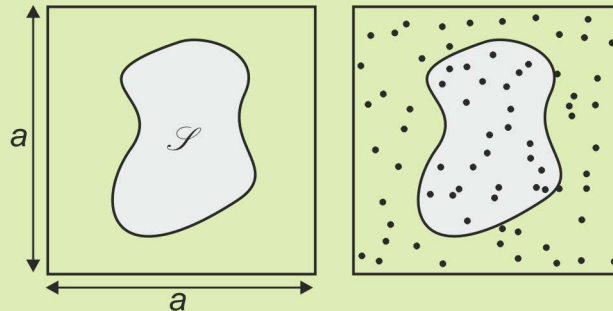


Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée. 🦉 🦉

Méthode numérique : simulation de Monte-Carlo

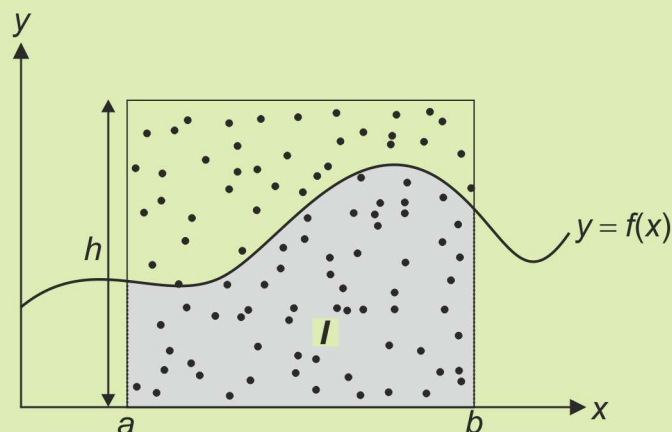
On cherche à mesurer l'aire $\mathcal{S}$ d'un lac. On tire pour cela de façon aléatoire N boulets de canon sur une surface carrée a^2 contenant le lac. On suppose que la distribution de probabilité est *uniforme* sur le carré, ce qui veut dire que la probabilité que le boulet tombe en un point du carré est la même en tout point.



Si n boulets tombent dans le lac, le rapport n/N donne une approximation du rapport $\mathcal{S} / a^2$, d'autant meilleure que N est grand (loi des grands nombres), et on en déduit $\mathcal{S} \approx \frac{n}{N} a^2$.

Cette méthode, appelée *méthode de Monte-Carlo*, permet donc de calculer des intégrales (comme celle qui définit l'aire $\mathcal{S}$ précédente).

Pour une fonction réelle f positive d'une seule variable réelle x , on peut calculer $I = \int_a^{b>a} f(x)dx$ en effectuant N tirages aléatoires de points $M(x,y)$, avec $x \in [a,b]$ et $y \in [0,h]$, où h est plus grand que le maximum des valeurs $f(x)$ pour $x \in [a,b]$. La distribution de probabilité est uniforme sur le rectangle $(x,y) \in [a,b] \times [0,h]$.



Là encore, si n est le nombre de points vérifiant $y < f(x)$, on a $I \approx \frac{n}{N} h(b-a)$. On se rapproche de la valeur réelle en prenant N grand (mais l'écart diminue lentement avec N , tout en fluctuant aléatoirement...).

Générer des valeurs selon une densité de probabilités donnée

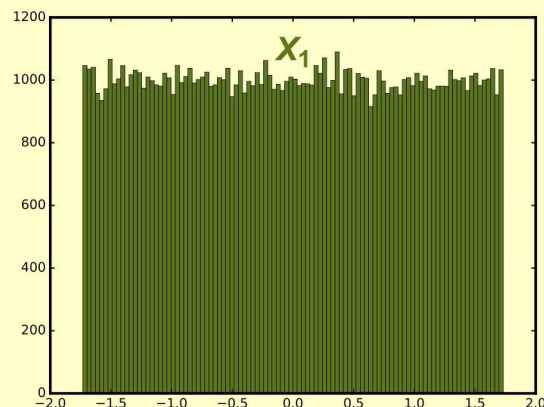
Sous Python, on utilise ici la librairie **random** de **numpy** et on trace des histogrammes avec **plt.hist**.

Dans l'exemple ci-après, on a généré 100 000 tirages aléatoires de la grandeur X_1 de densité de probabilité rectangulaire d'écart-type égal à 1 (donc de demi-largeur égale à $\sqrt{3}$), centrée sur 0, soit 100 000 valeurs comprises entre $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

On obtient les tirages sous forme d'histogramme ainsi :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd # on va ici utiliser la bibliothèque random
de numpy
from matplotlib import pyplot as plt

moy1 = -0.5
signal = 1
xmin1,xmax1 = moy1-signal*3**.5,moy1+signal*3**.5 # on calcule les
bornes de l'intervalle (facteur racine de 3 entre le demi-intervalle
et l'écart-type)
N = 100000
X1 = rd.uniform(xmin1,xmax1,N) # tire aléatoirement N nombres autour
de moy avec un écart-type sigma (renvoie un tableau 1D)
plt.hist(X1,100,color='g') # le nombre d'intervalles de l'histogramme
est fixé à 100
plt.show()
```



```
>>> np.mean(X1) # moyenne du tableau de valeurs
-0.5054980983978135 #on vérifie que la valeur moyenne est bien proche
de 0
>>> np.std(X1,ddof = 1) # écart-type du tableau de valeurs
1.0004637660849285 # on vérifie que l'écart-type est proche de 1
```

Pour une distribution normale (gaussienne) d'écart-type égal à 1, on utilise :

```
X1 = np.random.normal(moy1,signal,N) # tire aléatoirement N nombres
autour de moy1 avec un écart-type signal (renvoie un tableau 1D)
```

Q.1) Calculer $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ par la méthode de Monte-Carlo exposée en première page. On prendra

$h=2$.

On génère avec la commande : **rd.uniform(a,b)** des nombres flottants compris entre a et b .

Q.2) Effectuer de même 100 000 tirages pour les grandeurs X_2 et X_3 , également de densités de probabilité rectangulaire d'écart-type égal à 1, respectivement centrées sur 0 et 0,5. Représenter les histogrammes des variables X_2 , X_3 , $X_2 + X_3$ et $X_1 + X_2 + X_3$. Ces variables obéissent-elles également à une distribution rectangulaire ? Proposer une explication.

Propagation des incertitudes : méthode analytique

La mesure d'une grandeur X fournit un résultat $\bar{x}$ avec une incertitude-type $u(X)$. Supposons que la grandeur X n'est pas directement accessible par la mesure, mais liée à des mesures *indépendantes* de deux grandeurs elles-mêmes indépendantes X_1 et X_2 dont les valeurs mesurées sont $\bar{x}_1$, avec une incertitude-type $u(X_1)$ et $\bar{x}_2$, avec une incertitude-type $u(X_2)$.

La relation s'écrit sous la forme $X = f(X_1, X_2)$.

Si les incertitudes sont suffisamment petites, on montre que l'on a $\bar{x} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ et :

$$u(X) = \sqrt{u^2(X_1) \left[\frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right]^2 + u^2(X_2) \left[\frac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right]^2}. \text{ Cette relation peut se généraliser au cas}$$

$$\text{où } X \text{ dépend de plus de deux variables : } \bar{x} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, \dots) \text{ et } u(X) = \sqrt{\sum_k \left[\frac{\partial f}{\partial X_k} \right]^2 u^2(X_k)}.$$

Dans le cas de relations linéaires, par exemple $X = X_1 + X_2$, la méthode analytique fournit le bon résultat quel que soit le type de distributions.

Les fonctions de distributions des grandeurs X_k peuvent être différentes, et certaines incertitudes-type évaluées par des méthodes de type A, d'autres par des méthodes de type B.

Q.3) On étudie à l'oscilloscope la réponse indicielle d'un passe-bas du second ordre. On mesure le facteur de qualité $Q = 4,99$ et la pseudo-période des oscillations $T = 990 \mu s$. Les incertitudes-type sont $u(Q) = 0,84$ et $u(T) = 120 \mu s$. Les distributions sont uniformes.

Déterminer la fréquence des oscillations libres non amorties $f_0 = \frac{1}{T \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ et son incertitude-type :

type :

— Par la méthode analytique

— En utilisant la méthode de Monte-Carlo.

Comparer les résultats fournis par les deux méthodes.

Tracer l'histogramme des valeurs de f_0 . Cette distribution est-elle uniforme ? Peut-on tirer des renseignements sur les valeurs extrêmes prises par f_0 ?

Reprendre la comparaison si $u(Q) = 0,12$ et $u(T) = 40 \mu s$. Commenter.