitesse de propagation de la phase ; $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ est la **vitesse de phase**

milieu NON dispersif : éq. d'onde de d'Alembert $\Rightarrow k = \dfrac{\omega}{c} \Leftrightarrow v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = c \ \forall \omega$

toutes les composantes sinusoïdales de la perturbation se propagent à la même vitesse

milieu DISPERSIF $\Rightarrow v_\varphi$ dépend de $\omega \Rightarrow k(\omega) = \dfrac{\omega}{v_\varphi(\omega)}$

la relation de dispersion n'est plus linéaire
les composantes sinusoïdales d'une O.P.P se propagent à des vitesses différentes,
ce qui entraîne la déformation de la perturbation lors de sa propagation

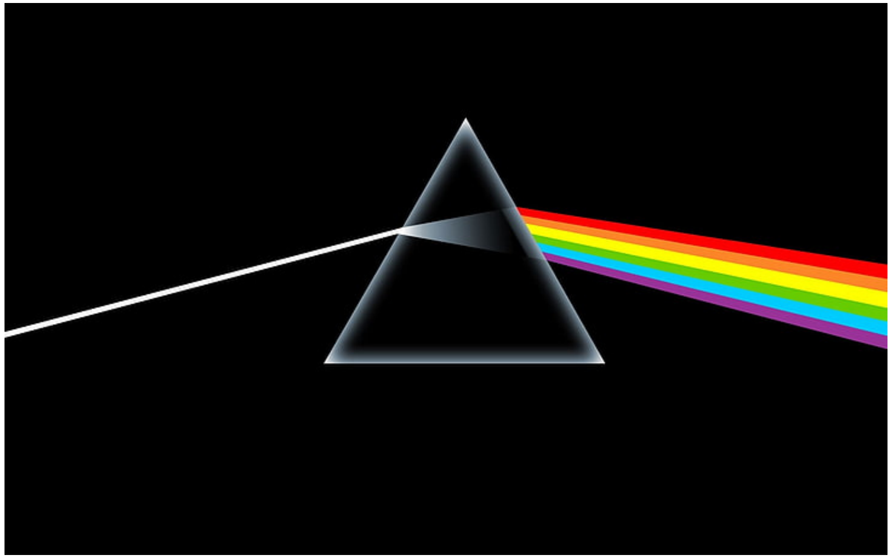
• dispersion dans un milieu transparent (non absorbant)

pour les O.P.P.H **électromagnétiques** dans un milieu transparent, on définit l'indice de réfraction *n* de ce milieu par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \qquad n > 1 \text{ dans le domaine de l'optique}$$

comme *n* dépend de ω (ou de la longueur d'onde λ dans le vide), on a dispersion : les différentes composantes sinusoïdales du signal ne se propagent pas à la même vitesse

phénomène observé quand un prisme sépare les différentes couleurs d'un faisceau de lumière blanche incident



les milieux transparents diélectriques sont également caractérisés par ε_r permittivité relative, qui dépend de ω

par rapport au vide : $\boxed{\varepsilon_0 \longrightarrow \varepsilon_0\,\varepsilon_r}$

$$c \to v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \Rightarrow \boxed{n = \sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$k_{\text{vide}} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \to \boxed{k = \frac{\omega}{v_\varphi} = \frac{n\omega}{c}} = \frac{2\pi n}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{milieu}}} \Rightarrow \boxed{\lambda_{\text{milieu}} = \frac{\lambda}{n}}$$

$$\vec{S}_{\text{Pvide}} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{e}_x \to \boxed{\vec{S}_p = \frac{nE^2}{\mu_0 c}\vec{e}_x}$$

quelques valeurs de n à 15°C

air sec	$n = 1{,}000277 \simeq 1$
eau	$n = 1{,}333 \simeq 4/3$
verre « crown » (classique)	$n = 1{,}650$
verre « flint »	$n = 1{,}520 \simeq 1{,}5$
diamant	$n = 2{,}415$

• propagation sans atténuation d'une O.P.P quelconque dans un milieu dispersif

$$s(x=0,t)=F(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_{0}^{+\infty}\tilde{F}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\right)\text{ puisque } s(x,t)\in\mathbb{R}$$

$\omega\mapsto\tilde{F}(\omega)$ est la transformée de Fourier de $t\mapsto s(x=0,t)=F(t)$

$$\left(\tilde{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\right)$$

milieu linéaire $\Rightarrow$ pour déterminer le signal $s(x\neq 0,t)$ il faut sommer toutes les composantes sinusoïdales en x à l'instant t

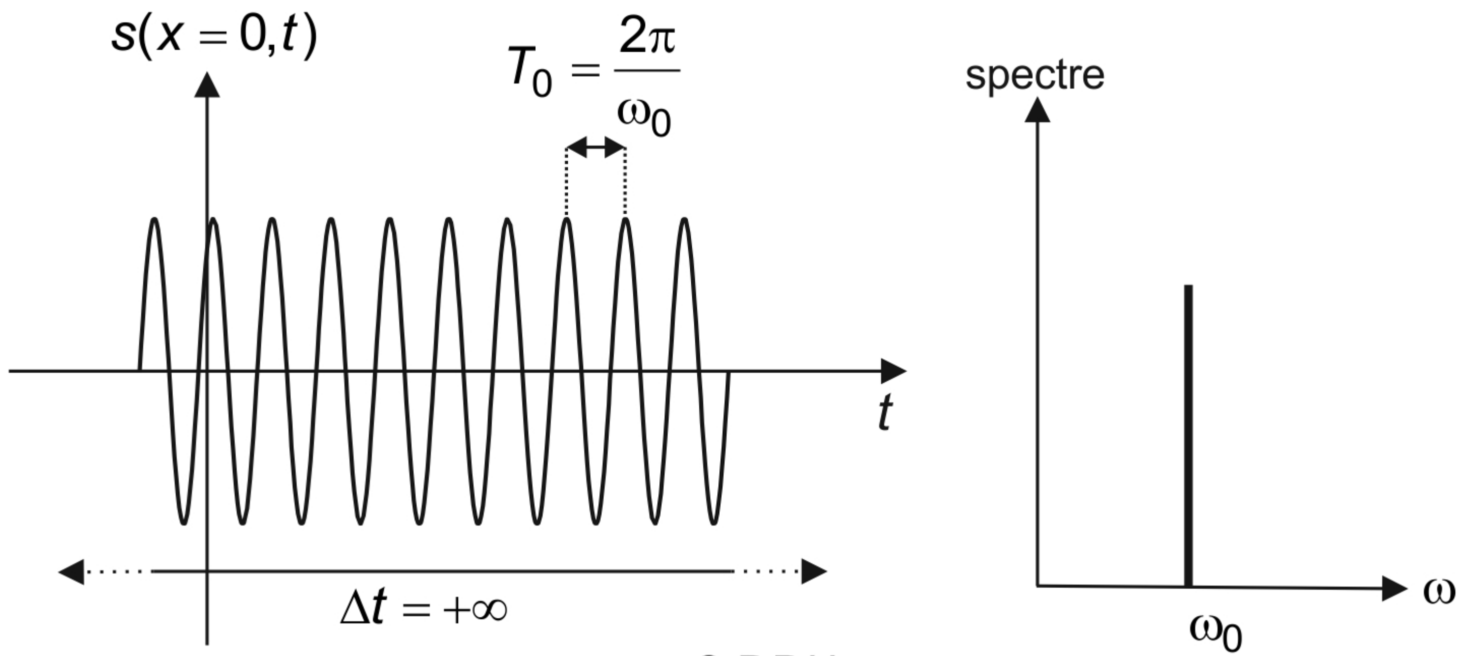
une telle composante s'est propagée à la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)=\dfrac{\omega}{k(\omega)}$

$$\tilde{F}(\omega)e^{i\omega t}\text{ en } x=0\rightarrow\tilde{F}(\omega)e^{i[\omega t-k(\omega)x]}\text{ en } x\neq 0$$

$$\Rightarrow\boxed{s(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(\omega)e^{i[\omega t-k(\omega)x]}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_{0}^{+\infty}\tilde{F}(\omega)e^{i[\omega t-k(\omega)x]}\mathrm{d}\omega\right)}$$

la composante $\tilde{F}(\omega_0)e^{i\omega_0 t}$, qui se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega_0}{k(\omega_0)} = \dfrac{\omega_0}{k_0}$

est une composante *mathématique* du signal ; son spectre est une raie infiniment fine $\Rightarrow$ pas de réalité physique, puisqu'elle correspond à une onde purement sinusoïdale, sans début ni fin.



O.P.P.H

dans le domaine des ondes *électromagnétiques*, on peut donc avoir $v_\varphi > c$, vitesse de la lumière dans le vide
une O.P.P.H ne transportant ni énergie, ni information, ne va pas à l'encontre de la théorie de la relativité d'Einstein

1.3 Vitesse de groupe

• première approche, somme de deux O.P.P.H

s_1 et s_2 deux O.P.P.H de même amplitude S_0 et de pulsations proches $\omega_0 \pm \delta\omega/2$ avec $\delta\omega << \omega_0$

propagation dans un milieu dispersif linéaire :

$$k\left(\omega_0 \pm \frac{\delta\omega}{2}\right) = k(\omega_0) \pm \frac{\delta\omega}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0) = k_0 \pm \frac{\delta k}{2} \quad \text{(D.L à l'ordre 1)}$$

$$\Rightarrow s(x,t) = \underbrace{S_0 \cos\left[(\omega_0 - \delta\omega/2)t - (k_0 - \delta k/2)x\right]}_{s_1(x,t)} + \underbrace{S_0 \cos\left[(\omega_0 + \delta\omega/2)t - (k_0 + \delta k/2)x\right]}_{s_2(x,t)}$$

$$= 2S_0 \cos\left[\omega_0 t - k_0 x\right] \cos\left[\delta\omega \cdot t/2 - \delta k \cdot x/2\right]$$

on a des **battements** :

$t \mapsto \cos\left[\omega_0 t - k_0 x\right]$ de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ est modulée par :

$t \mapsto 2S_0 \cos\left[\delta\omega \cdot t/2 - \delta k \cdot x/2\right]$, enveloppe de période $T = 2\pi/\delta\omega >> T_0$

Ces battements s'expliquent par les *interférences* entre s_1 et s_2 :

— interférences constructives aux instants pour lesquels, en x donné, s_1 et s_2 quasiment en phase $\Rightarrow$ l'enveloppe a un maximum d'amplitude

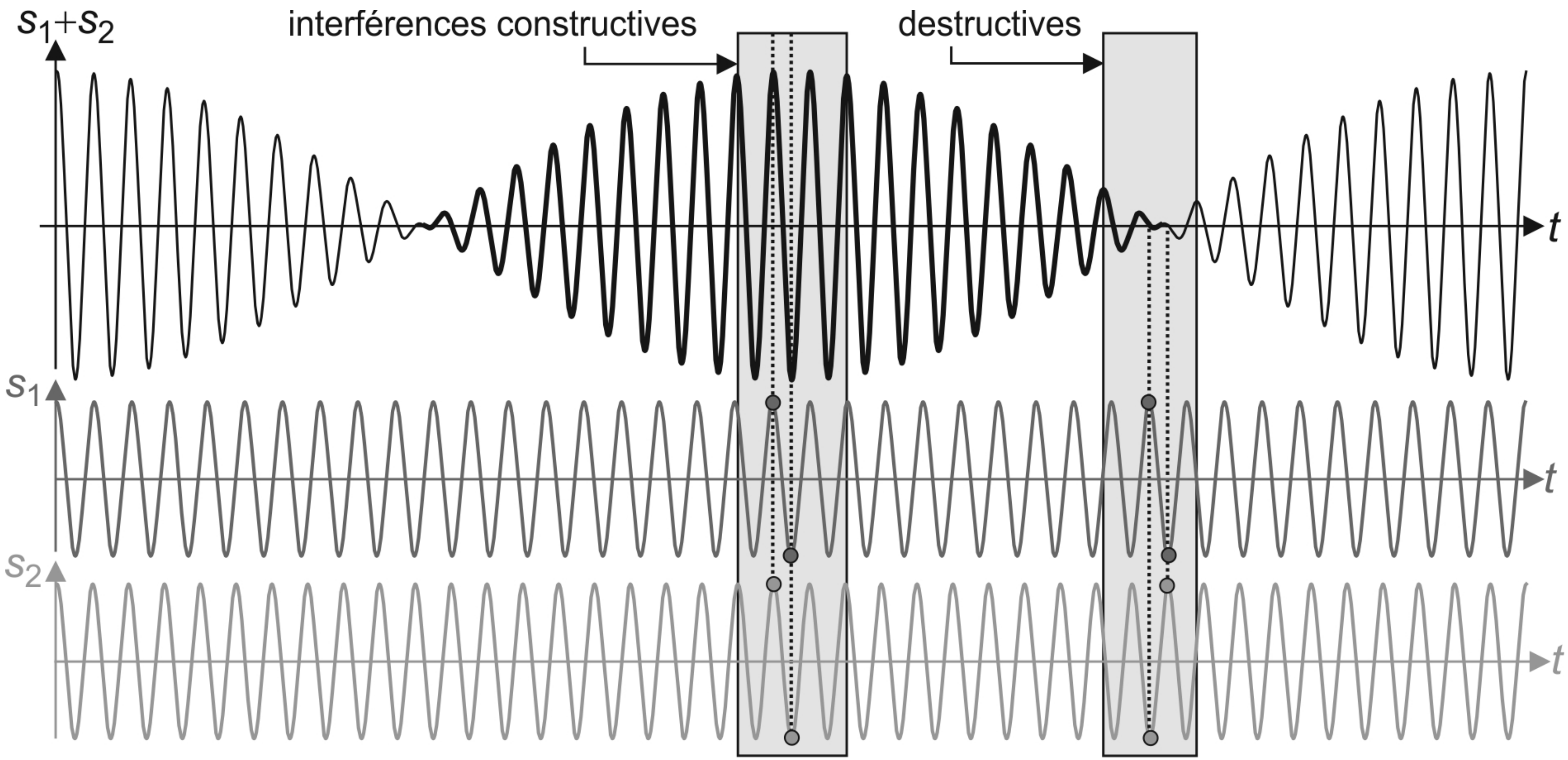
— interférences destructives aux instants pour lesquels s_1 et s_2 sont quasiment en opposition de phase $\Rightarrow$ l'enveloppe s'annule

$$s(x,t) = 2S_0 \cos\left[\delta\omega \cdot t/2 - \delta k \cdot x/2\right] \cdot \cos\left[\omega_0 t - k_0 x\right]$$

"O.P.P.H", se propage à $v_\varphi = \dfrac{\omega_0}{k_0}$

enveloppe, se propage à $v_g = \dfrac{\delta\omega}{\delta k} \simeq 1/\dfrac{dk}{d\omega}(\omega_0) \simeq \dfrac{d\omega}{dk}(k_0)$

« **vitesse de groupe** » car c'est la vitesse des crêtes du signal, lieu des interférences constructives des différentes O.P.P.H constituant le signal



Battements par sommation de deux O.P.P.H de pulsations très proches et de même amplitude.

remarque : avec deux O.P.P.H, l'onde résultante, qui n'a toujours ni début ni fin, n'est pas physiquement réalisable

• deuxième approche, somme continue d'O.P.P.H

si on somme un *continuum* d'O.P.P.H de pulsations très proches de ω_0, ces ondes de la forme $a(\omega)\cos\left[\omega t - k(\omega)x + \phi(\omega)\right]$, avec $a(\omega) \geq 0$ interfèrent constructivement en x à la date t si leur phase :

$$\varphi(x,t,\omega) = \omega t - k(\omega)x + \phi(\omega) \text{ est identique, égale à } n\pi,\ n \in \mathbb{N}, \text{ au voisinage de } \omega_0$$

$\phi(\omega)$ phase des ondes en $x = 0$ à $t = 0$

$$\varphi(x,t,\omega) = \omega t - k(\omega)x + \phi(\omega) = Cte\ \forall\omega \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\omega}(\omega_0) = t - \frac{dk}{d\omega}(\omega_0)x + \frac{d\phi}{d\omega}(\omega_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dk}{d\omega}(\omega_0)x = t + \frac{d\phi}{d\omega}(\omega_0) \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}(k_0)}$$

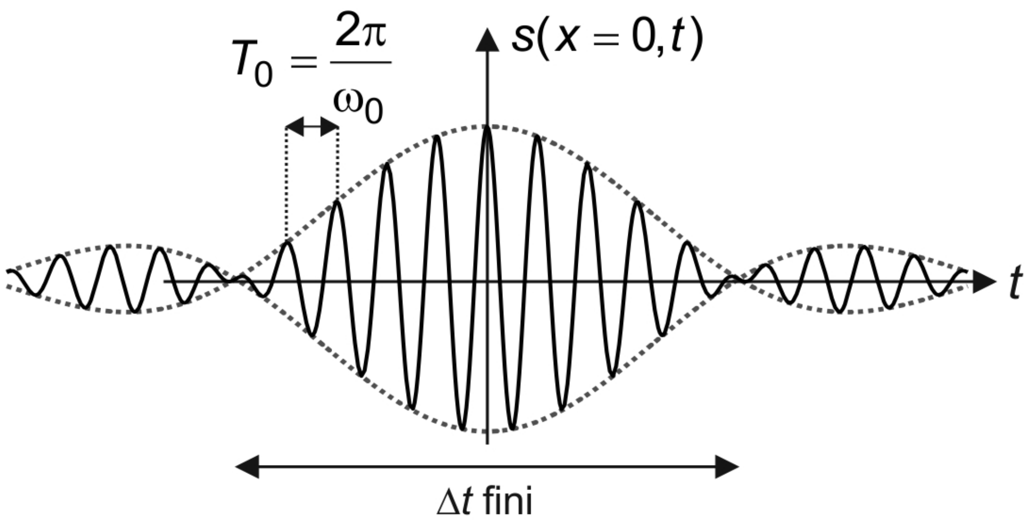
remarque : si $\varphi = n\pi + \pi/2$, les interférences sont destructives et leur somme est nulle, mais le lieu de ces interférences se propage toujours avec v_g tout comme les autres points de l'enveloppe de l'O.P.P.H de pulsation ω_0, caractérisés par une phase constante quelconque donc une amplitude constante

la vitesse de groupe est la vitesse de l'enveloppe du signal (là où la phase des ondes de pulsation très proche de ω_0 est constante).

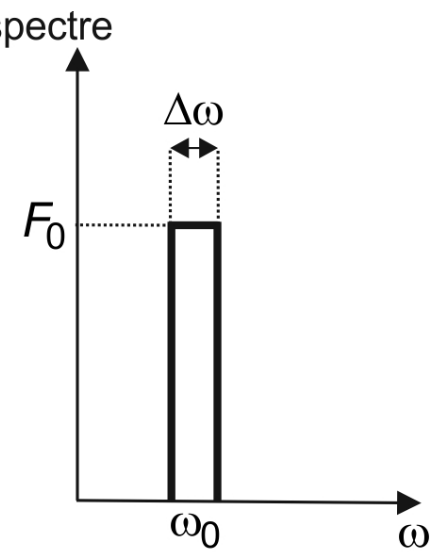
paquet d'onde étroit

• troisième approche, expression temporelle d'un paquet d'onde étroit

paquet d'ondes étroit (ou *train d'ondes*) : le spectre possède une largeur $\Delta\omega$ très petite autour de ω_0, mais non nulle (signal réalisable physiquement)



paquet d'ondes très étroit



pour simplifier les calculs : paquet d'ondes dont le spectre est un rectangle

pour $\omega \in \left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$: D.L à l'ordre 1 en $\eta = \omega - \omega_0$ de $\omega \mapsto k(\omega)$

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0) = k_0 + \eta\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)$$

$$s(x,t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}\tilde{F}(\omega)e^{i[\omega t - k(\omega)x]}\mathrm{d}\omega\right) = \frac{F_0}{\pi}\cdot\mathrm{Re}\left(\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} e^{i\left[\omega t - \left(k_0 + (\omega-\omega_0)\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)\right)x\right]}\mathrm{d}\omega\right)$$

$$s(x,t) = \frac{F_0}{\pi}\cdot\mathrm{Re}\left(e^{i[\omega_0 t - k_0 x]}\int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} e^{i\eta\left[t - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)x\right]}\mathrm{d}\eta\right) \qquad \eta = \omega - \omega_0$$

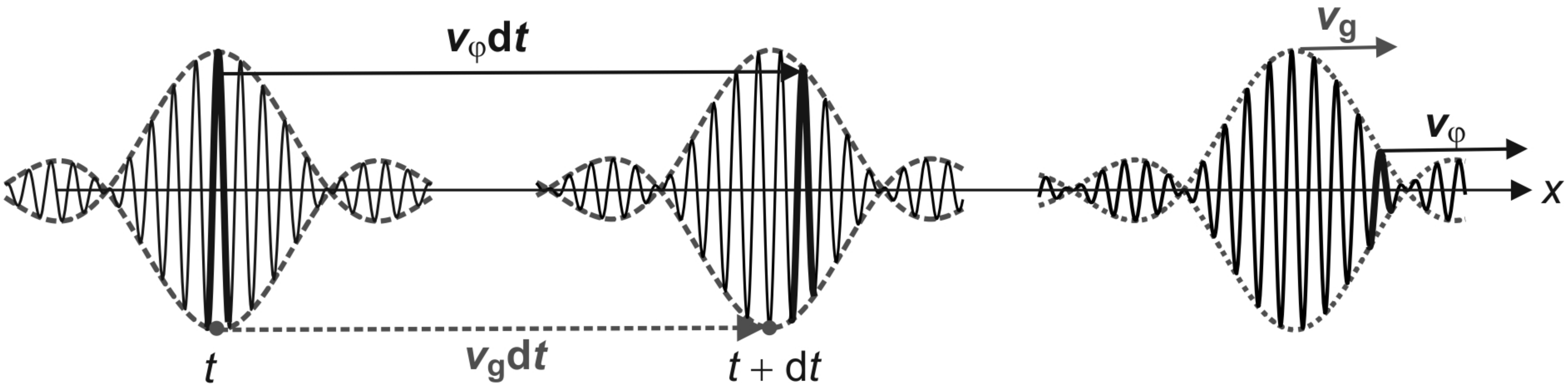
$$= \frac{F_0\Delta\omega}{\pi}\mathrm{Re}\left(e^{i[\omega_0 t - k_0 x]}\right)\cdot\mathrm{sinc}\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)x\right)\right]$$

$$\mathrm{sinc}(X) = \frac{\sin X}{X}$$ fonction sinus cardinal

finalement : $s(x,t) = \frac{F_0\Delta\omega}{\pi}\mathrm{sinc}\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)x\right)\right]\cdot\cos(\omega_0 t - k_0 x)$

$$= \underbrace{\frac{F_0\Delta\omega}{\pi}\mathrm{sinc}\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{x}{v_g}\right)\right]}_{\text{enveloppe, célérité } v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(k_0)} \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t - k_0 x)}_{\text{O.P.P.H, célérité } v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}}$$

$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ vitesse de groupe : vitesse à laquelle se déplace l'enveloppe du paquet d'ondes de faible largeur spectrale autour de ω_0

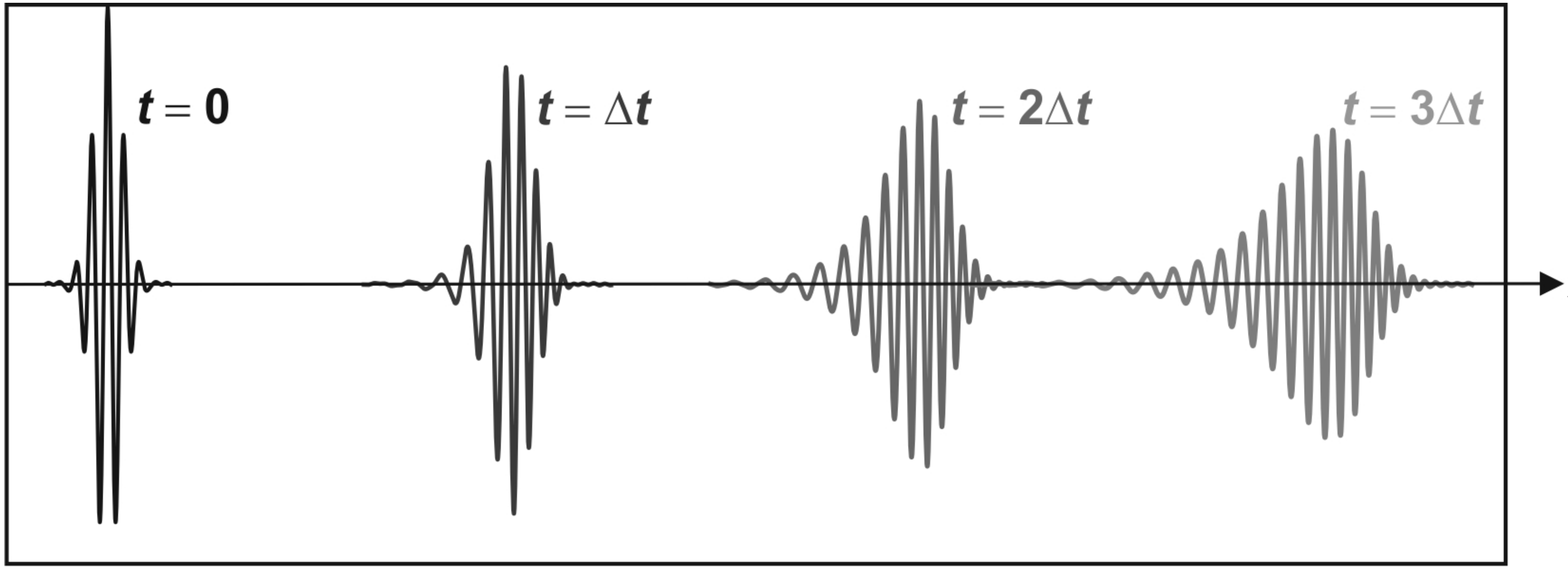


v_g a un sens physique car l'enveloppe transporte de l'information

pour une onde *électromagnétique* $v_g \leq c$ célérité de la lumière dans le vide

analogie avec la modulation d'amplitude : la « porteuse » ne véhicule aucune information, contrairement au signal modulant qui enveloppe la porteuse

si la largeur spectrale n'est plus très petite, dispersion $\Rightarrow$ déformation du paquet d'ondes



ici les composantes de plus grandes fréquences se propagent plus vite que celles dont les fréquences sont les plus faibles : il y a *étalement* d'un paquet d'ondes lors de sa propagation

1.4 Aspect énergétique

$$\Phi(x,t) = A \cdot s^2(x,t) = \underbrace{A\left(\frac{F_0\Delta\omega}{\pi}\right)^2 \mathrm{sinc}^2\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{x}{v_g}\right)\right]}_{\text{enveloppe, reste constante sur une durée } T_0} \cdot \cos^2(\omega_0 t - k_0 x)$$

grandeur énergétique (énergie volumique, vecteur densité volumique de courants d'énergie pour une O.P.P), fonction **quadratique du signal**

$$\langle\Phi\rangle_{T_0}(x,t) = \frac{A}{2}\left(\frac{F_0\Delta\omega}{\pi}\right)^2 \mathrm{sinc}^2\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{x}{v_g}\right)\right]$$

moyenne sur $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

en l'absence d'absorption, l'énergie moyenne est transportée par l'enveloppe, et se propage donc à la vitesse de groupe : $c_U = v_g$

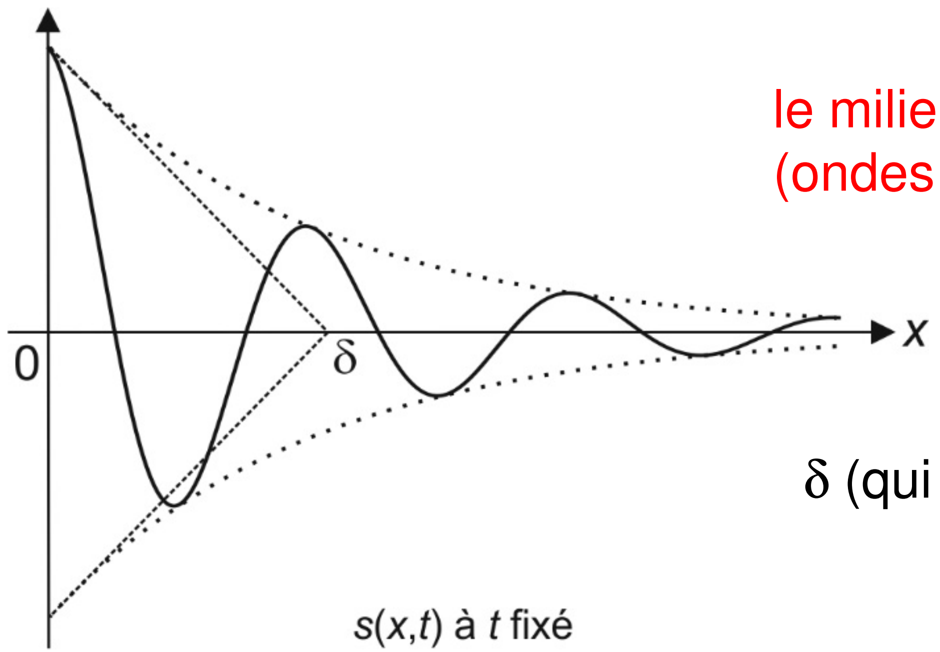
1.5 Atténuation

- **les différentes causes**

O.P.P : $\underline{s}(x,t) = s_0 e^{i(\omega t - kx)}$, avec $\omega \in \mathbb{R}^+$, solution de l'équation de propagation dans le milieu linéaire $\Rightarrow k(\omega) = k'(\omega) + ik''(\omega)$, avec $(k', k'') \in \mathbb{R}^2$

premier cas : onde $x \nearrow$: $k'(\omega) > 0$ et $k''(\omega) = -\dfrac{1}{\delta(\omega)} < 0$

$\Rightarrow \underline{s}(x,t) = s_0 e^{i\left(\omega t - k'x + i\frac{x}{\delta}\right)} = s_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - k'x)}$ l'onde s'atténue lors de sa propagation



$s(x,t)$ à t fixé

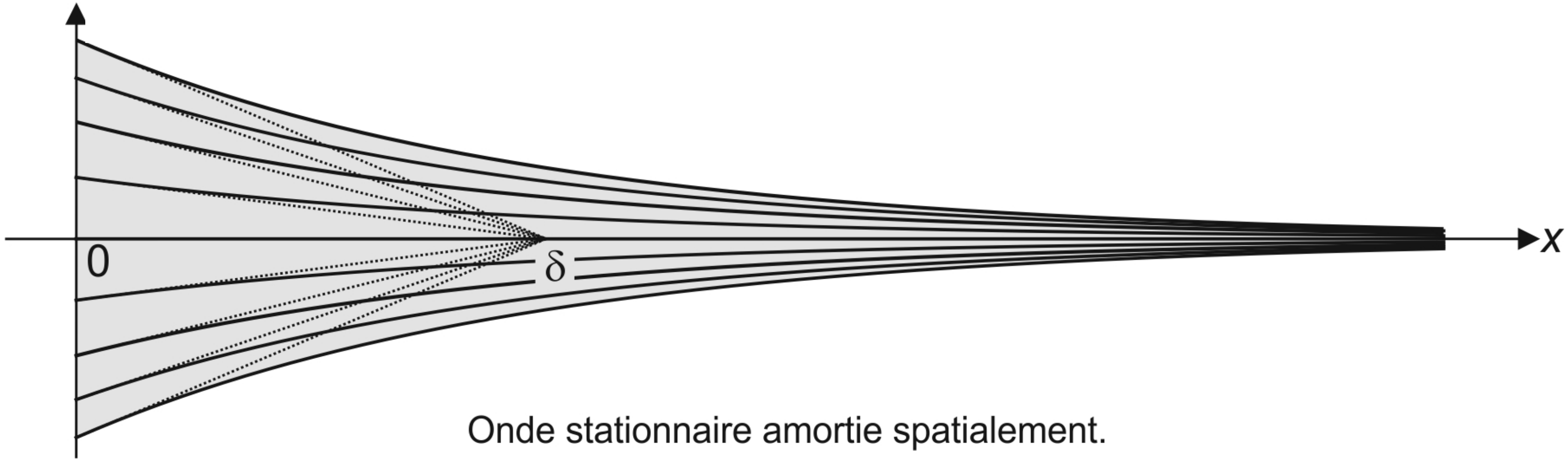
le milieu est absorbant
(ondes électromagnétiques dans un conducteur)

δ (qui dépend de ω) : épaisseur de peau deuxième cas : onde stationnaire : $k'(\omega) = 0$ et $k''(\omega) = -\dfrac{1}{\delta(\omega)} < 0$

$$\Rightarrow \underline{s}(x,t) = s_0 e^{i\left(\omega t + i\frac{x}{\delta}\right)} = s_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow s(x,t) = s_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t)$$

milieu non absorbant, mais pour certains ω, l'onde s'atténue car c'est une somme d'ondes rayonnées par les particules du milieu qui interfèrent destructivement (ondes électromagnétiques dans un plasma)



Onde stationnaire amortie spatialement.

si onde $x \nearrow$: $k'(\omega) > 0$ et $k''(\omega) = +\dfrac{1}{\delta(\omega)} > 0 \quad \Rightarrow \underline{s}(x,t) = s_0 e^{\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - k'x)}$

onde amplifiée lors de sa propagation, par exemple : milieu actif d'une cavité laser

le pompage (apport d'énergie extérieur) permet d'obtenir des désexcitations stimulées qui amplifient l'onde électromagnétique lors de sa propagation

• **vitesse de phase**

onde atténuée : prenons $\underline{s}(x,t) = s_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - k'x)}$

propagation si $k' \neq 0 \Rightarrow v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}$

$$s(x,t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \tilde{F}(\omega) e^{k''(\omega)x} e^{i[\omega t - k'(\omega)x]} \, \mathrm{d}\omega \right)$$

$$\Downarrow$$

$$s(x,t) \neq \underbrace{\frac{F_0 \Delta\omega}{\pi} \mathrm{sinc}\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{x}{v_g}\right)\right]}_{\text{enveloppe, célérité } v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}(k'_0)} \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t - k'_0 x)}_{\text{O.P.P.H, célérité } v_\varphi = \frac{\omega_0}{k'_0}}$$

la vitesse de groupe ainsi définie n'a plus de sens physique lorsque l'onde est atténuée, et :

$$c_U \neq \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}(k'_0)$$

pour calculer la vitesse c_U de propagation de l'énergie moyenne, on effectue des bilans :

$$\vec{c}_U = \frac{\left\langle \vec{S}_\mathrm{P} \right\rangle}{\left\langle u \right\rangle},\ \vec{c}_U = \frac{\left\langle \vec{J}_\mathrm{ac} \right\rangle}{\left\langle u_\mathrm{ac} \right\rangle}...$$