

CONVERSION ÉLECTROMÉCANIQUE

1. CONTACTEUR ÉLECTROMAGNÉTIQUE EN TRANSLATION

1.1 Énergie magnétique

dans ce cours : approche **énergétique** de la conversion électromécanique

exemple : relais

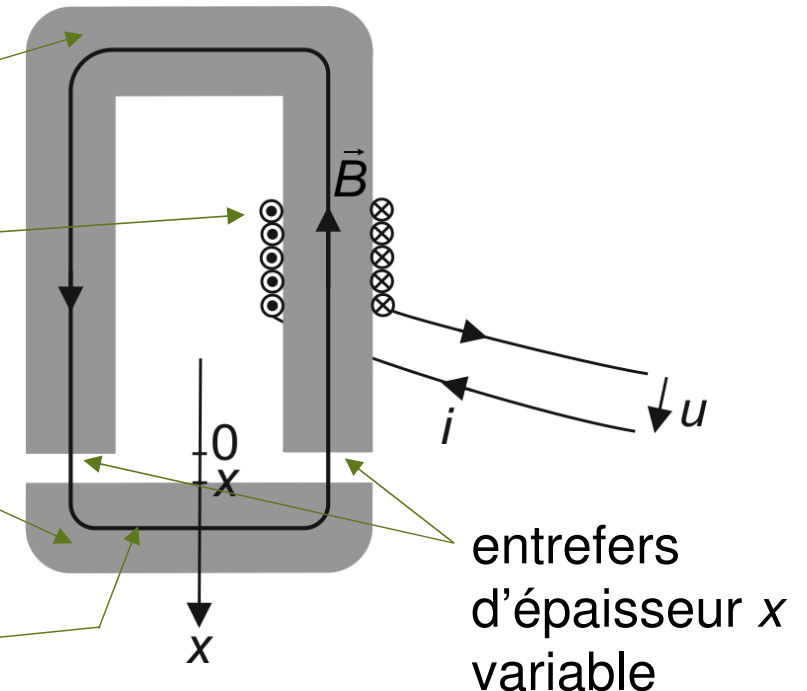
noyau ferromagnétique fixe de faible section

$\mathcal{S} \Rightarrow$ champs uniformes dans une section

bobine de N spires parcourue par un courant d'intensité i (électro-aimant)

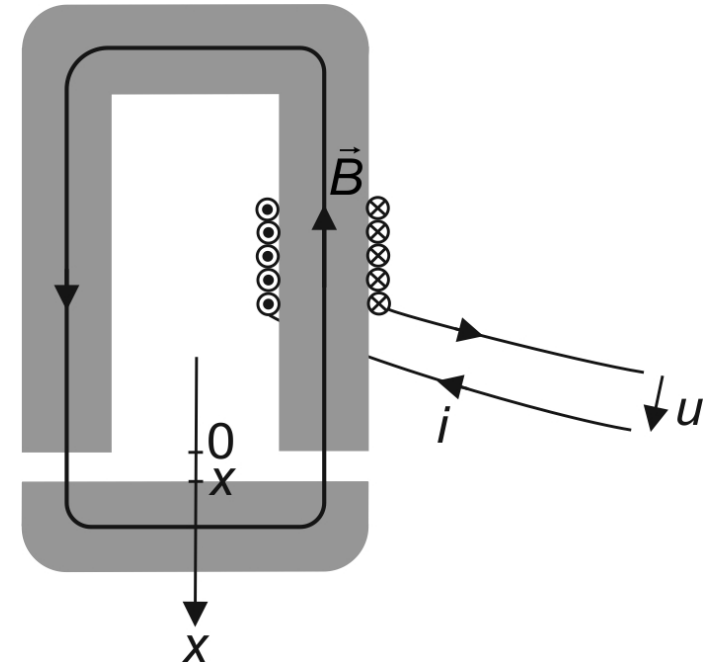
bloc ferromagnétique mobile en translation selon Ox , « contacteur électromagnétique »

ℓ : longueur moyenne du circuit magnétique en l'absence de l'entrefer $\Rightarrow \ell + 2x$ avec entrefer



hypothèse :

- matériau ferromagnétique linéaire $\mu_r \gg 1$
 $\Rightarrow$ canalise le champ magnétique
- entrefers de faible épaisseur x
 $\Rightarrow$ le tube de champ reste de section $\mathcal{S}$ dans l'entrefer



(1) conservation du flux du champ magnétique

$\Rightarrow$ modules B uniforme dans le matériau et B_e uniforme dans l'entrefer et $B = B_e$

(2) H et H_e excitations dans le matériau et l'entrefer $\Rightarrow B = B_e = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 H_e$

(3) théorème d'Ampère sur le contour de longueur $\ell + 2x$: $\ell H + 2x H_e = Ni$

$$\text{soit : } \left(\frac{\ell}{\mu_r} H + 2x \right) \frac{B}{\mu_0} = Ni \Rightarrow B = \frac{\mu_0 Ni}{\frac{\ell}{\mu_r} + 2x}$$

flux à travers la bobine : $\Phi = NB \mathcal{S} = \frac{\mu_0 N^2 \mathcal{S}}{\frac{\ell}{\mu_r} + 2x} i = L(x) i$

l'inductance dépend de l'épaisseur x des entrefers

énergie magnétique du système : $U_m = \frac{1}{2} L(x) i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 \mathcal{S}}{\frac{\ell}{\mu_r} + 2x} i^2$

ou, car $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}$ pour un matériau linéaire :

EXERCICE :

retrouver cette formule en utilisant l'expression de l'énergie magnétique volumique

SOLUTION :

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} \text{ pour le matériau ferromagnétique}$$

$$u_{me} = \frac{B^2}{2\mu_0} \text{ dans l'entrefer (air)}$$

$$\Rightarrow U_m = \frac{B^2 \mathcal{L}}{2\mu_0} \left[\frac{\ell}{\mu_r} + 2x \right] = \frac{(\mu_0 Ni)^2}{\left[\frac{\ell}{\mu_r} + 2x \right]^2} \frac{\mathcal{L}}{2\mu_0} \left[\frac{\ell}{\mu_r} + 2x \right] = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 \mathcal{L}}{\frac{\ell}{\mu_r} + 2x} i^2$$

1.2 Force intérieure

système Σ constitué par la bobine, les matériaux ferromagnétiques et l'entrefer

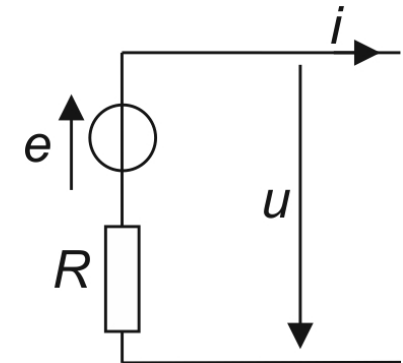
Σ reçoit pendant dt les énergies mécanique $\delta W_{\text{ext}} = F_{\text{ext}} dx$ et électrique $u idt$

loi des mailles : $u = Ri - e = Ri + \frac{d\Phi}{dt}$ car la f.e.m est $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ (Faraday)

↑
résistance de la bobine

attention ! $e = -\frac{d\Phi}{dt} \neq -L(x) \frac{di}{dt}$ car L dépend de x qui dépend de t

ne pas remplacer le générateur de f.e.m e par le symbole d'une bobine sur le schéma



$$\Rightarrow \boxed{u idt + F_{\text{ext}} dx} = Ri^2 dt + \boxed{id\Phi + F_{\text{ext}} dx}$$

énergie reçue par Σ

énergie perdue par effet Joule

énergie stockée par Σ
 sous forme magnétique $U_m = \frac{1}{2} Li^2$
 ou cinétique E_c

$$\Rightarrow id\Phi + F_{\text{ext}}dx = dE_c + dU_m \quad \text{avec } \Phi = Li \text{ et } U_m = \frac{1}{2}Li^2$$

$$\Leftrightarrow i^2dL + Lidi + F_{\text{ext}}dx = dE_c + \frac{1}{2}i^2dL + Lidi \Rightarrow dE_c = F_{\text{ext}}dx + \frac{1}{2}i^2dL$$

théorème de l'énergie cinétique appliqué au bloc, qui est soumis à F_{ext} et à la force F exercée par le reste du système, que l'on cherche à connaître :

$$dE_c = F_{\text{ext}}dx + Fdx \Rightarrow Fdx = \frac{1}{2}i^2dL \text{ soit : } F = \left(\frac{\partial U_m}{\partial x} \right)_i$$

on généralise cette formule :

— un contacteur électromagnétique en *translation* subit la force $F = \left(\frac{\partial U_m}{\partial x} \right)_i$

— un contacteur électromagnétique dont la *rotation* autour d'un axe fixe Oz est

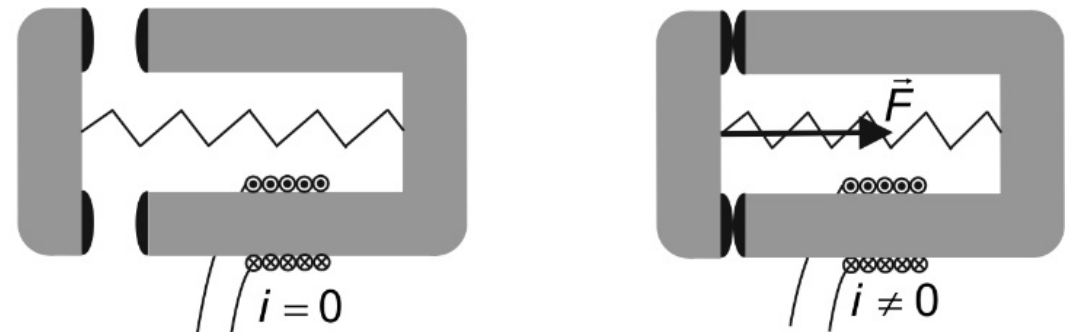
repérée par un angle θ , subit un couple de moment $\Gamma = \left(\frac{\partial U_m}{\partial \theta} \right)_i$

où U_m est l'énergie magnétique stockée dans le système {fer, entrefer}

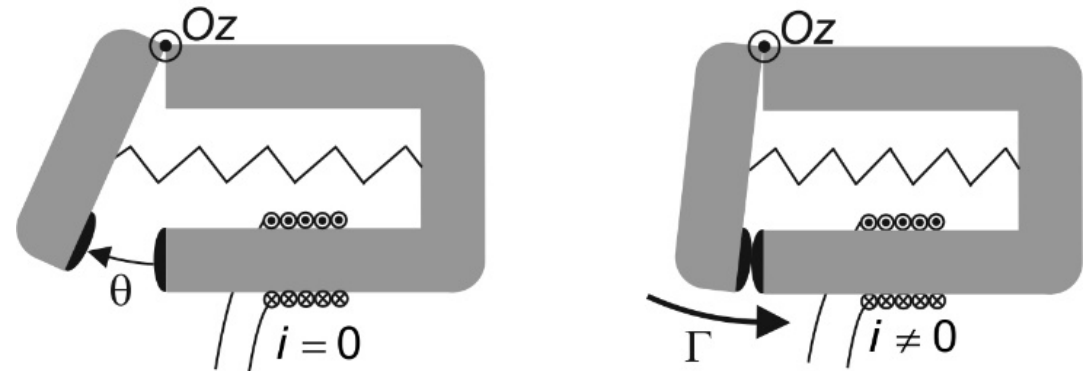
contacteur : circuit ferromagnétique qui peut être ouvert ou fermé par action d'un faible courant

permet de déplacer une pièce mobile en translation ou en rotation

le contact autorise le passage de forts courants



contacteur en translation



contacteur en rotation

translation étudiée : $U_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 \mathcal{L}}{\frac{\ell}{\mu_r} + 2x} i^2 \Rightarrow F = - \frac{\mu_0 N^2 \mathcal{L}}{\left[\frac{\ell}{\mu_r} + 2x \right]^2} i^2 \leq 0$: force attractive quel que soit le signe de i

le système cherche à confiner le champ magnétique, soit ici à réduire l'entrefer

$$F_{\max} = \frac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 \mathcal{S}}{\ell^2} i^2 \text{ pour } x = 0$$

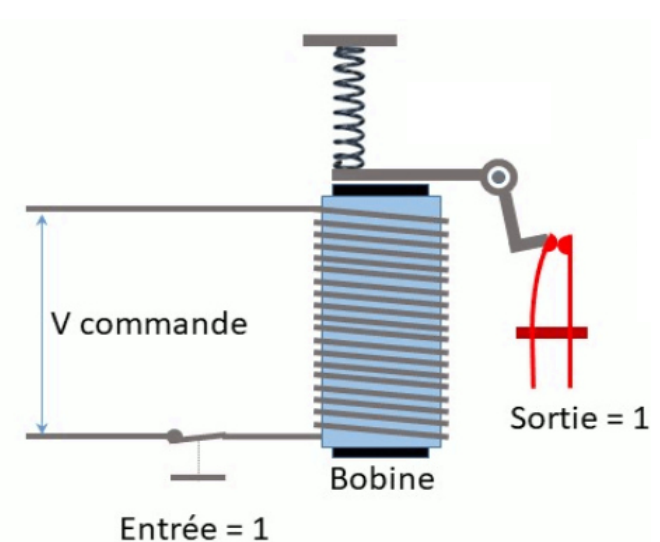
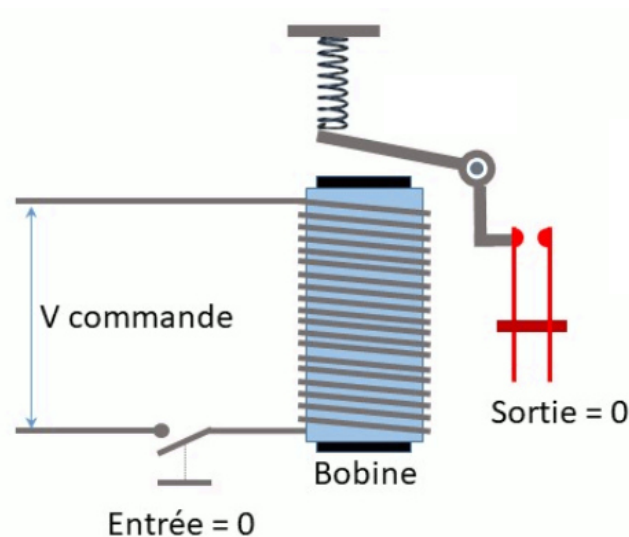
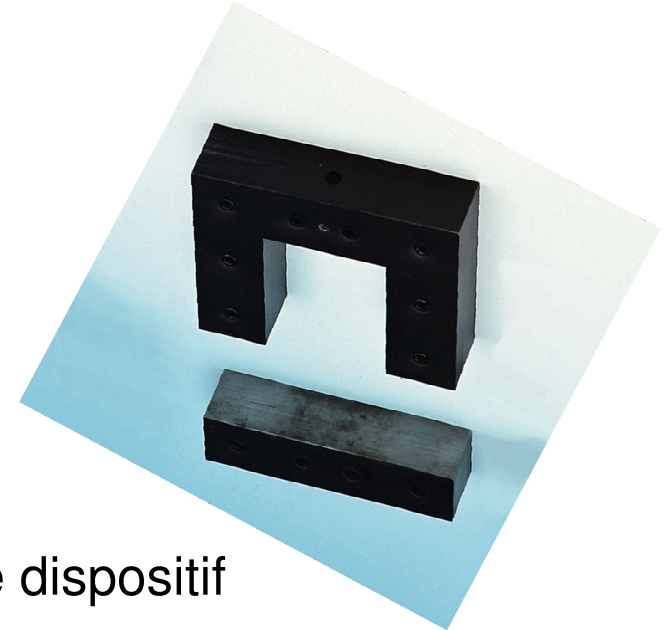
A.N : $\mu_r = 2000$ $N = 500$ $\ell = 50 \text{ cm}$ $\mathcal{S} = 16 \text{ cm}^2$

$i(t) = I\sqrt{2} \cos(2\pi ft)$ avec $I = 50 \text{ mA}$ et $f = 50 \text{ Hz}$

$\Rightarrow \langle F \rangle_{\max} = 10 \text{ N}$

on peut lever une masse ferromagnétique de 1 kg avec ce dispositif

applications : électroaimants de levage, relais



2. MACHINE SYNCHRONES

2.1 Champ statorique

matériau magnétique en fer doux, considéré comme linéaire et de perméabilité magnétique relative infinie

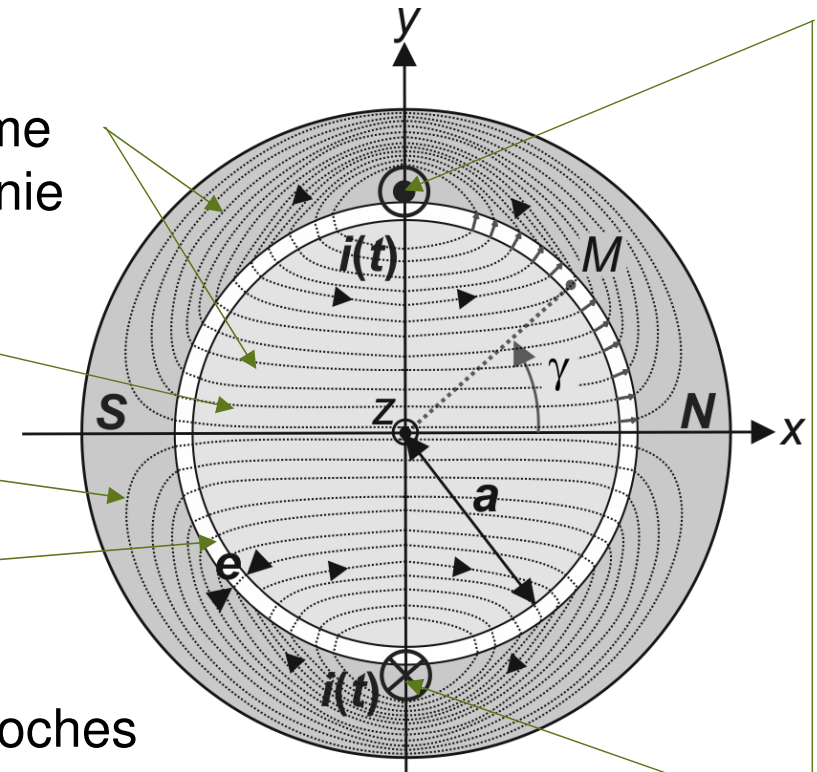
partie *tournante*, le *rotor*, d'axe Oz , de longueur ℓ et de rayon $a \ll \ell$

partie *fixe*, le *stator*, d'axe Oz , de longueur ℓ

entrefer d'épaisseur $e \ll a$

fils de cuivre parallèles à Oz placés dans des encoches taillées dans le stator, parcourus par des courants
 $\Rightarrow$ sources d'un champ magnétique statorique

on ne considère pour le moment qu'une seule spire (deux fils diamétralement opposés parcourus par des courants opposés)

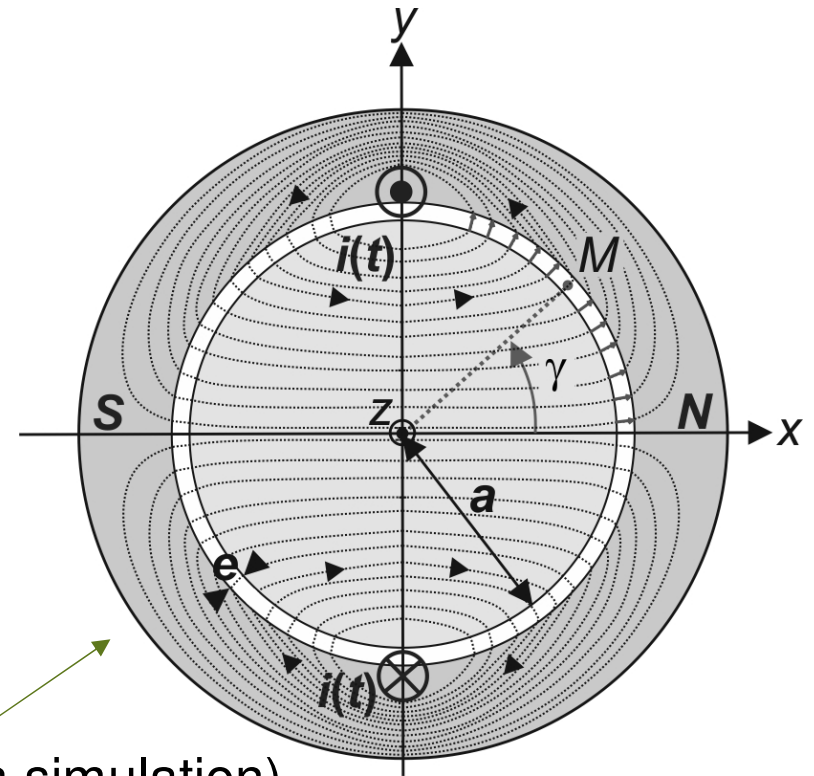


effets de bord négligés $\Rightarrow$ tout plan $\perp Oz$ est plan d'antisymétrie des courants $\Rightarrow$ le champ magnétique appartient à ce plan ($B_z = 0$)

on repère un point de l'entrefer par l'angle γ ($\gamma = 0$ correspond au plan médiateur des deux fils).

$\mu_r \rightarrow \infty \Rightarrow$ lignes de champ réfractées $\perp$ au fer lors du passage dans l'entrefer

$\Rightarrow \vec{B} = B(\gamma)\vec{e}_r$ radial dans l'entrefer (confirmé par la simulation)



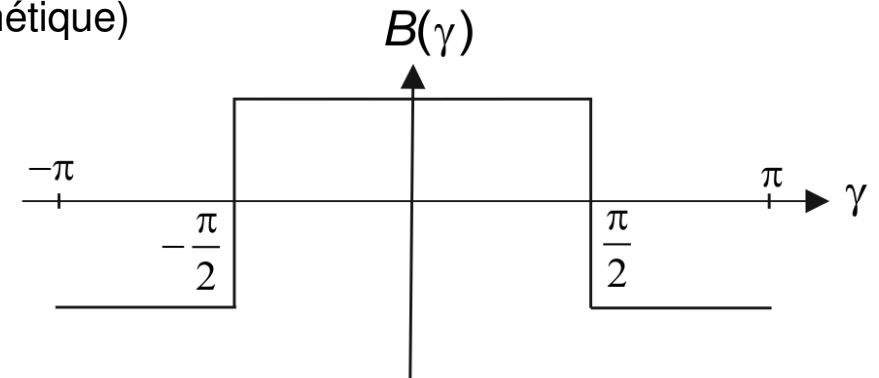
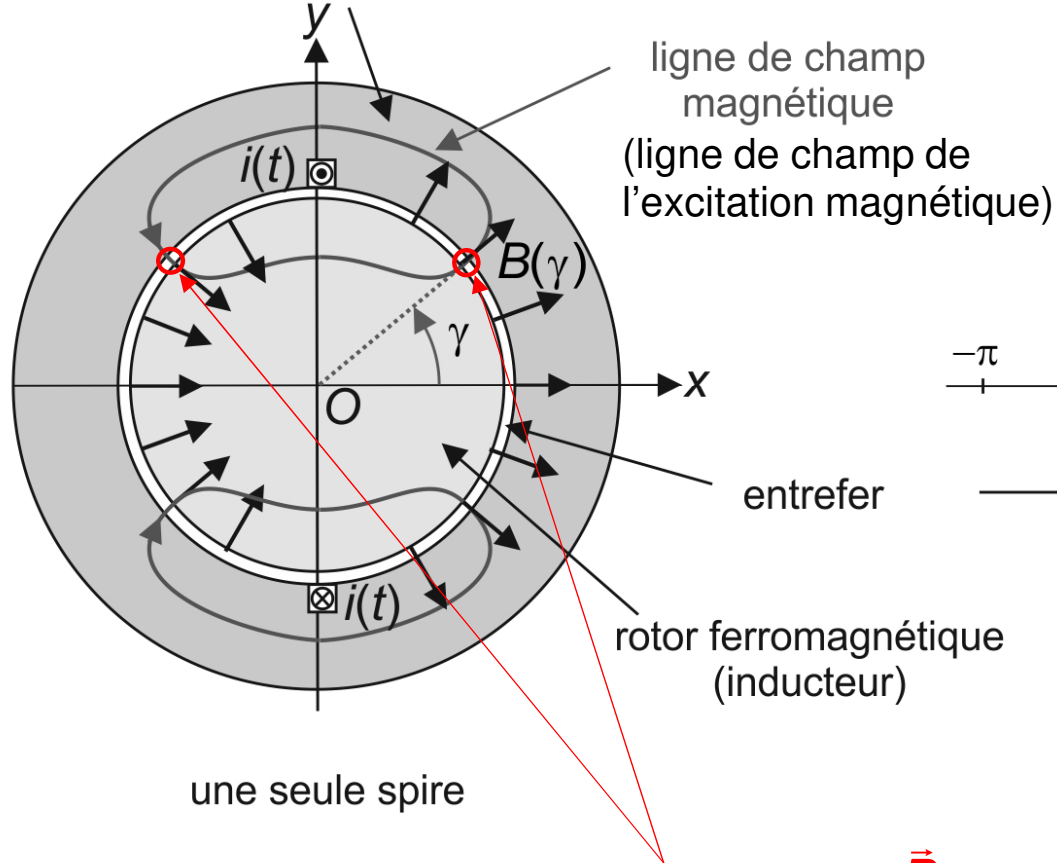
le plan $x = 0$ contenant les deux fils est un plan de symétrie de la distribution de courants $\Rightarrow$ le champ magnétique est antisymétrique par rapport à ce plan

$$\Rightarrow B(\pi - \gamma) = -B(\gamma)$$

le plan $y = 0$ médiateur des deux fils est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants $\Rightarrow$ le champ magnétique est symétrique par rapport à ce plan

$$\Rightarrow B(-\gamma) = B(\gamma)$$

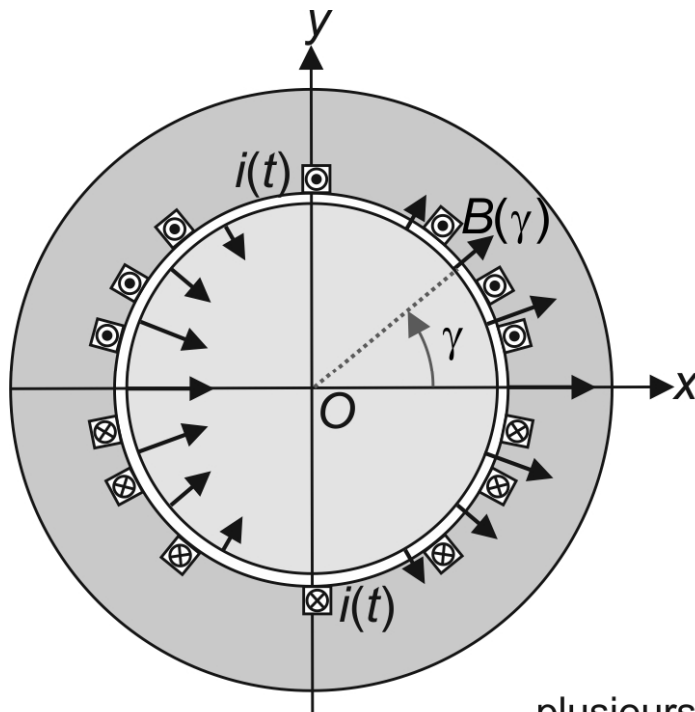
stator ferromagnétique (induit)



$\mu_r \rightarrow \infty \Rightarrow H_{\text{fer}} = 0$ dans le fer zones $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \neq \vec{0}$, $\approx$ uniforme et porté par $\vec{e}_r$

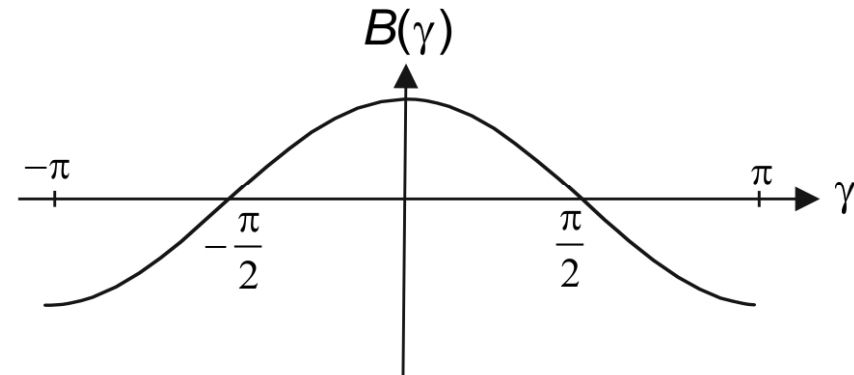
théorème d'Ampère : $\oint \underbrace{\vec{H} \cdot d\vec{OM}}_{2eH(\gamma)} = i \Rightarrow \begin{cases} B(\gamma) = \frac{\mu_0 i}{2e} \text{ pour } \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ B(\gamma) = -\frac{\mu_0 i}{2e} \text{ pour } \gamma \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

en rajoutant d'autres spires en série bien réparties, on garde la symétrie de $\vec{B}$ par rapport au plan $y = 0$ et l'antisymétrie par rapport au plan $x = 0$ tout en obtenant un champ variant **quasi-sinusoidalement** avec γ .



plusieurs spires convenablement réparties

$$\Rightarrow \vec{B}(\gamma) = K_s i \cos \gamma \vec{e}_r \text{ dans l'entrefer}$$



$$\vec{B}(\gamma) = K_s i(t) \cos \gamma [\cos \gamma \vec{e}_x + \sin \gamma \vec{e}_y] \Rightarrow \vec{B}_{\text{moyen}} = \frac{1}{2} K_s i(t) \vec{e}_x$$

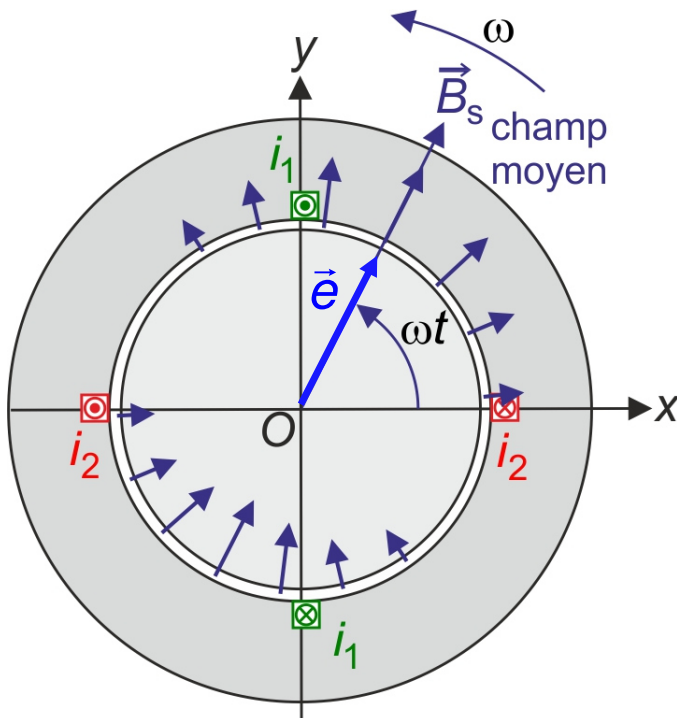
garde une direction fixe (dans laquelle B est maximal).

le fonctionnement des machines alternatives nécessite un champ magnétique ***tournant***
 $\Rightarrow$ **DEUX** bobinages (« **phases** » **du stator**) parcourus par des courants sinusoïdaux de pulsation ω déphasés entre eux (le plus souvent : trois bobinages « triphasé ») :

- bobinage précédent (1) parcouru par $i_1(t) = I_s \cos(\omega t)$
- bobinage (2) obtenu par rotation de (1) de $+\frac{\pi}{2}$ / Oz parcouru par $i_2(t) = I_s \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow \vec{B}_s = B_s(\gamma) \vec{e}_r = [B_1(\gamma) + B_2(\gamma)] \vec{e}_r = \left[K_s i_1 \cos \gamma + K_s i_2 \cos \left(\gamma - \frac{\pi}{2} \right) \right] \vec{e}_r = I_s \sin(\omega t)$$

$$\vec{B}_s = [K_s i_1 \cos \gamma + K_s i_2 \sin \gamma] \vec{e}_r = K_s I_s [\cos(\omega t) \cos \gamma + \sin(\omega t) \sin \gamma] \vec{e}_r$$



$$\vec{B}_s(\gamma) = K_s I_s \cos(\gamma - \omega t) \vec{e}_r = B_{s\max} \cos(\gamma - \omega t) \vec{e}_r$$

dans l'entrefer, le champ magnétique statorique radial tourne à la vitesse angulaire ω autour de Oz
 le champ moyenné spatialement se trouve dans la direction $\vec{e}(t) = \cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y$

EXERCICE :

démontrer que $\vec{B}_{s \text{ moyen}} \propto \vec{e}(t)$

SOLUTION :

$$\vec{B}_s(\gamma) = K_s I_s \cos(\gamma - \omega t) \vec{e}_r$$

$$\vec{B}_s(\gamma) = K_s I_s [\cos(\omega t) \cos \gamma + \sin(\omega t) \sin \gamma] [\cos \gamma \vec{e}_x + \sin \gamma \vec{e}_y]$$

$$\vec{B}_{s \text{ moyen}} = \langle \vec{B}_s(\gamma) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma=0}^{2\pi} \vec{B}_s(\gamma) d\gamma \text{ champ moyenné spatialement}$$

$$\text{or } \langle \cos^2 \gamma \rangle = \langle \sin^2 \gamma \rangle = \frac{1}{2} \text{ et } \langle \sin \gamma \cos \gamma \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{s \text{ moyen}} = \frac{1}{2} K_s I_s [\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y] = \frac{1}{2} K_s I_s \vec{e}(t)$$

le champ moyen est bien dans la direction $\gamma = \omega t$

faibles puissances : champ rotorique stationnaire obtenu avec des **aimants permanents**

fortes puissances : rotor **alimenté électriquement** à l'aide de balais fixes qui frottent sur des bagues liées au rotor

2.3 Énergie magnétique

dans le fer $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} \xrightarrow{\mu_r \rightarrow \infty} 0$

⇒ **l'énergie magnétique du système est localisée dans l'entrefer ($\mu_r = 1$)**

$$U_m = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} d^3\mathcal{V} = \int_0^{2\pi} \frac{(B_s + B_r)^2}{2\mu_0} a e l d\gamma \text{ puisque } e \ll a$$

$$U_m = \frac{a e l}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} [K_s i_1 \cos \gamma + K_s i_2 \sin \gamma + K_r I_r \cos(\gamma - \theta)]^2 d\gamma$$

$$\text{or } \int_0^{2\pi} \cos^2 \gamma d\gamma = \int_0^{2\pi} \sin^2 \gamma d\gamma = \int_0^{2\pi} \cos^2(\gamma - \theta) d\gamma = \pi \text{ et } \int_0^{2\pi} \cos \gamma \sin \gamma d\gamma = 0$$

$$U_m = \frac{ae\ell}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} \left[(K_s i_1 \cos \gamma)^2 + (K_s i_2 \sin \gamma)^2 + (K_r l_r \cos(\gamma - \theta))^2 + 2K_s i_1 K_s i_2 \cos \gamma \sin \gamma \right. \\ \left. + 2K_s i_1 K_r l_r \cos \gamma \cos(\gamma - \theta) + 2K_s i_2 K_r l_r \sin \gamma \cos(\gamma - \theta) \right] d\gamma$$

$$\Rightarrow U_m = \frac{ae\ell}{2\mu_0} \left[\pi K_s^2 i_1^2 + \pi K_s^2 i_2^2 + \pi K_r^2 l_r^2 \right. \\ \left. + 2K_s K_r l_r \int_0^{2\pi} \left\{ i_1 \underbrace{\cos \gamma \cos(\gamma - \theta)}_{\frac{1}{2} \cos(2\gamma - \theta) + \frac{1}{2} \cos \theta} + i_2 \underbrace{\sin \gamma \cos(\gamma - \theta)}_{\frac{1}{2} \sin(2\gamma - \theta) + \frac{1}{2} \sin \theta} \right\} d\gamma \right]$$

$$\text{or } \int_0^{2\pi} \cos(2\gamma - \theta) d\gamma = \int_0^{2\pi} \sin(2\gamma - \theta) d\gamma = 0$$

$$\Rightarrow U_m = \frac{\pi ae\ell}{2\mu_0} \left[K_s^2 i_1^2 + K_s^2 i_2^2 + K_r^2 l_r^2 + 2K_s K_r i_1 l_r \cos \theta + 2K_s K_r i_2 l_r \sin \theta \right] \\ = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \frac{1}{2} L_r l_r^2 + M_{12} i_1 i_2 + M_{1r} i_1 l_r + M_{2r} i_2 l_r$$

$$L_1 = L_2 = L_s = \frac{\pi a e \ell K_s^2}{\mu_0}$$

$$M_{1r} = \underbrace{\frac{\pi a e \ell K_r K_s}{\mu_0}}_{M_0} \cos \theta$$

$$M_{12} = 0$$

$$L_r = \frac{\pi a e \ell K_r^2}{\mu_0}$$

$$M_{2r} = \underbrace{\frac{\pi a e \ell K_r K_s}{\mu_0}}_{M_0} \sin \theta$$

seuls les termes $\tilde{U}_m(\theta) = M_{1r}(\theta)i_1I_r + M_{2r}(\theta)i_2I_r$ (couplage entre les phases du stator et le rotor) dépendent de θ

or $i_1(t) = I_s \cos(\omega t)$ et $i_2(t) = I_s \sin(\omega t)$

$$U_m = U_0 + \tilde{U}_m(\theta) = U_0 + \frac{\pi a e \ell K_s I_s K_r I_r}{\mu_0} [\cos(\omega t) \cos \theta + \sin(\omega t) \sin \theta]$$

$$\Rightarrow \tilde{U}_m(\theta) = \frac{\pi a e \ell B_{s\max} B_{r\max}}{\mu_0} \cos(\theta - \omega t)$$

2.4 Couple s'exerçant sur le rotor

$$\Gamma = \left(\frac{\partial U_m}{\partial \theta} \right)_{i_1, i_2, I_r} = \left(\frac{\partial \tilde{U}_m}{\partial \theta} \right)_{i_1, i_2, I_r} = \frac{\pi a e \ell B_{s\max} B_{r\max}}{\mu_0} \sin(\omega t - \theta)$$

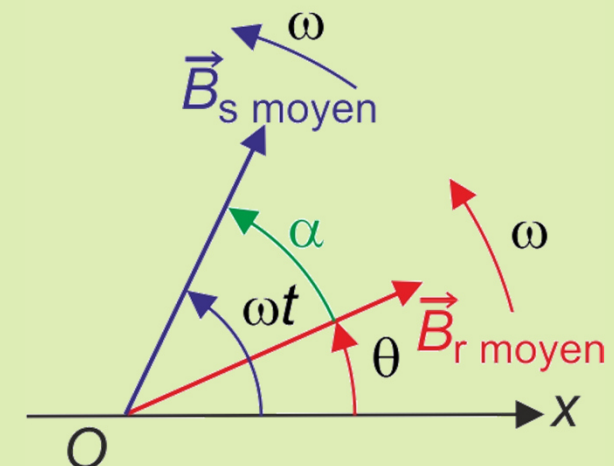
la machine convertit de l'énergie électrique en mécanique ou l'inverse si la valeur moyenne du couple n'est pas nulle

$$\Rightarrow \omega t - \theta = Cte = \alpha, \text{ soit } \Omega = \dot{\theta} = \omega$$

d'où le nom « machine synchrone » : le rotor tourne à la même vitesse angulaire que le champ magnétique créé par le stator

$$\text{alors : } \Gamma = \frac{\pi a e \ell B_{s\max} B_{r\max}}{\mu_0} \sin \alpha = \Gamma_{\max} \sin \alpha$$

où α est l'angle de retard du champ moyen rotorique par rapport au champ moyen statorique



supposons $\Omega = \omega > 0 \Rightarrow$ couple moteur si $\Gamma > 0$, résistant sinon

$\Rightarrow$ couple moteur si $\alpha \in [0, \pi]$, résistant si $\alpha \in [-\pi, 0]$

moteur : le rotor est en retard par rapport au champ statorique
alternateur : c'est l'inverse

α dépend de la charge mécanique du rotor : si on applique le théorème du moment cinétique au rotor par rapport à l'axe Oz dans le référentiel du laboratoire :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma - \Gamma_{ch}$$

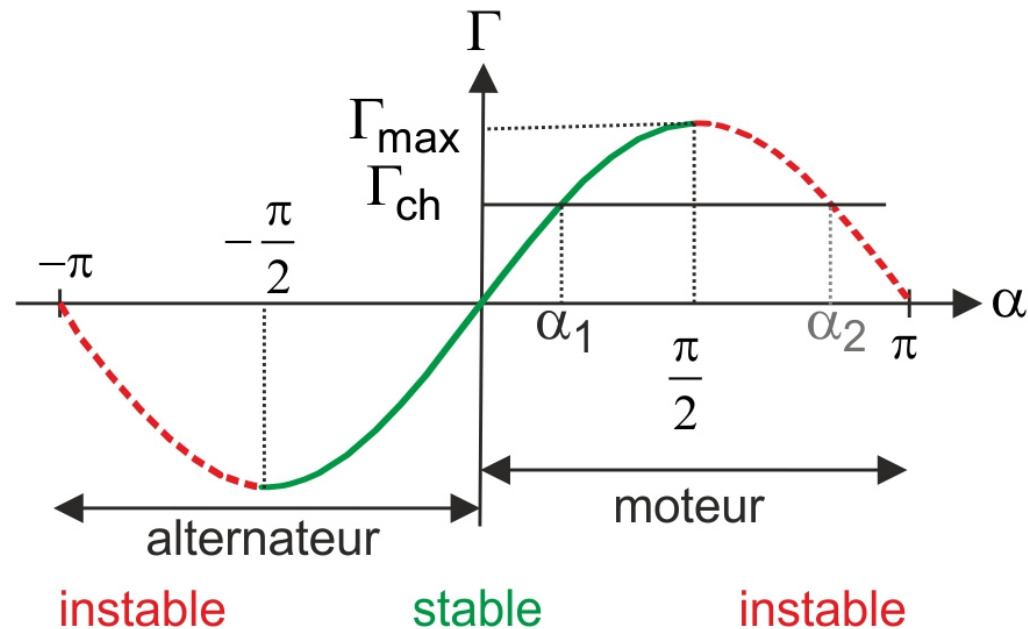
moment d'inertie du rotor par rapport à Oz

moment du couple extérieur reçu par le rotor (et incluant d'éventuels frottements solides et fluides)

$$\text{régime stationnaire} \Rightarrow \Gamma = \Gamma_{ch} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\Gamma_{ch}}{\Gamma_{\max}}$$

la condition de synchronisme ne peut être satisfaite que si $|\Gamma_{ch}| \leq \Gamma_{\max}$

- cas du *moteur synchrone*



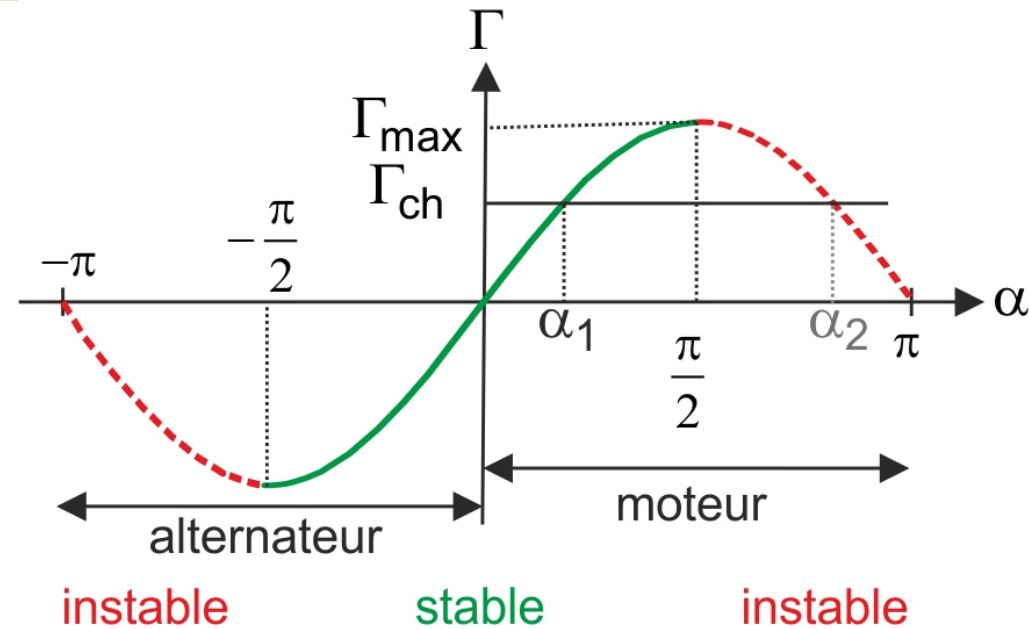
alors $0 < \Gamma_{\text{ch}} \leq \Gamma_{\max} \Rightarrow$ deux angles possibles $0 \leq \alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \leq \alpha_2 \leq \pi$

pour étudier la stabilité de ces configurations, on les perturbe légèrement

- configuration $\alpha = \alpha_1$: **STABLE**

si α diminue, Γ diminue donc le rotor ralentit $\Rightarrow$ le retard α du rotor sur le champ statorique augmente

si α augmente, Γ augmente donc le rotor accélère $\Rightarrow \alpha$ diminue



- configuration $\alpha = \alpha_2$: **INSTABLE**

si α diminue, Γ augmente donc le rotor accélère $\Rightarrow \alpha$ diminue

si α augmente, Γ diminue donc le rotor ralentit $\Rightarrow \alpha$ augmente

• cas de l'*alternateur* synchrone

$-\Gamma_{\text{ch}} > 0$ (on applique un couple moteur, exemple : actions hydrauliques sur une turbine)

régime stationnaire $\Rightarrow \Gamma = \Gamma_{\text{ch}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\Gamma_{\text{ch}}}{\Gamma_{\max}} < 0$

deux angles possibles $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_1 \leq 0$ (**STABLE**) et $-\pi \leq \alpha_2 \leq -\frac{\pi}{2}$ (**INSTABLE**)

alternateur : la puissance du couple électromagnétique qui s'exerce sur le rotor étant négative, de l'énergie mécanique est convertie en énergie électrique (récupérable aux bornes des deux enroulements du stator)

étude précédente de la stabilité : étude *statique* (les courants statoriques et rotorique gardent la même amplitude)

étude dynamique (hors-programme) : une machine synchrone en boucle ouverte (non asservi) est fortement instable car la dynamique des parties mécaniques est beaucoup plus lente que celle des parties électriques : une variation trop rapide des courants statoriques, donc du champ statorique, ne permet pas au champ rotorique de « s'accrocher »

en particulier, un moteur synchrone *ne peut pas démarrer seul* si l'on impose directement un champ statorique de pulsation ω alors que $\Omega = 0$
 $\Rightarrow$ on *asservit* Ω à ω : *machine synchrone autopilotée*

on peut alors se placer à $\alpha = \pm \pi / 2$, et ainsi diminuer l'intensité I_s nécessaire à l'entraînement d'une charge mécanique donnée, ce qui permet de minimiser les pertes Joule dans les phases du stator

2.5 Bilan énergétique

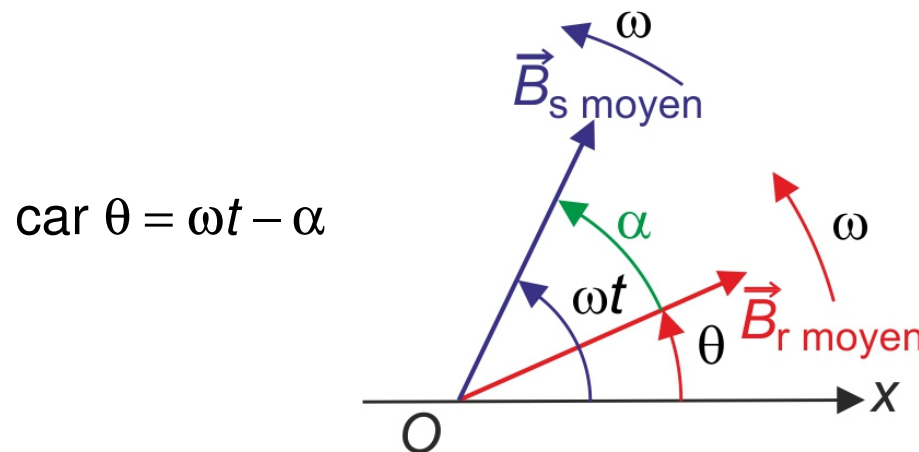
• équations électriques

stator : deux phases (enroulements identiques de résistance R_s et d'inductance propre L_s alimentés par des tensions sinusoïdales u_1 et u_2 de pulsation ω , en quadrature de phase)

comme $M_{12} = 0$, une phase du stator ne crée aucun flux à travers l'autre phase du stator

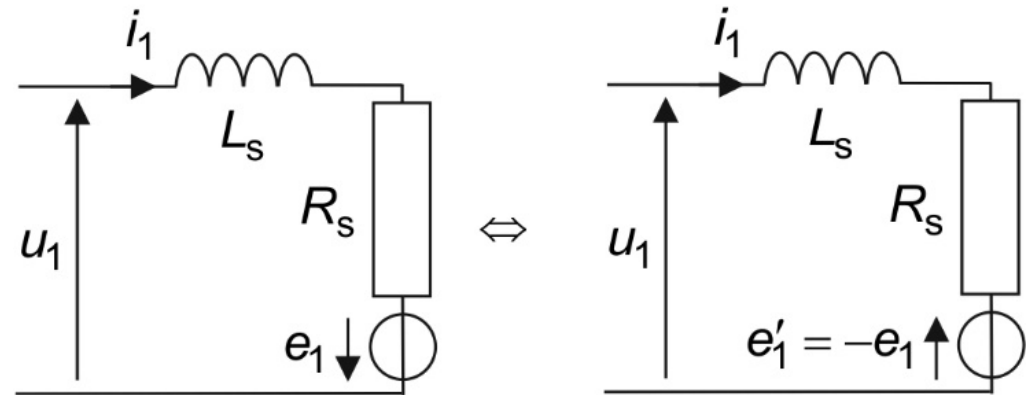
en revanche, le rotor crée un champ magnétique dont le flux à travers une des phases du stator n'est pas nul :

$$\Phi_{r/1} = M_0 I_r \cos \theta = M_0 I_r \cos(\omega t - \alpha) \quad \text{et} \quad \Phi_{r/2} = M_0 I_r \sin \theta = M_0 I_r \sin(\omega t - \alpha)$$



$$\Rightarrow \text{f.e.m induites} \quad e_1 = -\frac{d\Phi_{r/1}}{dt} = M_0 I_r \omega \sin(\omega t - \alpha) \quad \text{et} \quad e_2 = -\frac{d\Phi_{r/2}}{dt} = -M_0 I_r \omega \cos(\omega t - \alpha)$$

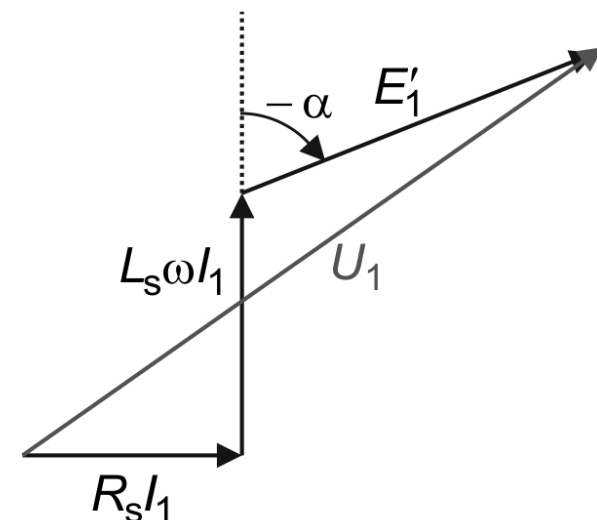
phase (1) : on introduit la force contre-électromotrice (f.c.e.m) :



$$e'_1 = -e_1 = -M_0 I_r \omega \sin(\omega t - \alpha) = M_0 I_r \omega \cos\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

toutes les tensions sont sinusoïdales de même pulsation ω

$\Rightarrow$ on représente la loi des mailles dans la première phase du stator à l'aide d'un diagramme de Fresnel en prenant le signal i_1 pour origine des phases



rotor : parcouru par un courant continu $\Rightarrow$ pas d'auto-induction à prendre en compte

le rotor tourne à la même vitesse angulaire que le champ statorique $\Rightarrow$ le flux de ce dernier est *constant* à travers les bobinages du rotor : pas de f.e.m créée par le stator sur le rotor

l'équation électrique pour le rotor se résume donc à $\mathbf{U_r = R_r I_r}$

comme dans une machine synchrone le stator n'induit pas de f.e.m dans le rotor (alors que le rotor induit une f.e.m dans chaque phase du stator), le rotor est appelé ***inducteur*** et le stator est appelé ***induit***

$$\text{équations électriques : } \begin{cases} u_1 = R_s i_1 + L_s \frac{di_1}{dt} + e'_1 \text{ (phase 1 stator)} \\ u_2 = R_s i_2 + L_s \frac{di_2}{dt} + e'_2 \text{ (phase 2 stator)} \\ U_r = R_r I_r \text{ (rotor)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1 i_1 + u_2 i_2 + U_r I_r = R_s i_1^2 + R_s i_2^2 + R_r I_r^2 + \frac{1}{2} L_s \frac{d(i_1^2 + i_2^2)}{dt} + e'_1 i_1 + e'_2 i_2$$

$$\text{or } i_1^2 + i_2^2 = I_s^2 \cos^2(\omega t) + I_s^2 \sin^2(\omega t) = I_s^2 = Cte$$

$$\text{et (fonctionnement synchrone : } \Omega = \omega = Cte) : J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma - \Gamma_{ch} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{u_1 i_1 + u_2 i_2 + U_r I_r - \Gamma_{ch} \Omega}_{\text{puissance totale reçue}} = \underbrace{R_s i_1^2 + R_s i_2^2 + R_r I_r^2}_{\text{dissipée par effet Joule}} + \underbrace{e'_1 i_1 + e'_2 i_2 - \Gamma \Omega}_{\text{stockée}}$$

$$\Rightarrow e'_1 i_1 + e'_2 i_2 - \Gamma \Omega = \frac{d}{dt} (U_m + E_c)$$

$$\text{avec } E_c = \frac{1}{2} J \Omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 = Cte \text{ et } U_m = \frac{1}{2} L_s (\underbrace{i_1^2 + i_2^2}_{Cte}) + \frac{1}{2} L_r I_r^2 + M_0 I_r I_s \cos(\underbrace{\theta - \omega t}_{-\alpha = Cte}) = Cte$$

$$\text{on a donc } e'_1 i_1 + e'_2 i_2 = \Gamma \Omega \Leftrightarrow \Gamma \Omega + e_1 i_1 + e_2 i_2 = 0$$

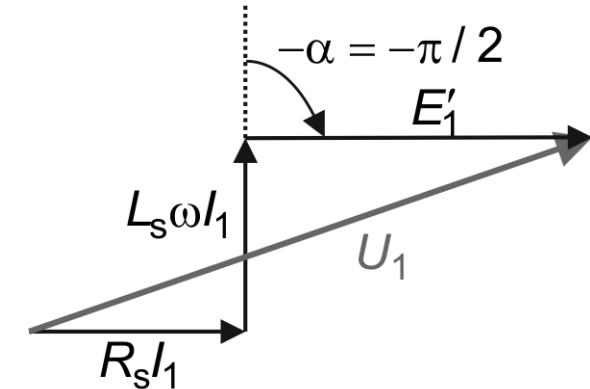
la puissance absorbée par les f.c.e.m est intégralement convertie en puissance mécanique reçue par le rotor

relation analogue à $P_L + ei = 0$ (induction de Lorentz dans l'A.R.Q.S, cf. rails de Laplace)

cependant ici les actions électromagnétiques ne s'exercent pas seulement sur les bobinages du rotor, mais aussi sur sa *carcasse ferromagnétique*

diagramme de Fresnel : pour $\alpha = \pi / 2$, e'_1 est en phase avec le courant i_1 (et e'_2 avec i_2)

$\Rightarrow$ puissance maximale absorbée par les f.c.e.m donc puissance mécanique maximale (en accord avec les résultats précédents)



bilan de puissance en régime synchrone :

$$\underbrace{u_1 i_1 + u_2 i_2 + U_r I_r - \Gamma_{ch} \Omega}_{\text{puissance totale reçue}} = \underbrace{R_s i_1^2 + R_s i_2^2 + R_r I_r^2}_{\text{dissipée par effet Joule}}$$

• *moteur* : $\Gamma_{ch} > 0$

$$\Rightarrow \underbrace{u_1 i_1 + u_2 i_2 + U_r I_r}_{p_e \text{ puissance électrique reçue}} = \underbrace{R_s i_1^2 + R_s i_2^2 + R_r I_r^2}_{p_j \text{ dissipée par effet Joule}} + \underbrace{\Gamma_{ch} \Omega}_{p_{mec} \text{ fournie à la charge}}$$

rendement $\eta = \frac{p_{mec}}{p_e} = \frac{p_{mec}}{p_{mec} + p_J} < 1$ augmente avec la puissance convertie
le rendement peut dépasser 95%

on n'a pas ici pris en compte les pertes fer (par hystérésis et courants de Foucault) dans les matériaux ferromagnétiques ; on les minimise en utilisant des matériaux doux et feuilletés

exemple : les 8 moteurs synchrones autopilotés des TGV Atlantique, chacun développe une puissance de 1,1 MW

- *alternateur* $\Gamma_{ch} < 0$

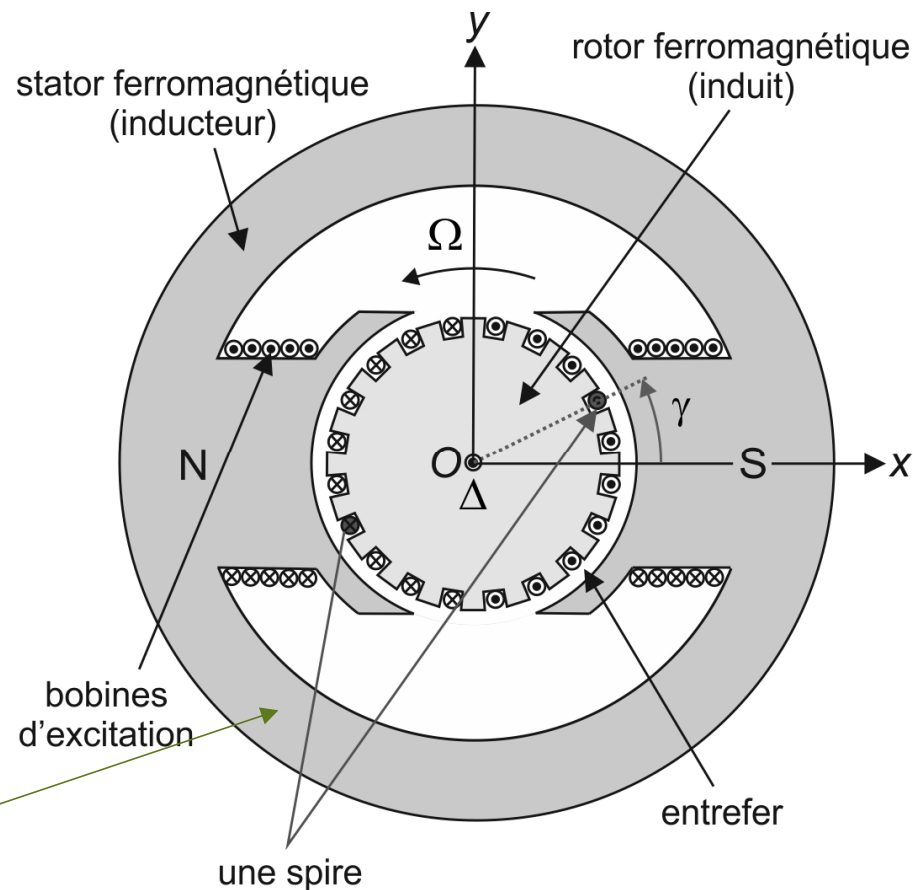
$$\Rightarrow \underbrace{\Gamma_{ch}\Omega + U_r I_r}_{p_{tot} : \text{puissance (mécanique + électrique) reçue}} = \underbrace{R_s i_1^2 + R_s i_2^2 + R_r I_r^2}_{p_J \text{ dissipée par effet Joule}} + \underbrace{-u_1 i_1 - u_2 i_2}_{p_e > 0 \text{ fournie par les phases du stator}}$$

$$\text{rendement } \eta = \frac{p_e}{p_{tot}} = \frac{p_e}{p_e + p_J} < 1 \quad \text{peut atteindre 99\%}$$

exemple : alternateurs de voiture, alternateurs de production d'énergie électrique, ces derniers pouvant convertir des GW !

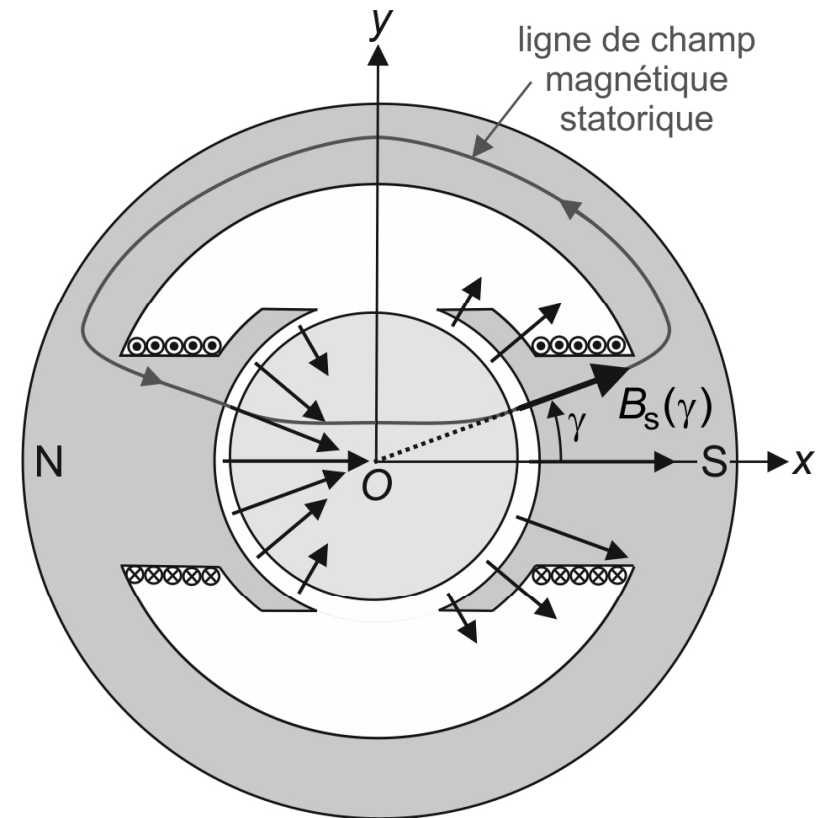
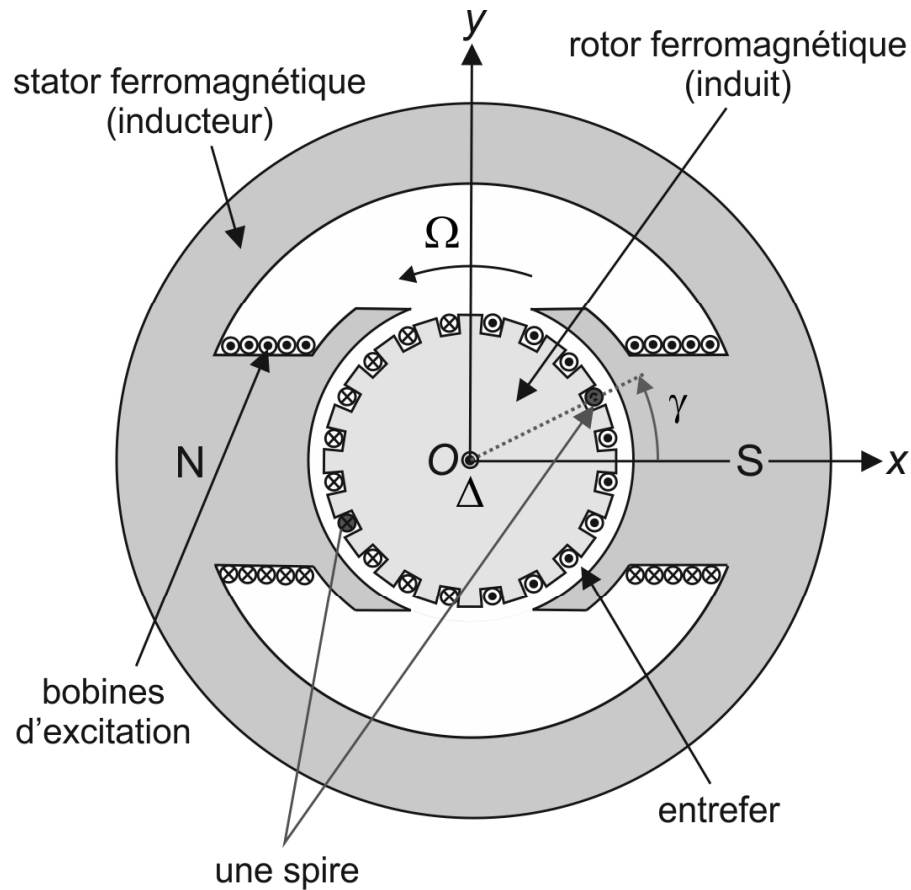
3. MACHINE À COURANT CONTINU (M.C.C)

3.1 Champs statorique et rotorique



stator : fixe, ferromagnétique (aimantation permanente ou obtenue à l'aide de bobines d'excitation parcourues par un courant continu)

une (comme sur le schéma : nord N et sud S), ou plusieurs paires de pôles

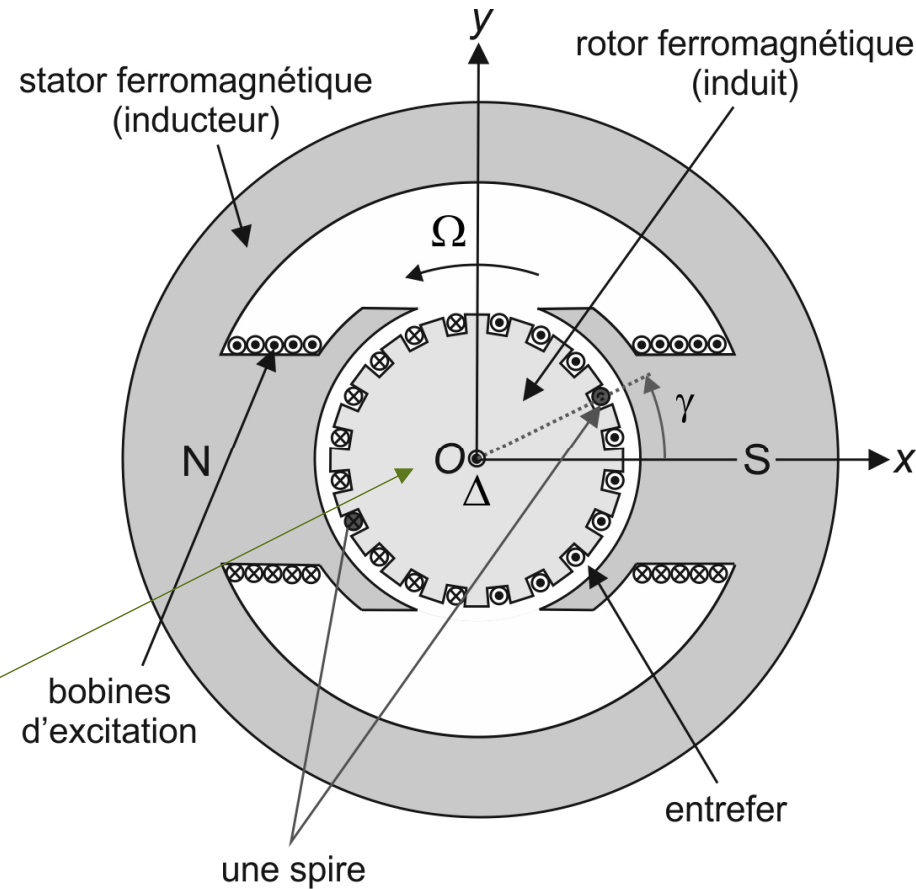


champ statorique $\vec{B}_s$ symétrique / plan $y = 0$ et antisymétrique / plan $x = 0$

le champ moyen statorique $\vec{B}_{s \text{ moyen}}$ est porté par Ox

il n'est pas forcément sinusoïdal spatialement

contrairement au champ glissant de la machine synchrone, il est *stationnaire*



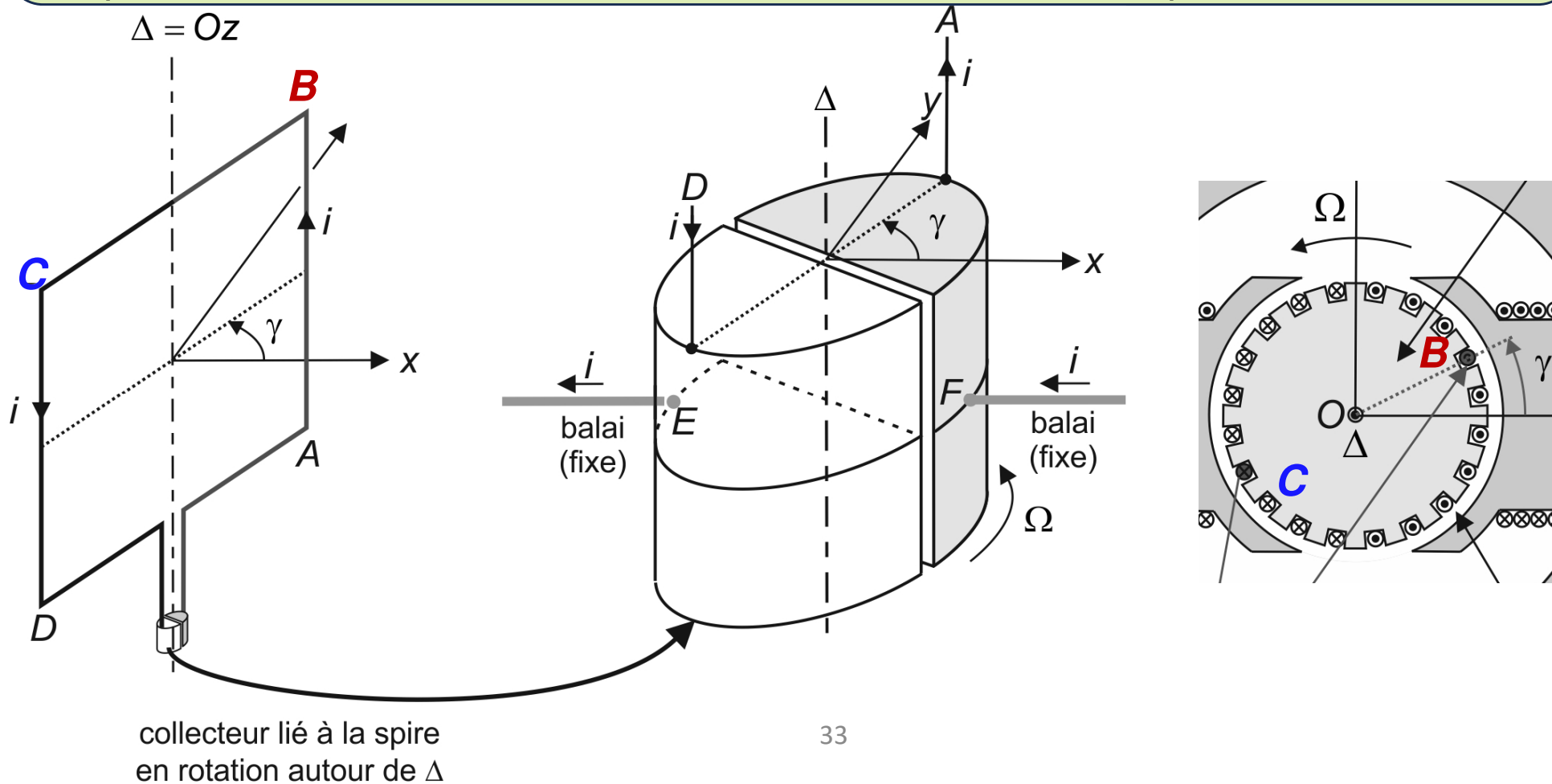
le *rotor* ferromagnétique tourne autour de l'axe $\Delta = Oz$

des spires sont bobinées dans des encoches du rotor ; elles sont parcourues par le un courant électrique d'intensité i

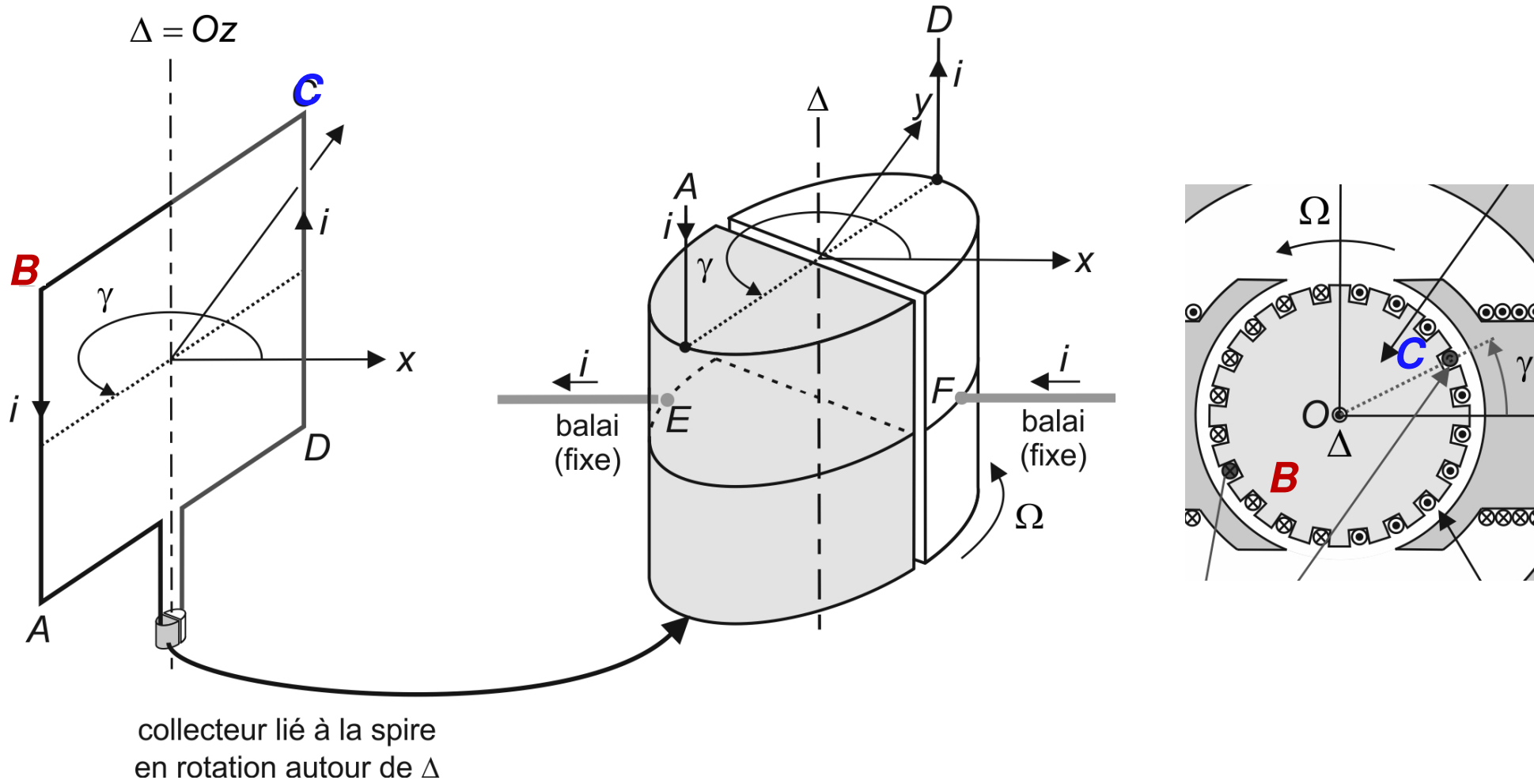
le rotor est le siège du phénomène d'induction de Lorentz (circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire)

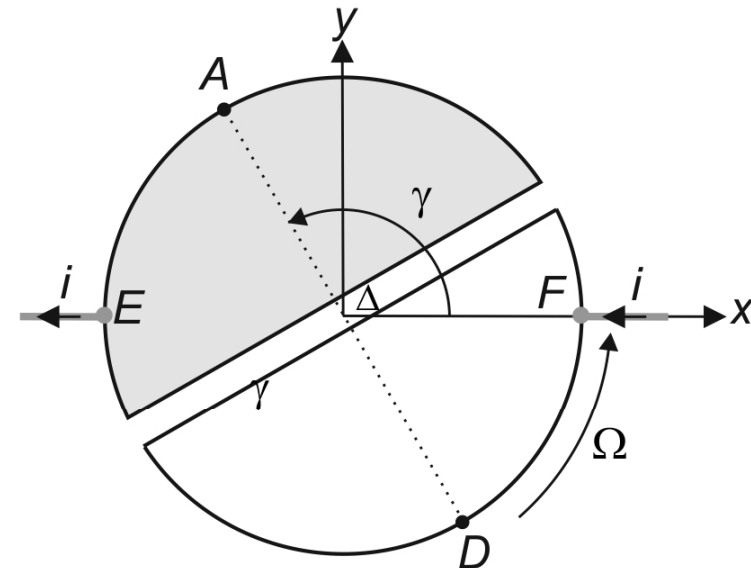
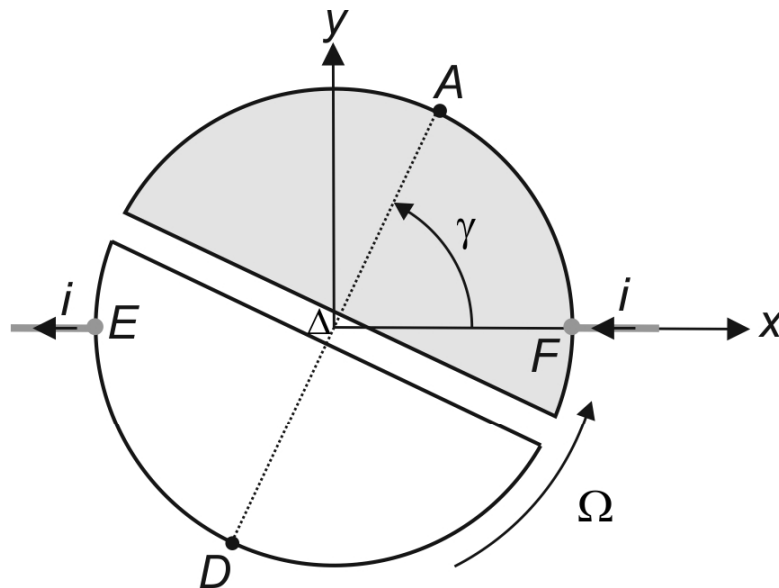
comme pour la machine synchrone, $\vec{B}_s$ et $\vec{B}_r$ sont $\approx$ *radiaux* dans l'entrefer
d'après l'étude de la machine synchrone : $\langle \Gamma \rangle \neq 0$ si le champ statorique et le champ rotorique sont *synchrones*

$\Rightarrow$ le champ rotorique doit être *stationnaire* $\Rightarrow$ les courants rotoriques doivent être stationnaires dans le référentiel du stator $\Rightarrow$ spires connectées au circuit extérieur *via* les lames du *collecteur* sur lesquelles frottent les *balais*, ce qui permet d'inverser le sens du courant dans un brin à chaque demi-tour



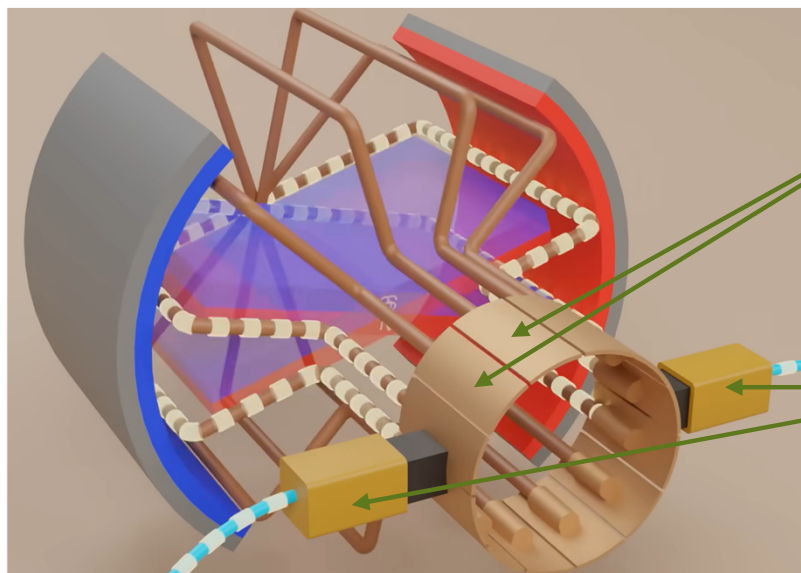
la spire étudiée a fait un demi-tour :





Pour $\gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, le courant provenant du circuit extérieur rentre par A et sort par D.
On a contact électrique entre A et F, et entre D et E.

Pour $\gamma \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, le courant provenant du circuit extérieur rentre par D et sort par A.
On a contact électrique entre A et E, et entre D et F.



collecteurs

balais

ici : une seule spire
alimentée à la fois

le collecteur permet donc d'établir le synchronisme entre le champ statorique stationnaire et le champ rotorique, quelle que soit la position angulaire du rotor

le flux du champ rotorique à travers les bobines du stator est constant, contrairement au flux du champ statorique à travers le rotor, puisque ce dernier tourne

dans une machine à courant continu, le stator est l'**inducteur** et le rotor l'**induit**

3.2 Couple électromagnétique exercé sur le rotor

synchronisme $\Rightarrow \Gamma = K \cdot B_{s\max} B_{r\max} \sin(\alpha)$ avec $K > 0$

le champ moyen statorique $\vec{B}_{s\text{ moyen}}$ est porté par Ox

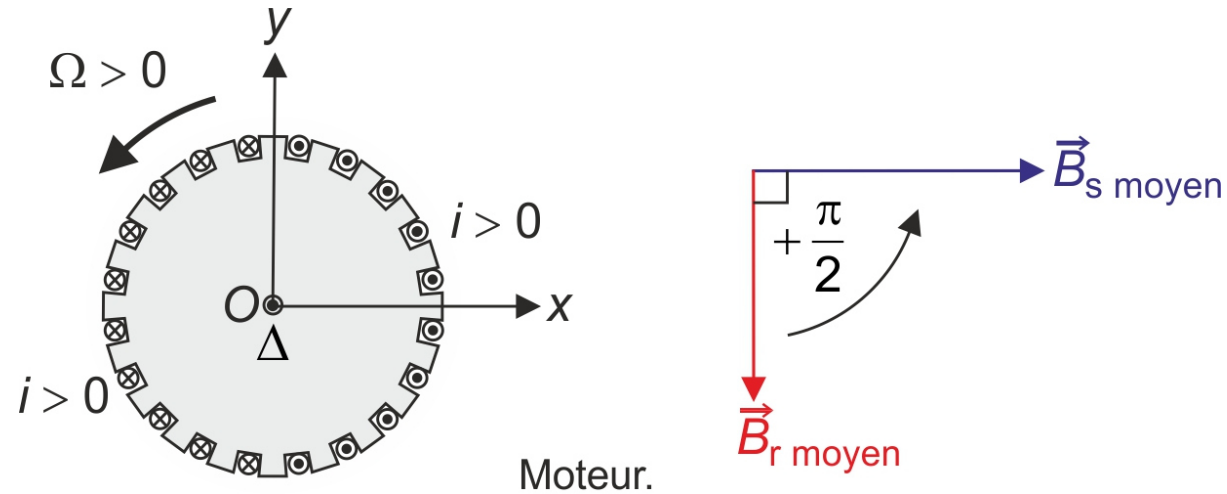
le champ rotorique possède un plan de symétrie $y = 0$, et un plan d'antisymétrie $x = 0$

$\vec{B}_{r\text{ moyen}}$ est donc porté par Oy

$$\Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$$

angles qui permettent d'obtenir un couple maximal en norme

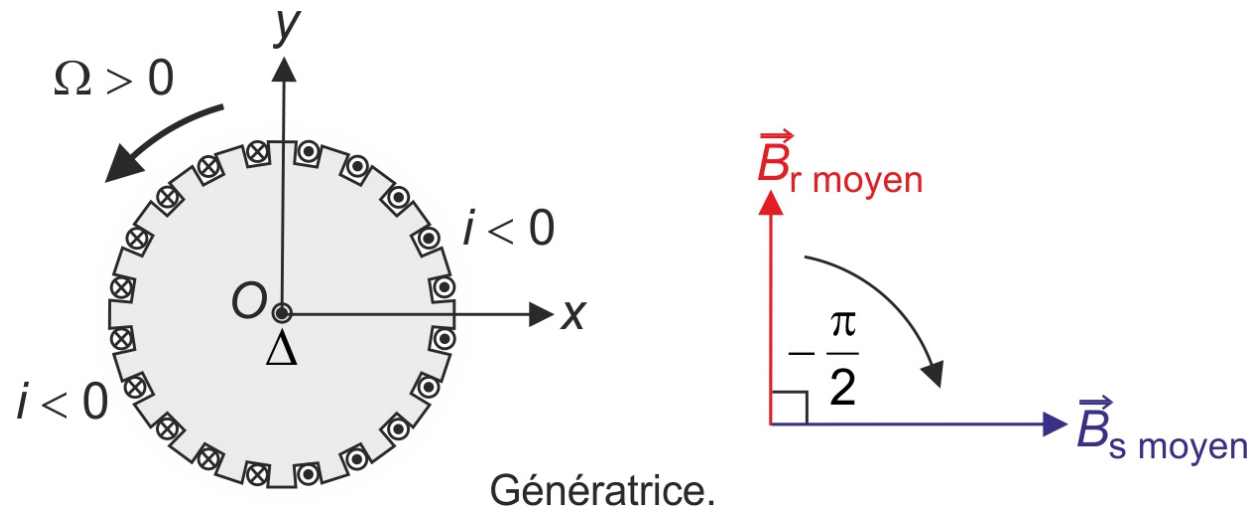
- moteur : on prend $\Omega > 0 \Rightarrow \Gamma > 0 \Rightarrow \alpha = +\frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{B}_r \text{ moyen}$ porté par $-\vec{e}_y \Rightarrow i > 0$



remarque : si $\Omega < 0 \Rightarrow \Gamma < 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow i < 0$

comme $B_{r\max} \propto i$, on peut écrire $\Gamma = \Phi_0 i$ avec $\Phi_0 > 0$

- génératrice : on prend $\Omega > 0 \Rightarrow \Gamma < 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{B}_{r \text{ moyen}}$ porté par $+\vec{e}_y \Rightarrow i < 0$



remarque : si $\Omega < 0 \Rightarrow \Gamma > 0 \Rightarrow \alpha = +\frac{\pi}{2} \Rightarrow i > 0$

comme $B_{r \text{ max}} \propto i$, on peut écrire $\Gamma = \Phi_0 i$ avec $\Phi_0 > 0$

le moment du couple des actions électromagnétiques sur le rotor est $\Gamma = \Phi_0 i$
la constante Φ_0 , en weber (Wb) est homogène à un flux de champ magnétique

remarque : contrairement aux machines synchrones, des champs variant sinusoïdalement avec l'angle γ ne sont pas recherchés

$\Rightarrow$ pas d'expression théorique de la constante Φ_0 , qui dépend de la géométrie du stator et des bobinages du stator et du rotor

remarque : malgré le nom « machine à courant continu », le courant i peut varier,

mais à une fréquence f très inférieure à la fréquence de rotation du moteur $F = \frac{\Omega}{2\pi}$

3.3 Bilan énergétique / f.e.m induite dans le rotor

comme pour la machine synchrone, la puissance mécanique $p = \Gamma \Omega$
est absorbée par la f.c.e.m $e' = -e$ qui apparaît au rotor :

$$e'i = -ei = \Gamma \Omega \text{ avec } \Gamma = \Phi_0 i \Rightarrow e = -\Phi_0 \Omega$$

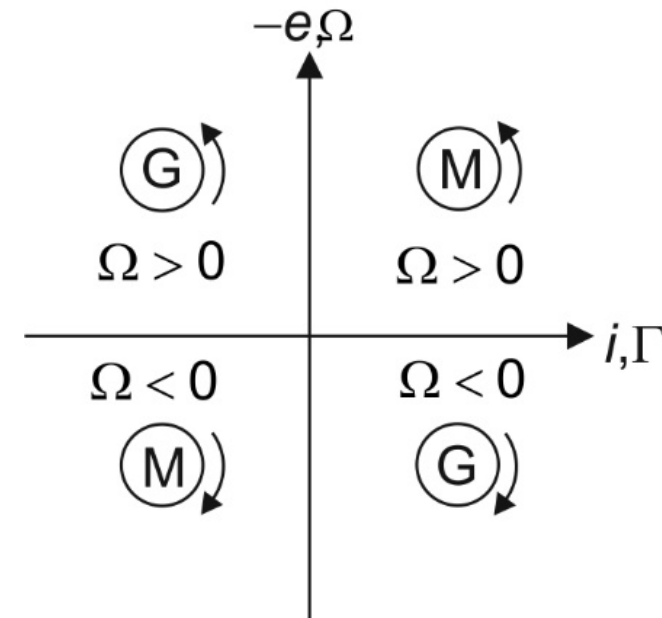
la f.e.m aux bornes de l'induit (le rotor) est : $e = -\Phi_0 \Omega$

3.4 Réversibilité

les relations de couplage électromécanique $\Gamma = \Phi_0 i$ et $e = -\Phi_0 \Omega$ (algébriques) montrent qu'une machine à courant continu peut fonctionner indifféremment en moteur ou en génératrice : elle est réversible et tourne dans les deux sens (fonctionnement sur les 4 quadrants de la figure ci-dessous)

moteur : $\Gamma \Omega > 0 \Rightarrow e i < 0$ la puissance mécanique est positive, la f.e.m induite s'oppose alors au courant dans l'induit

génératrice : $e i > 0 \Rightarrow \Gamma \Omega < 0$ la puissance de la f.e.m induite est positive, les actions électromagnétiques freinent le moteur



3.5 Moteur

f.e.m $\nearrow e i < 0$

f.c.e.m $\nearrow e' i > 0$

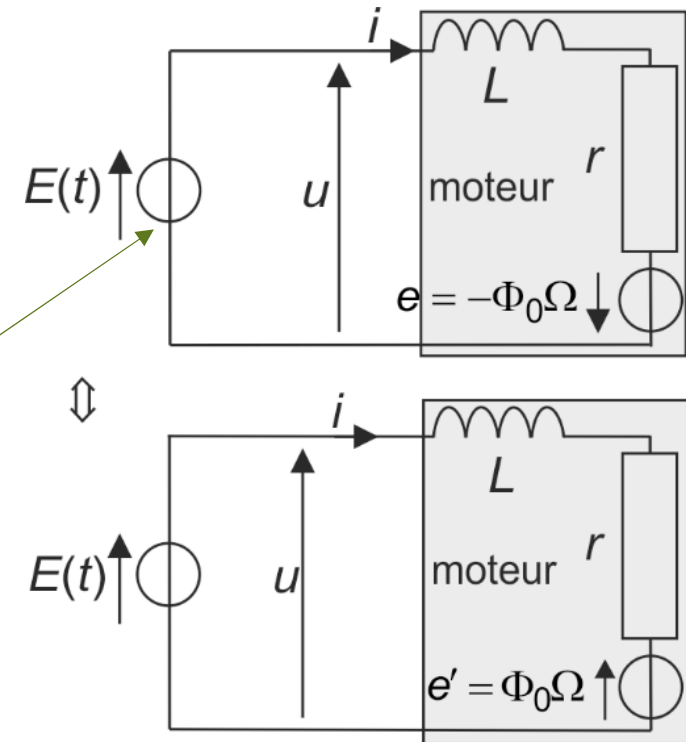
alimentation par un générateur de tension continue, ou qui varie à des fréquences faibles devant $\Omega / 2\pi$

$$u = e' + ri + L \frac{di}{dt}$$

résistance des bobinages
(faible)

inductance des bobinages
(très faible, souvent négligée)

convention récepteur



3.6 Génératrice

f.e.m $\nearrow e \ i > 0$

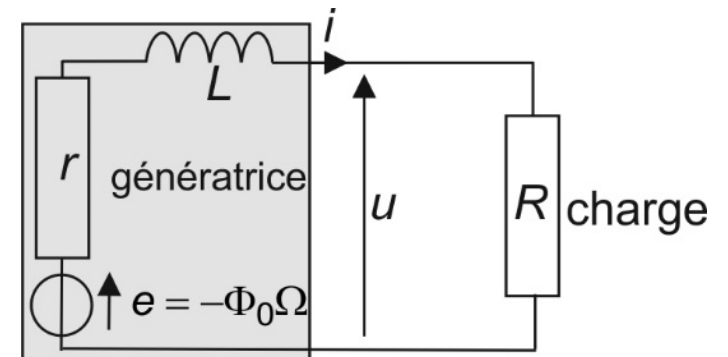
$$e = -\Phi_0 \Omega = (r + R)i + L \frac{di}{dt} \text{ (équation électrique)}$$

théorème du moment cinétique au rotor, de moment d'inertie J par rapport à l'axe Δ :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma - \Gamma_{ch} = \Phi_0 i - \Gamma_{ch} \text{ (équation mécanique)}$$

$-\Gamma_{ch} > 0$ moment du couple moteur qui fait tourner le rotor de la génératrice (incluant d'éventuels frottements solides et fluides)

convention générateur



$$\text{régime stationnaire : } \begin{cases} -\Phi_0 \Omega = (r + R)i \\ 0 = \Phi_0 i - \Gamma_{ch} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = -\frac{\Phi_0 \Omega}{r + R} \\ 0 = -\left(\frac{\Phi_0^2}{r + R}\right) \Omega - \Gamma_{ch} \end{cases}$$

tout se passe comme si le couple de freinage était un couple de frottement fluide de

moment : $-\lambda\Omega$ avec $\lambda = \frac{\Phi_0^2}{r + R}$

d'un point de vue énergétique, la puissance électrique fournie à la charge est égale en valeur absolue à la puissance du couple de freinage

dans le cas où la génératrice ne débite pas ($R \rightarrow \infty : i = 0$), le rotor ne subit pas ce couple de freinage

$$\Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{e} = -\Phi_0\Omega \propto \Omega$$

c'est le principe des *génératrices tachymétriques*, qui délivrent une f.e.m proportionnelle à la vitesse angulaire du rotor, et constituent donc des capteurs de vitesse angulaire

