DL1 (Révisions de mécanique, corrigé)

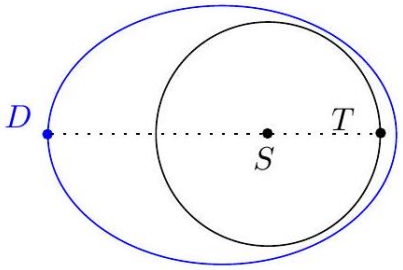
X ENS // MPI // 2026 : Déviation d'un astéroïde par percussion

1. On néglige les actions sur le corps M (planète, astéroïde) autres que la seule force gravitationnelle du Soleil S, qui est une force centrale. L'application du théorème du moment cinétique au corps dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen fournit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_S}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{SM} \wedge \vec{F}_{S/M} = \vec{0}$$

Le moment cinétique $\vec{L}_S = \overrightarrow{SM} \wedge m\vec{v}$ étant constant, le vecteur position est perpendiculaire au moment cinétique à tout instant. Le mouvement a donc lieu dans le plan perpendiculaire au moment cinétique et contenant le centre de force S.

2. La figure suivante représente la situation lorsque la Terre et Didymos sont en opposition par rapport au Soleil, la distance Terre-Didymos est alors maximale.



Il vient alors $DS_{\max} = r_{\max} = DT_{\max} - r_0 \simeq DT_{\max} - r_{\min}$ donc $r_{\max} + r_{\min} \simeq DT_{\max}$. Sur la figure 1 , on note $DT_{\max} \simeq 3,2r_0$ et comme le demi-grand axe de Didymos est donné par $2a = r_{\min} + r_{\max}$, on en deduit :

$$\boxed{a \simeq 1,6r_0}$$

3. La Terre et Didymos étant en rotation autour du Soleil, on applique la troisième loi de Kepler :

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{r_0^3}{T_0^2} \Rightarrow T = T_0 \left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2}}$$

A.N. : $T = 1 \times 1,6^{3/2} = \sqrt{1,6^3} \simeq \sqrt{4} \Rightarrow T \simeq 2$ ans.

4. L'alignement rigoureux de S, D et T est rare (Didymos est alors éclipsé par le Soleil) mais on est proche de cette situation sur l'enveloppe supérieure de la courbe de la figure 1. On compte 27 points sur cette enveloppe en 50 ans : **les occurrences ont bien lieu approximativement tous les deux ans**. On peut aussi remarquer que si on part d'une situation où la Terre et Didymos sont au plus proche autour de l'année 2003, Didymos étant alors à son périgée, une année plus tard, la Terre est revenue au même point tandis que Didymos a effectué une demi-révolution et se trouve à son apogée, la distance est alors maximale. Cela apparaît cohérent avec une distance maximale atteinte autour de l'année 2004.

5. Dans le cas de l'interaction gravitationnelle avec un centre de force de masse M, on sait que pour un mouvement circulaire de rayon r la vitesse du mobile est donnée par :

$$\boxed{v^2 = \frac{GM}{r}}$$

D'après la loi des aires, pour une orbite de rayon r_0 égal à celui de la Terre, la vitesse est nécessairement $\boxed{v_0 = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.}$

6. Avec $\vec{L}_0 = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ et $\Delta\vec{v} \,//\, \vec{r}$, **le moment cinétique n'est pas modifié.**

7. Avant l'impulsion l'énergie mécanique est :

$E_{m,i} = E_{m0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$, avec $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$: $E_{m0} = -\frac{1}{2}mv_0^2$.

À la suite de l'impulsion, il vient :

$$E_{m,f} = \frac{1}{2}m\left(v_0\vec{e}_\theta + v_1\vec{e}_r\right)^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{m}{2}v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} + \frac{m}{2}v_1^2 = E_{m,i} + \frac{m}{2}v_1^2$$

En conséquence :

$$\boxed{\Delta E_m = \tfrac{1}{2}mv_1^2}$$

Pour une trajectoire liée elliptique et une attraction gravitationnelle, on sait que l'énergie mécanique a pour expression $E_m = -\frac{GMm}{2a}$, en conséquence :

$$-\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{2r_0} + \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{r_0} - \frac{v_1^2}{GM} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0} \times \frac{v_1^2}{GM/r_0} = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{v_1^2}{v_0^2}\right)$$

Il vient :

$$\boxed{a = \frac{r_0}{1-(v_1/v_0)^2}}$$

Le demi-grand axe ne varie pas à l'ordre 1 en $|v_1|/v_0$.

8. La conservation du moment cinétique permet de définir la constante des aires :

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta} = r_0 v_0}$$

Il vient alors :

$$E_m = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - \frac{GMm}{r} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}$$

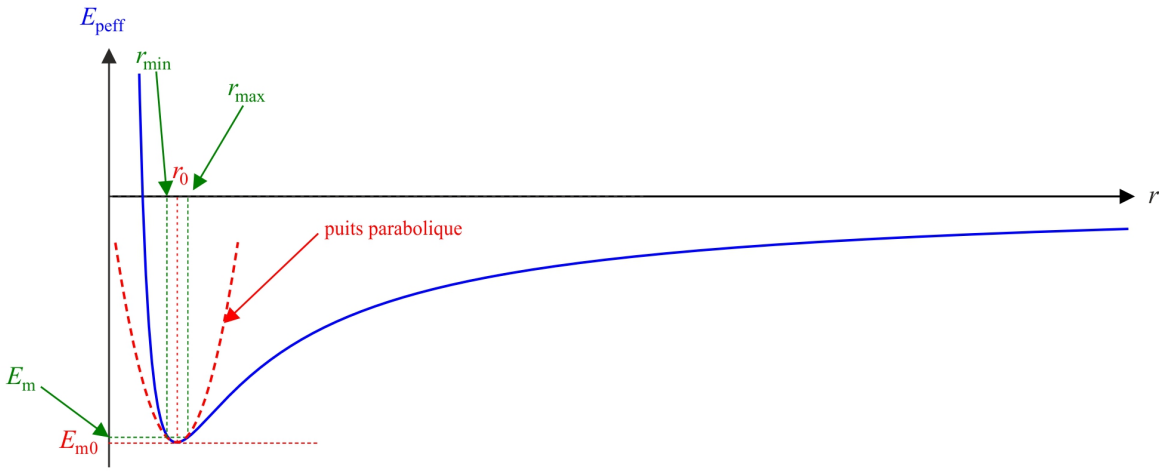
Comme $v_0^2 = GM/r_0$, on a :

$$\boxed{E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mr_0^2v_0^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r} = mv_0^2\left[\frac{r_0^2}{2r^2} - \frac{r_0}{r}\right]}$$

9. La trajectoire circulaire est associée au minimum de l'énergie potentielle effective :

$$E'_{p,\text{eff}}(r) = mv_0^2\left(-\frac{r_0^2}{r^3} + \frac{r_0}{r^2}\right)$$

On a bien $E'_{p,\text{eff}}(r = r_0) = 0$, et $E_{p,\text{eff}} = E_{m0}$.



10. L'énergie mécanique étant conservée, sa dérivée temporelle est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} + mv_0^2\left[-\frac{r_0^2}{r^3} + \frac{r_0}{r^2}\right] = 0$$

Avec $r(t) = r_0 + r_1(t)$, il vient à l'ordre 1 en r_1/r_0 :

$$0 = \ddot{r}_1(t) + \frac{v_0^2}{r_0}\left[-\frac{1}{(1 + r_1(t)/r_0)^3} + \frac{1}{(1 + r_1(t)/r_0)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 0 \simeq \ddot{r}_1(t) + \frac{v_0^2}{r_0}\left[-\left(1 - 3\frac{r_1(t)}{r_0}\right) + \left(1 - 2\frac{r_1(t)}{r_0}\right)\right]$$

$$\Rightarrow 0 = \ddot{r}_1(t) + \left(\frac{v_0}{r_0}\right)^2 r_1(t)$$

On obtient l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \frac{v_0}{r_0}$. La période de cet oscillateur harmonique est donc égale à la période de révolution de la Terre autour du Soleil.

L'équation linéarisée $m\ddot{r}_1(t) + m\omega^2 r_1(t)$ correspond à une force harmonique $-kr_1$, avec $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$, donc à une énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r) = E_{m0} + \frac{1}{2}kr_1^2 = E_{m0} + \frac{1}{2}m\omega^2 r_1^2$ puisque $E_{p,\text{eff}}(r) = E_{m0}$ (mouvement circulaire uniforme) si $r_1 = 0$.

L'oscillateur correspond au cas des petits mouvements dans la cuvette de potentiel, c'est-à-dire pour une énergie mécanique proche de E_{m0} telle que l'on puisse considérer que le puits est parabolique.

Remarquons qu'à l'ordre 2, on a au voisinage de $r_1 = 0$:

$E_{p,\text{eff}}(r) = E_{m0} + r_1 \frac{\mathrm{d}E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r}(r_1 = 0) + \frac{1}{2}r_1^2 \frac{\mathrm{d}^2E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}(r_1 = 0) = E_{m0} + \frac{1}{2}r_1^2 \frac{\mathrm{d}^2E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}(r_1 = 0)$, avec :
$\frac{\mathrm{d}^2E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2} = mv_0^2\left(3\frac{r_0^2}{r^4} - 2\frac{r_0}{r^3}\right)$ donc :
$\frac{\mathrm{d}^2E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}(r = r_0) = \frac{mv_0^2}{r_0^2} \Rightarrow k = m\omega^2$.

11. À l'ordre 1 en r_1/r_0, le demi-grand axe est inchangé donc :

$$\boxed{a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = r_0}$$

Avec $r_{\max} = 1{,}01r_0$, on a $r_{\min} = 2r_0 - r_{\max} = 0{,}99r_0$. On se trouve bien dans le cadre de l'approximation $|r_1|/r_0 \ll 1$.

12. r_1 varie donc sinusoïdalement avec la pulsation ω et l'amplitude :

$$\boxed{\Delta r = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2} = 0{,}01r_0}$$

Comme $r_1(t = 0) = 0$, on a :

$$r_1(t) = \pm\Delta r \sin(\omega t)$$

Le petit complément d'énergie fourni à la sonde DART lui permet d'osciller dans le puits harmonique. Le rayon ne reste plus exactement égal à r_0 mais oscille entre $r_{\min}$ et $r_{\max}$ (mouvement elliptique).

On a alors :

$$E_{p,\text{eff}}(r) = E_{m0} + \frac{1}{2}kr_1^2 \Rightarrow E_{p,\text{eff}}(t) = E_{m0} + \frac{1}{2}k\left[\Delta r \sin(\omega t)\right]^2$$

À l'aphélie, $r_1 = \Delta r$ et $E_m = E_{m0} + \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{p,\text{eff}}(\Delta r)$:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta r)^2 \Rightarrow (\Delta r)^2 = \frac{v_1^2}{\omega^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \Delta r = \frac{r_0|v_1|}{v_0}}$$

Comme $\Delta r = 0{,}01r_0$, on en déduit : $|v_1| = 0{,}01v_0$, c'est-à-dire $v_1 = 0{,}3\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

13. La trajectoire de DART est la combinaison du mouvement circulaire de rotation auquel on ajoute une oscillation radiale de même période (cf. Q10). **La période de révolution de DART est donc celle de la Terre** en accord avec le fait que le demi-grand axe n'est pas modifié au premier ordre en $|v_1|/v_0$.

14. En $t = 3T/4, \omega t = \frac{2\pi}{T} \times \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow r_1(t) = \pm\Delta r \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \mp\Delta r$. Comme r_1 est maximal à cet instant, il faut retenir la solution :

$$\boxed{r_1(t) = -\Delta r \sin(\omega t)}$$

ainsi à $t = 0$: $\dot{r}_1 < 0 \Rightarrow v_1 < 0$: impulsion initiale en direction du Soleil.

15. $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - B\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r + B\dot{\theta}\vec{e}_r$ par application du PFD à DART dans le référentiel héliocentrique. Or la conservation du moment cinétique impose $L_S = mr^2\dot{\theta}$. Pour assurer $\vec{T} = \overrightarrow{\text{cste}}$, il faut :

$$\boxed{B = \frac{GM}{r^2\dot{\theta}} \Rightarrow B = \frac{GMm}{L_S}}$$

16. Pour un mouvement circulaire, la vitesse est orthoradiale, $v_0^2 = \frac{GM}{r_0}$ et $L_S = mr_0v_0$, en conséquence :

$$\boxed{B = v_0 \quad \text{et} \quad \vec{T} = v_0\vec{e}_\theta - v_0\vec{e}_\theta = \vec{0}}$$

17. Le vecteur $\vec{T}$ étant une constante du mouvement, on peut se placer au périhélie P ($r = r_P, v = v_P$) ou à l'aphélie A ($r = r_A, v = v_A$) pour le déterminer.

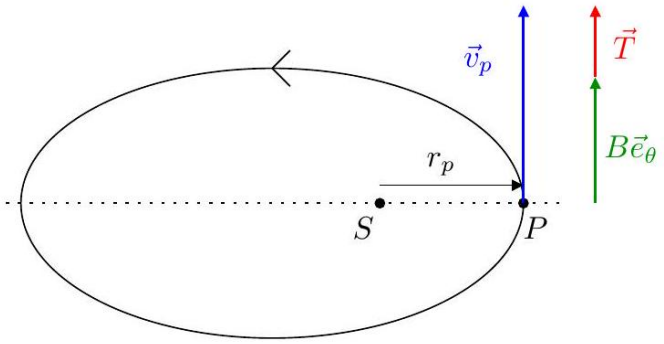
    En P, le vecteur vitesse et le vecteur unitaire orthoradial sont perpendiculaires à l'axe principal de l'ellipse, donc $\vec{T}$ est dans le plan de la trajectoire et perpendiculaire à l'axe principal.

    On a : $B = \frac{GMm}{L_S} = \frac{GMm}{mr_P v_P} = \frac{GM}{r_P v_P}$.
    En exprimant l'énergie mécanique au périhélie, il vient :

$$E_m = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{r_A + r_P} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GMm}{r_P} \Rightarrow v_P^2 = \frac{2GM}{r_P}\left[\frac{r_A}{r_A + r_P}\right] \Rightarrow v_P = 2\frac{GM}{r_P v_P}\left[\frac{r_A}{r_A + r_P}\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow v_P = 2B\left[\frac{1}{1+\frac{r_P}{r_A}}\right]}$$

    Comme $r_A \geq r_P$, $\frac{1}{1+\frac{r_P}{r_A}} \leq \frac{1}{2}$ donc $v_p \geq B$, le cas d'égalité étant obtenu pour la trajectoire circulaire comme on l'a montré à la question 16. On en déduit ainsi le sens du vecteur $\vec{T}$ et le schéma demandé :



18. $B = \frac{GMm}{L_S}$. Comme le moment cinétique est conservé lors de la manœuvre modifiant la trajectoire de DART, le moment cinétique est celui de la trajectoire circulaire, donc $B = v_0$ (cf. question 16).
    Ainsi $\vec{T} = v_0\vec{e}_\theta - v_1\vec{e}_r - B\vec{e}_\theta = -v_1\vec{e}_r = |v_1|\,\vec{e}_r$.

$$\boxed{\Rightarrow \|\vec{T}\| = |v_1|}$$

19. À l'aphélie et au périhélie, le vecteur vitesse est orthoradial et les trois vecteurs $\vec{v}, \vec{T}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires. D'après la figure ci-dessus, il vient :

$$\boxed{v_P = v_0 + |v_1| = v_0 - v_1 \quad \text{et} \quad v_A = v_0 - |v_1| = v_0 + v_1}$$

20. En exploitant la constante des aires, il vient $r_P\,(v_0 + |v_1|) = r_A\,(v_0 - |v_1|)$.
    Avec $r_P + r_A = 2a = 2r_0$ à l'ordre 1 en v_1/v_0, il vient :

$$2r_0 = r_A\left(1 + \frac{v_0 - |v_1|}{v_0 + |v_1|}\right) \Rightarrow r_A = r_0\left(1 + \frac{|v_1|}{v_0}\right)$$

    On en déduit :

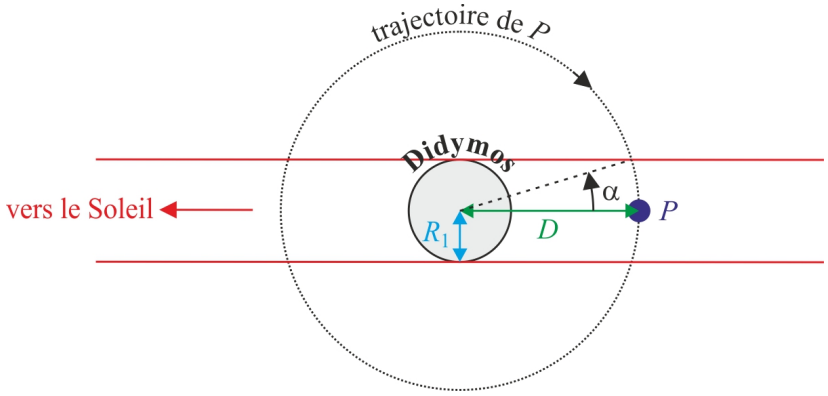
$$\boxed{\Delta r = r_0\frac{|v_1|}{v_0}}$$

21. On note $p = 4\%$. La luminosité étant proportionnelle à la surface éclairée, il vient :

$$\boxed{p = \frac{(\pi R_1^2 + \pi R_2^2) - \pi R_1^2}{\pi R_1^2 + \pi R_2^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \Rightarrow p \simeq \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}$$

    A.N. : $\boxed{\frac{R_2}{R_1} \simeq \sqrt{\frac{4}{100}} \simeq \frac{2}{10} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} \simeq 0,2.}$

22. Pour déterminer ce rapport, on exploite la période durant laquelle P passe dans l'ombre de Didymos.



P reste dans le cône d'ombre sur un arc de cercle de longueur $\ell_1 \simeq 2D\alpha$ avec $\sin(\alpha) = R_1/D$. Cette longueur correspond à une proportion $\frac{2D\alpha}{2\pi D}$ du périmètre du cercle. L'orbite étant parcourue à vitesse constante, le rapport des longueurs est égal au rapport de τ_1 (la durée d'immersion dans l'ombre de Didymos) par la période de révolution T_P :

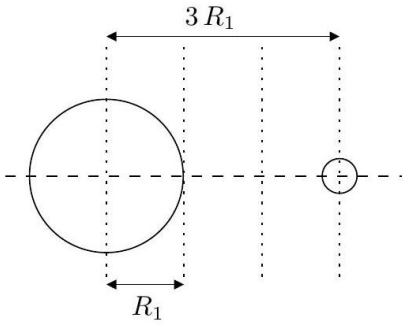
$$\boxed{\frac{\tau_1}{T_P} = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{R_1}{D}\right)}$$

De la figure 2, on tire $\tau_1/T_P \simeq 0,1$, ce qui donne :

$$\frac{R_1}{D} \simeq \sin(0,1 \times \pi) \simeq \sin(0,3) \simeq 0,3$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{R_1}{D} \simeq 0,3}$$

Avec $D \simeq 3R_1$ et $R_2 \simeq 0,2R_1$, on en déduit la représentation suivante :



23. On applique la troisième loi de Kepler à SP :

$$\frac{D^3}{T_P^2} = \frac{GM_1}{4\pi^2} = \frac{G\rho_1 \times \frac{4\pi}{3}R_1^3}{4\pi^2} = \frac{G\rho_1 R_1^3}{3\pi}$$

$$\boxed{\Rightarrow \rho_1 = 3\pi\frac{(D/R_1)^3}{GT_P^2}}$$

La durée τ entre le centre des deux creux correspond à une demi-période de révolution, en conséquence :

$$\boxed{\rho_1 = \frac{3\pi}{4}\frac{(D/R_1)^3}{G\tau^2}}$$

24. La masse de l'attracteur Didymos étant inchangée, la troisième loi de Kepler conduit, pour de faibles variations relatives, à :

$$\frac{a_P^3}{T_P^2} = \text{cste} \Rightarrow 3\frac{\mathrm{d}a_P}{a_P} = 2\frac{\mathrm{d}T_P}{T_P}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\mathrm{d}a_P}{a_P} = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}T_P}{T_P}}$$

A.N. : $\frac{\mathrm{d}a_P}{a_P} \simeq 3,2\%$.

Pour une trajectoire elliptique $E_m = -\frac{GM_1M_2}{2a_P}$, en conséquence :

$$\mathrm{d}E_m = \frac{GM_1M_2}{2a_P^2}\,\mathrm{d}a_P$$

Durant l'impact, on peut considérer que S reste au même point. En conséquence, la variation d'énergie mécanique s'identifie à la variation d'énergie cinétique :

$$\mathrm{d}E_c = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}M_2 v^2\right) = M_2 v\,\mathrm{d}v = M_2 v^2 \frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{GM_1M_2}{2a_S}\frac{\mathrm{d}a_P}{a_P}$$

Avant l'impact, la trajectoire est circulaire donc $v^2 = \frac{GM_1}{a_P}$, on en déduit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}a_P}{a_P} = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}T_P}{T_P} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{v} \simeq 1,6\%}$$

L'énergie mécanique de P augmente, ce qui traduit un choc tel que l'impact a lieu dans le sens du mouvement de P.