DL1 (Révisions de mécanique)

X ENS // MPI // 2026 : Déviation d'un astéroïde par percussion

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

L'impact d'un astéroïde ou d'une comète sur la Terre pourrait engendrer une catastrophe planétaire. Dans le cadre d'un programme mondial de défense planétaire, les astronomes recensent les géocroiseurs, ces objets célestes susceptibles d'entrer en collision avec la Terre. En cas de danger, une des solutions envisagées est de dévier la trajectoire de l'objet céleste en le percutant avec un engin spatial envoyé depuis la Terre.

Afin de valider cette solution, l'agence spatiale américaine a lancé la mission DART, acronyme anglais signifiant "test de déviation d'un astéroïde double". La cible choisie est un astéroïde nommé Dimorphos, en orbite (à une altitude d'environ un kilomètre) autour d'un autre astéroïde plus gros nommé Didymos. La modification observée de la période de révolution de Dimorphos autour de Didymos à la suite de l'impact a montré que celui-ci pouvait avoir un effet significatif, et que la déviation par percussion est une solution envisageable pour dévier la trajectoire d'un géocroiseur.

Ce problème décrit plusieurs aspects de la mission DART. Dans la partie I, on caractérise l'orbite de Didymos autour du Soleil. Dans la partie II, on montre comment lancer un engin spatial (qu'on nomme DART) depuis la Terre pour qu'il entre en collision avec Dimorphos. La partie III est consacrée à la modélisation de l'impact de DART avec Dimorphos, et à l'exploitation des données obtenues à l'issue de la mission.

On supposera dans tout ce problème que la Terre T est en mouvement circulaire uniforme autour du Soleil S à la distance $r_0 = ST = 150 \times 10^6$ km et à la vitesse $v_0 = 30\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$. On supposera également que l'orbite de Didymos est dans le même plan que celle de la Terre, et parcourue dans le même sens.

I - Orbite de Didymos autour du Soleil

Dans cette partie préliminaire, nous allons, grâce à la figure 1, estimer quelques caractéristiques de l'orbite de Didymos.

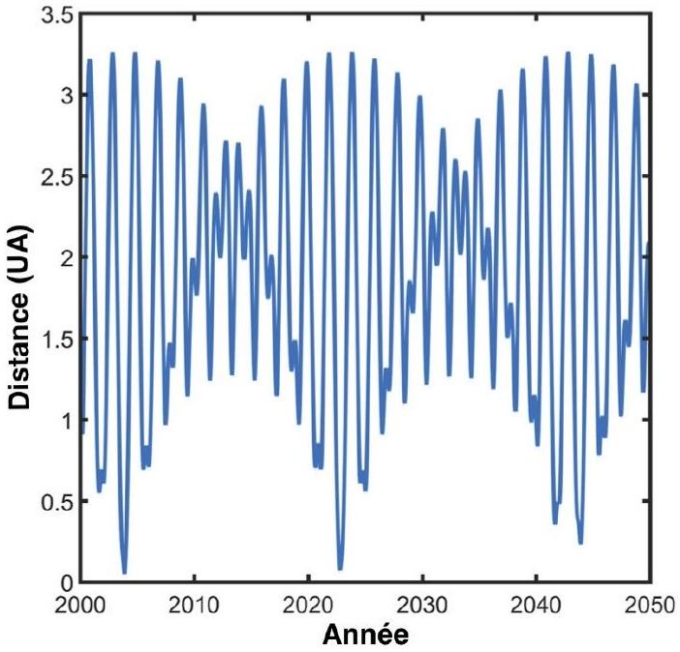


Figure 1 - Évolution de la distance séparant la Terre de Didymos entre les années 2000 et 2050, en unités de la distance Terre-Soleil r_0, dite Unité Astronomique. [Extrait de "Trajectory options for the DART mission", par J. A. Atchison et al., Acta Astronautica (2016), vol. 123, p. 330.]

1. Définir le référentiel héliocentrique. On le suppose galiléen.
   En appliquant dans ce référentiel le théorème du moment cinétique à une planète ou à un astéroïde uniquement soumis à l'attraction du Soleil, montrer que le mouvement du corps a lieu dans un plan contenant S.
2. Didymos décrit une orbite elliptique autour du Soleil. Sa distance minimale au Soleil (correspondant au point de l'orbite dit "périhélie") est $r_{\text{min}} = 1,01 r_0$. Le fait que r_{min} soit très proche de r_0 explique que Didymos passe parfois très près de la Terre, comme on le voit sur la figure 1, notamment en 2022, qui est l'année choisie pour l'impact. Déduire de la figure une estimation du demi-grand axe de l'orbite de Didymos.
3. Déduire de la valeur du demi-grand axe une estimation de la période T de révolution de Didymos autour du Soleil, en années.
4. Validez votre estimation de T en exploitant les données de la figure 1 .

II - Orbite de DART autour du Soleil

5. On lance l'engin spatial DART, de masse m, depuis la Terre. On l'envoie suffisamment loin pour qu'il échappe à l'attraction gravitationnelle de la Terre et ne soit plus sensible qu'à celle du Soleil, et on le place dans un premier temps sur la même orbite circulaire que la Terre. Que vaut alors sa vitesse autour du Soleil ?

   On modifie ensuite légèrement l'orbite de DART afin qu'il atteigne sa cible. Pour cela, on lui communique pendant un bref instant une impulsion parallèle à la direction du Soleil, qui lui donne une vitesse radiale v_1, avec $|v_1| \ll v_0$, sans changer sa vitesse orthoradiale. Sous l'effet de cette impulsion, la trajectoire n'est plus circulaire, mais elliptique.
6. Quelle est la variation de son moment cinétique par rapport au Soleil ?
7. Quelle est la modification de son énergie mécanique par rapport au Soleil ? On note E_{m0} l'énergie mécanique du mouvement circulaire.
   En déduire la variation du demi-grand axe au premier ordre en $|v_1|/v_0$, en négligeant les corrections du second ordre.

Première méthode : utilisation de l'énergie potentielle effective

8. On rappelle que le mouvement radial $r(t)$ dans un champ de gravitation newtonien est celui d'une particule à une dimension soumise à une énergie potentielle effective $E_{p,\,\text{eff}}(r)$. Établir l'expression de $E_{p,\,\text{eff}}(r)$ et l'exprimer en fonction de m, r_0, v_0 et r.
9. Comment, à partir de l'énergie potentielle effective, retrouve-t-on le rayon de l'orbite circulaire ? Vérifiez que vous obtenez le résultat attendu.
   Tracer la courbe $E_{p,\,\text{eff}}(r)$.
10. On considère maintenant des trajectoires faiblement elliptiques, telles que :
    $r(t) = r_0 + r_1(t)$ avec, pour tout temps t, $|r_1(t)| \ll r_0$. Pour ces trajectoires, $r(t)$ présente des oscillations de faible amplitude autour de r_0. En utilisant l'expression de $E_{p,\,\text{eff}}(r)$ obtenue plus haut, déterminer la pulsation ω de ces petites oscillations en fonction de r_0 et v_0. Montrer que l'énergie potentielle effective s'écrit alors :
    $E_{p,\,\text{eff}}(r) = E_{m0} + \frac{1}{2} k r_1^2$ et exprimer k en fonction de m et ω.
11. On veut que l'aphélie de l'orbite de DART, défini comme le point de l'orbite où sa distance au Soleil est maximale, coïncide avec le périhélie de l'orbite de Didymos (voir question 2) ce qui permet un impact. Est-on bien dans le cadre de l'approximation faite à la question précédente ?
12. En utilisant l'expression de $r_1(t)$, déterminer la valeur numérique de $|v_1|$ permettant de réaliser cet objectif.
13. Que vaut la période de la trajectoire elliptique de DART ? Comment aurait-on pu obtenir ce résultat sans calcul ?
14. L'impulsion radiale permettant à DART de passer sur une orbite elliptique lui a été communiquée le 24 décembre 2021. DART a atteint sa cible Dimorphos le 26 septembre 2022, soit trois quarts d'une année plus tard. En déduire si l'impulsion radiale était dirigée vers le Soleil ou dans le sens opposé.

Seconde méthode : constantes du mouvement

On repère un point du plan de la trajectoire par un système de coordonnées polaires (r, θ) centré sur le Soleil S. On désigne par $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ les vecteurs unitaires de base.

15. On définit le vecteur $\vec{T} = \vec{v} - B\vec{e}_\theta$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse et B une constante. Montrer que pour une trajectoire donnée, il existe une valeur de B telle que le vecteur $\vec{T}$ soit constant, et déterminer son expression, en y faisant apparaître le moment cinétique L_S.
16. Déterminer B et $\vec{T}$ pour l'orbite circulaire de rayon r_0.

17. Dessinez une orbite elliptique, en précisant la position du Soleil et le sens de parcours. Suivant lequel des deux axes de l'ellipse le vecteur $\vec{T}$ est-il dirigé ? À l'aide d'un raisonnement énergétique, précisez son sens et représentez-le sur votre dessin.
18. On applique maintenant ces résultats à l'orbite elliptique de DART après qu'une vitesse radiale v_1 lui a été communiquée. Quelles sont les expressions de B et $|\vec{T}|$ dans ce cas, en fonction de v_0 et v_1 ?
19. Déterminer la vitesse de DART au périhélie et à l'aphélie en fonction de v_0 et v_1.
20. Quelle constante du mouvement permet de relier la vitesse à la distance au Soleil en ces deux points ? En déduire l'expression de la distance au Soleil à l'aphélie en fonction de r_0, v_0 et v_1 et vérifier qu'on retrouve bien le résultat de la question **12** dans la limite où $|v_1| \ll v_0$.

III - Etude de l'astéroïde double Didymos-Dimorphos et effet de l'impact de DART

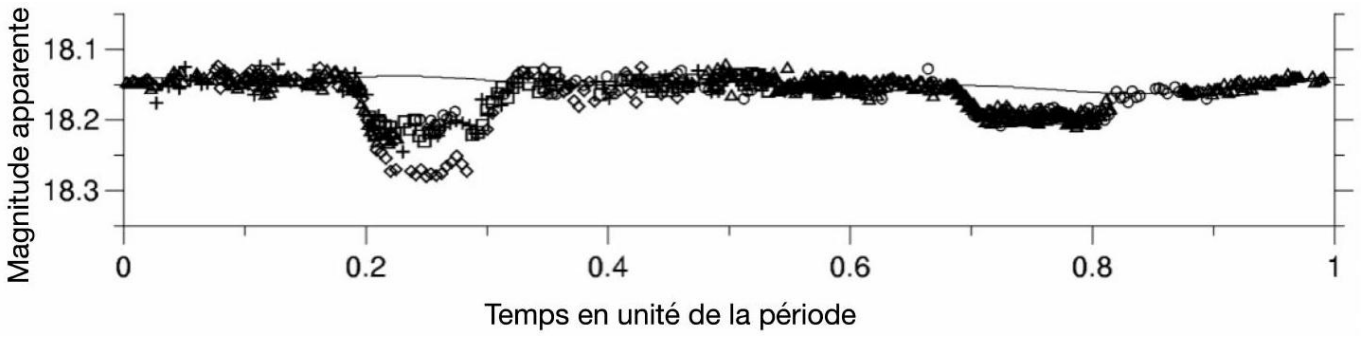


Figure 2 - Variation de la luminosité de l'astéroïde double Didymos-Dimorphos en fonction du temps. Le temps est en unités de la période de révolution de Dimorphos autour de Didymos, et les données sont accumulées sur plusieurs périodes de révolution. [Extrait de l'article "Photometric survey of binary near-Earth asteroids, par P. Pravec et al, Icarus 181 (2006) 63.]

Didymos et son satellite Dimorphos (qu'on notera P), sont trop éloignés de nous, trop petits, et trop proches l'un de l'autre pour qu'on puisse mesurer leurs dimensions et la distance qui les sépare par une observation directe au moyen d'un télescope. On ne voit, depuis la Terre, qu'un unique point faiblement lumineux, qui renvoie vers nous une fraction de la lumière reçue du Soleil. La figure 2 représente la variation de la luminosité de ce point en fonction du temps, qui est la seule donnée dont on dispose. Cette luminosité est maximale lorsque Didymos et P sont éclairés tous les deux, ce qui est le cas la plupart du temps. On observe deux creux, correspondant à des baisses de luminosité. Le premier correspond au passage de P devant Didymos : il cache alors une partie de la surface de Didymos et crée aussi une ombre sur une partie de cette surface, qui dépend de l'orientation du Soleil, ce qui explique que les observations varient au cours du temps. Le deuxième creux correspond au passage de P derrière Didymos. On ne voit plus alors que la lumière renvoyée par Didymos. C'est l'observation de ces creux qui a révélé, en 2003, l'existence de P.

Nous allons étudier quelles informations on peut extraire de ces données. Nous modélisons Didymos et P comme des sphères homogènes de rayons R_1 et R_2, de masses volumiques ρ_1 et ρ_2. L'orbite de P autour de Didymos est supposée circulaire de rayon D, et dans le même plan que les orbites de la Terre et de Didymos autour du Soleil. On suppose enfin que la luminosité est proportionnelle à la surface éclairée.

21. La diminution de luminosité lors du deuxième creux est de 4%. Estimer le rapport R_2/R_1.
22. Estimez la valeur du rapport R_1/D. Dessinez l'astéroïde double à l'échelle.
23. Montrer qu'on peut ensuite déduire ρ_1 de l'intervalle de temps séparant les deux creux.
24. Dans un référentiel galiléen où Didymos est immobile au moment de l'impact, la vitesse de DART est parallèle à celle de P, et la direction de celui-ci n'est pas déviée. Après l'impact, on observe que la période de révolution de P autour de Didymos a augmenté de $4,8\%$. En déduire la variation relative du demi-grand axe puis, en utilisant l'énergie mécanique, la variation relative de la vitesse de P immédiatement après l'impact. Dans quel sens l'impact a-t-il eu lieu par rapport au mouvement de P ?