

CHAMPS ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

1. DÉFINITIONS ET OPÉRATIONS DE BASE

1.1 Définitions

Un *champ de scalaire* $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{V} \mathbb{R}$ (par exemple un champ de température) est une fonction du point M et de l'instant t :

$$(M, t) \mapsto V(M, t), \text{ soit, en coordonnées cartésiennes : } (x, y, z, t) \mapsto V(x, y, z, t)$$

Un *champ de vecteur* $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\vec{A}} \mathbb{R}^3$ (par exemple un champ de force) est une fonction du point M et de l'instant t :

$$(M, t) \mapsto \vec{A}(M, t), \text{ soit, en coordonnées cartésiennes : } (x, y, z, t) \mapsto \vec{A}(x, y, z, t)$$

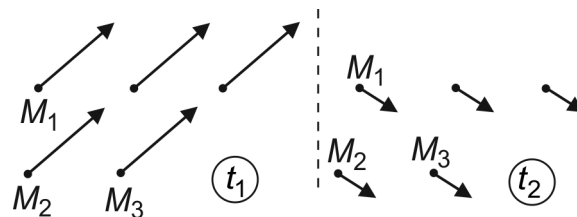
Les dérivées partielles d'un champ vectoriel s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ \frac{\partial A_y}{\partial y} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ \frac{\partial A_y}{\partial t} \\ \frac{\partial A_z}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Un champ est *uniforme* s'il est indépendant du point M . Par exemple, en coordonnées cartésiennes, on a pour un champ uniforme

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \vec{0}.$$

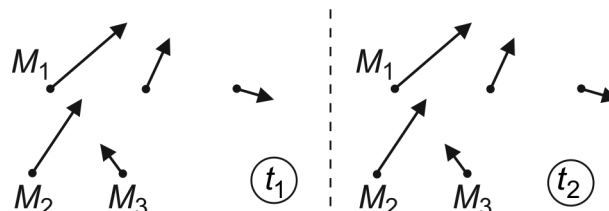
On peut représenter en quelques points un champ vectoriel uniforme à deux instants différents :



Un champ est *stationnaire* (ou *permanent*) s'il garde la même valeur en un point M donné au

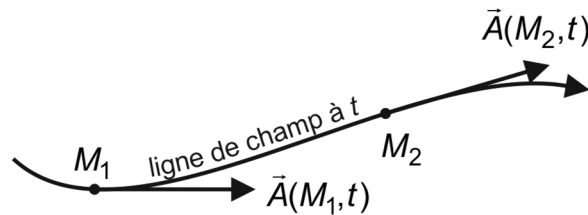
cours du temps, soit $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, ou $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$.

Représentons en quelques points un champ vectoriel stationnaire à deux instants différents :



1.2 Lignes, tubes et cartes de champ pour un champ de vecteur

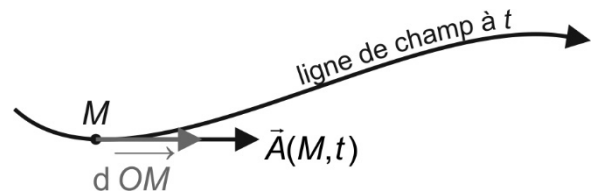
À un instant t fixé, une *ligne de champ* relie les points M tels que le champ $\vec{A}(M,t)$ soit *tangent* à la ligne. On l'oriente dans le sens du champ.



Si l'on note $d\vec{OM}$ un déplacement élémentaire le long d'une ligne de champ, $d\vec{OM}$ est colinéaire au point M

à $\vec{A}(M,t)$, soit $d\vec{OM} \wedge \vec{A}(M,t) = \vec{0}$, ce qui fournit un

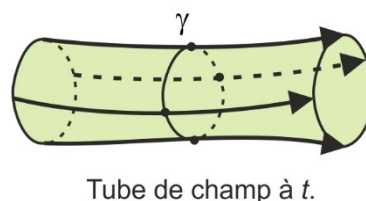
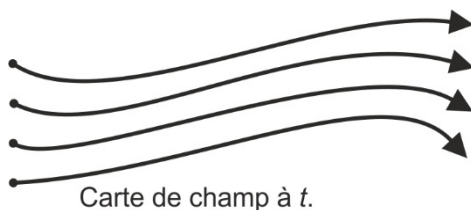
système d'équations différentielles permettant de trouver l'équation d'une ligne de champ.



Par exemple pour un champ à deux dimensions en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x(x,y,t) \\ A_y(x,y,t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_y(x,y,t)dx - A_x(x,y,t)dy = 0.$$

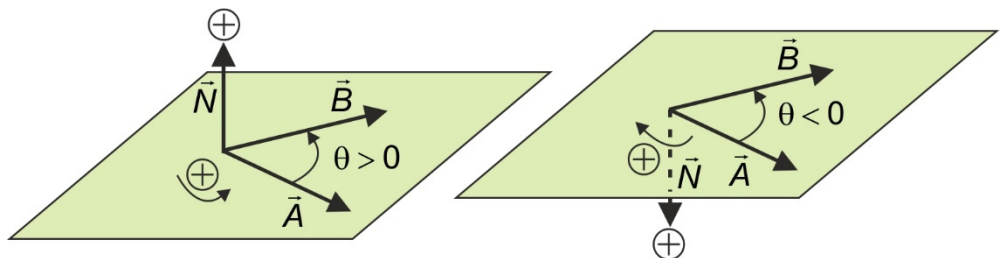
Un ensemble de lignes de champ passant par un réseau de points donnés constitue une *carte de champ*.



L'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé γ constitue un *tube de champ* (c'est donc une surface).

1.3 Opérations de base sur les vecteurs

Considérons deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ non colinéaires. On peut choisir deux orientations différentes pour un vecteur $\vec{N}$ normal au plan vectoriel engendré par ces deux vecteurs.



Lorsqu'on a choisi l'une des deux orientations, l'angle $\theta = (\vec{A}, \vec{B})$ est alors orienté selon la règle du tire-bouchon : $\theta > 0$ si un tire-bouchon se déplace dans le sens de $\vec{N}$ quand on tourne de $\vec{A}$ vers $\vec{B}$; $\theta < 0$ si un tire-bouchon se déplace dans le sens de $-\vec{N}$ quand on tourne de $\vec{A}$ vers $\vec{B}$.

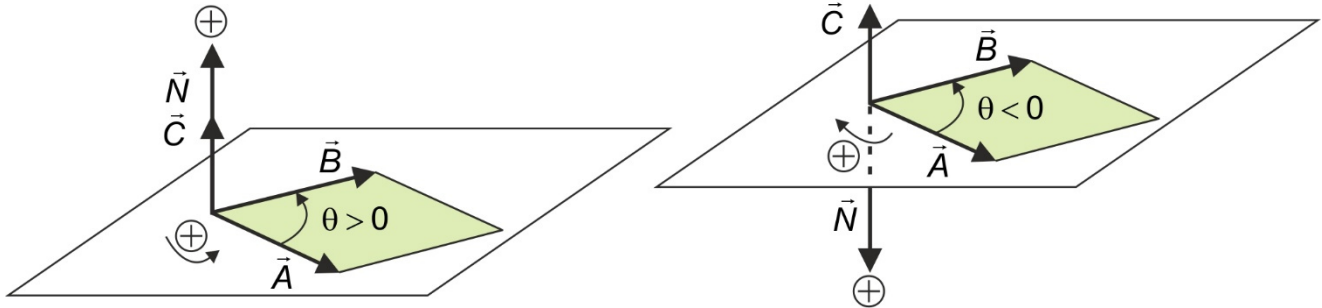
— *Produit scalaire* dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$V = \vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\vec{A}, \vec{B}) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3.$$

— *Produit vectoriel* dans une base orthonormée *directe* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: $\vec{e}_3$ est orientée dans le sens de déplacement d'un tire-bouchon quand on tourne de $\vec{e}_1$ vers $\vec{e}_2$.

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ A_3 B_1 - A_1 B_3 \\ A_1 B_2 - A_2 B_1 \end{pmatrix}. \text{ Le vecteur } \vec{C} \text{ est orthogonal à } \vec{A} \text{ et à } \vec{B}, \text{ tel que le}$$

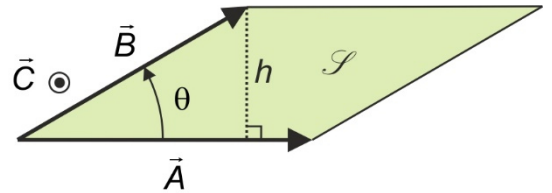
trièdre $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ soit direct, et en norme : $\|\vec{C}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot |\sin(\vec{A}, \vec{B})| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot |\sin \theta|.$



La projection C de $\vec{C}$ sur $\vec{N}$ dépend de l'orientation choisie pour $\vec{N}$.

Comme l'aire $\mathcal{S}$ du parallélogramme formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$ vaut $\mathcal{S} = \|\vec{A}\| \cdot h$ (base $\times$ hauteur), on a aussi :

$$\mathcal{S} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot |\sin \theta|. \text{ Ainsi :}$$



La norme du produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est l'aire du parallélogramme formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

— *Double produit vectoriel* : $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$ est orthogonal à $\vec{B} \wedge \vec{C}$. Il est donc dans le plan vectoriel généré par $\vec{B}$ et $\vec{C}$, soit $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \beta \vec{B} + \gamma \vec{C}$.

On retient alors facilement la formule $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$.

— Un *produit mixte* $[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] \stackrel{\text{déf}}{=} (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$ est invariant par permutation circulaire :

$$[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B} = (\vec{B} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{A}.$$

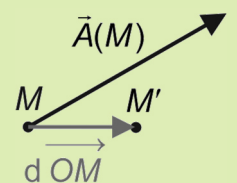
1.4 Circulation d'un champ de vecteur

On définit la circulation d'un champ de vecteur à un instant t si le champ n'est pas stationnaire.

On omettra le temps t dans $\vec{A}(M, t)$ pour ne pas alourdir les notations. Considérons un déplacement élémentaire d $\vec{OM}$ à partir du point M .

Par définition, la **circulation élémentaire** du champ de vecteur $\vec{A}(M)$ le long de ce déplacement

élémentaire est le produit scalaire $\delta \mathcal{E} = \vec{A}(M) \cdot d\vec{OM}$



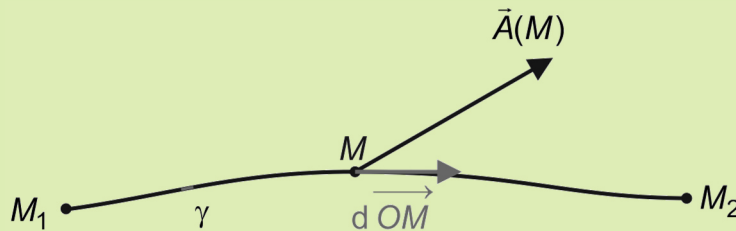
Attention ! ce n'est pas *a priori* une différentielle, c'est-à-dire la variation élémentaire d'une fonction du point f : $\delta \mathcal{E} \neq df = f(M') - f(M)$ avec $\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$.

Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}(M)$ s'exerçant sur un point matériel qui se déplace de $d\overrightarrow{OM}$ est un exemple de circulation élémentaire : $\delta W = \vec{F}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$.

La circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour orienté γ allant de M_1 à M_2 est

la somme des circulations élémentaires sur ce chemin : $\mathcal{E}_{M_1 \rightarrow M_2}^\gamma = \int_{M_1}^{M_2} \vec{A}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$.

Elle dépend *a priori* du chemin γ pour aller de M_1 à M_2 .



On a en conséquence $\mathcal{E}_{M_1 \rightarrow M_2}^\gamma = -\mathcal{E}_{M_2 \rightarrow M_1}^\gamma$

Si γ est fermé, on note $\mathcal{E}^\gamma = \oint_\gamma \vec{A}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$ la circulation *a priori* $\neq 0$.

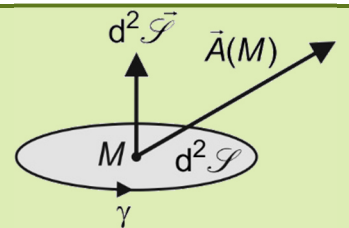
1.5 Flux d'un champ de vecteur

On définit le flux d'un champ de vecteur à un instant t si le champ n'est pas stationnaire. On omettra de nouveau le temps t dans $\vec{A}(M, t)$ pour ne pas alourdir les notations.

Considérons une surface élémentaire $d^2\mathcal{S}$ autour d'un point M . Cette surface est limitée par un contour élémentaire fermé γ dont l'orientation détermine grâce à la règle du tire-bouchon celle du vecteur surface $d^2\vec{\mathcal{S}}$ (de norme $d^2\mathcal{S}$, orthogonal à l'élément de surface).

Le **flux élémentaire** du champ $\vec{A}(M)$ à travers $d^2\mathcal{S}$ est égal au produit

scalaire $d^2\Phi = \vec{A}(M) \cdot d^2\vec{\mathcal{S}}$. Son signe dépend de l'orientation de $d^2\vec{\mathcal{S}}$.

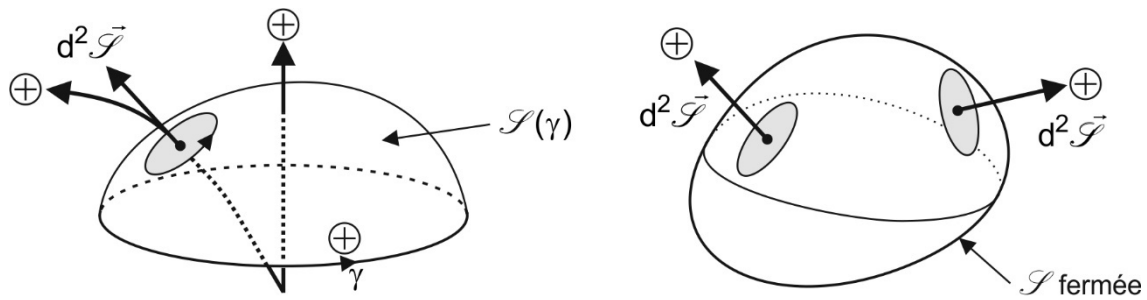


Le flux $\Phi_{\mathcal{S}}$ d'un champ de vecteur à travers une surface finie $\mathcal{S}$ est défini de la façon suivante :

— Si la surface s'appuie sur un contour fermé γ orienté : $\Phi_{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}(\gamma)} \vec{A}(M) \cdot d^2\vec{\mathcal{S}}$. Ce flux dépend

a priori de la surface $\mathcal{S}$ choisie s'appuyant sur γ . Comme la figure ci-après le montre, les vecteurs surface élémentaires sont orientés grâce à la règle du tire-bouchon dès que le contour γ l'est.

— Si la surface $\mathcal{S}$ est fermée, tous les vecteurs surface élémentaires sont orientés par convention de l'intérieur vers l'extérieur, et l'on note $\Phi_{\mathcal{S}} = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}(M) \cdot d^2\vec{\mathcal{S}}$.



2. LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

2.1 Gradient

• Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

L'opérateur gradient noté $\overrightarrow{\text{grad}}$ est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de *scalaire* $V(M)$. $\overrightarrow{\text{grad}} V \in \mathbb{R}^3$ est un *vecteur*.

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ sur la base de coordonnées cartésiennes } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z).$$

Remarque : on introduit parfois l'opérateur « *nabla* » $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ (en coordonnées cartésiennes).

On a ainsi $\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{\nabla} V$.

• Définition intrinsèque

Lorsqu'on passe du point $M(x,y,z)$ au point $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$ infiniment voisin, la fonction

V varie de $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\overrightarrow{OM}$. Cette relation fournit la définition *intrin-*

sèque (indépendante du système de coordonnées choisi) de l'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$:

Lors d'un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$, V varie de dV , avec $dV = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\overrightarrow{OM}$

• Expression dans un système de coordonnées cylindriques

Puisque $d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$, on a :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} r d\theta + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\overrightarrow{OM}. \text{ D'où :}$$

$$\overrightarrow{\text{grad } V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z).$$

• Expression dans un système de coordonnées sphériques

Puisque $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$, on a :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} r d\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} r \sin\theta d\varphi = \overrightarrow{\text{grad } V} \cdot d\overrightarrow{OM}. \text{ D'où :}$$

$$\overrightarrow{\text{grad } V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi).$$

• Interprétation physique de l'opérateur gradient

$\|\overrightarrow{\text{grad } V}\|$ « mesure » les variations *spatiales* locales de V : plus V varie fortement au voisinage de M , plus $\|\overrightarrow{\text{grad } V}\|$ est grand.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad } V}$ indique dans quelles direction et sens varie localement V .

2.2 Rotationnel

• Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

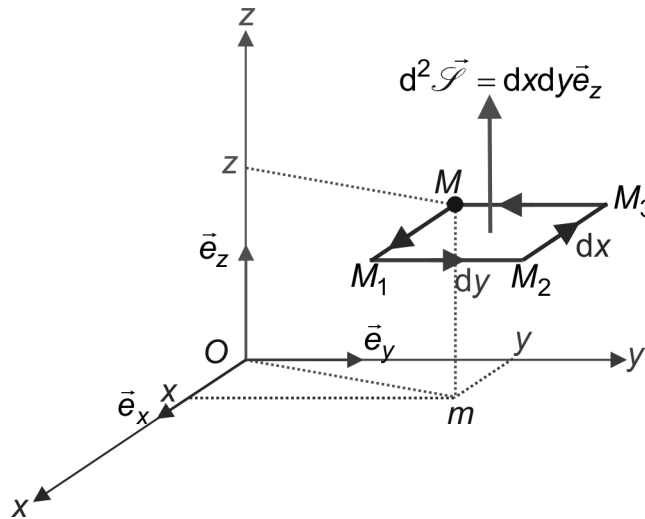
L'opérateur rotationnel noté $\overrightarrow{\text{rot}}$ est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de *vecteur* $\vec{A}(M)$. $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \in \mathbb{R}^3$ est un *vecteur*.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z). \text{ On a donc } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}.$$

• Définition intrinsèque

Pour donner une définition intrinsèque de $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$, on calcule la circulation élémentaire $\delta^2 \mathcal{C}$ de $\vec{A}$ le long d'un contour fermé.

Ce contour étant élémentaire, peu importe sa forme : on choisit un rectangle de côtés dx et dy .



$\delta^2 \mathcal{E} = \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{MM_1} + \vec{A}(M_1) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} + \vec{A}(M_2) \cdot \overrightarrow{M_2M_3} + \vec{A}(M_3) \cdot \overrightarrow{M_3M}$. Or, puisque $\overrightarrow{MM_1} = dx\vec{e}_x$ est déjà

d'ordre 1 en dx , on a $\vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{MM_1} = \vec{A}(M_1) \cdot \overrightarrow{MM_1}$. De même $\vec{A}(M_1) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{A}(M_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$.

Ainsi $\delta^2 \mathcal{E} = [\vec{A}(M_1) - \vec{A}(M_2)] \cdot dx\vec{e}_x + [\vec{A}(M_2) - \vec{A}(M_3)] \cdot dy\vec{e}_y$, soit :

$$\delta^2 \mathcal{E} = \left[-\frac{\partial A_x}{\partial y} dy \right] dx + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} dx \right] dy = \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] dxdy, \text{ terme qui est d'ordre 2.}$$

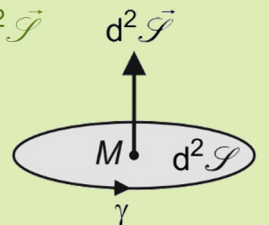
$$\text{Finalement } \delta^2 \mathcal{E} = \left[\left(\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}} \right) \cdot \vec{e}_z \right] dxdy = \overrightarrow{\text{rot } \vec{A}} \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}} = \overrightarrow{\text{rot } \vec{A}} \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}}.$$

Cette relation fournit la définition *intrinsèque* de l'opérateur $\overrightarrow{\text{rot}}$:

On considère un contour élémentaire orienté γ , au voisinage du point M , et $d^2 \vec{\mathcal{S}}$

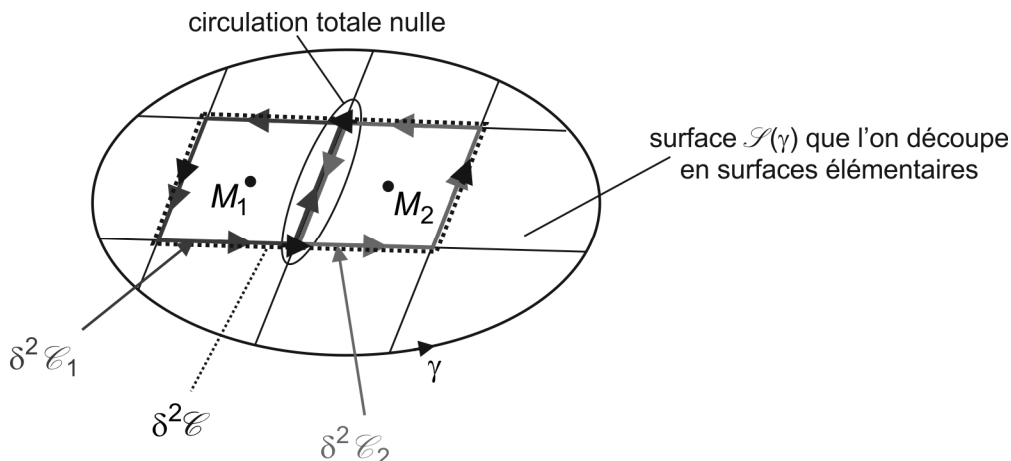
le vecteur surface élémentaire d'une surface quelconque s'appuyant sur γ .

La circulation du champ vectoriel $\vec{A}$ sur ce contour est $\delta^2 \mathcal{E} = \overrightarrow{\text{rot } \vec{A}} \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}}$.



• Théorème de Stokes

On obtient la forme intégrale de cette relation, appelée théorème de Stokes, en découpant une surface quelconque $\mathcal{S}$, s'appuyant sur un contour fermé γ , en surfaces élémentaires.



On considère deux de ces surfaces élémentaires voisines (elles possèdent un bout de contour commun) autour de M_1 et M_2 . Les contours élémentaires sur lesquels elles s'appuient sont orientés dans le même sens que γ , si bien que la circulation sur le segment commun est comptée avec des signes opposés dans le calcul des circulations élémentaires $\delta^2\mathcal{C}_1$ et $\delta^2\mathcal{C}_2$.

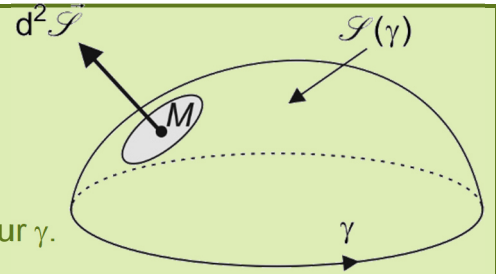
La circulation $\delta^2\mathcal{C}$ sur le contour qui entoure les deux surfaces élémentaires vaut donc :

$$\delta^2\mathcal{C} = \delta^2\mathcal{C}_1 + \delta^2\mathcal{C}_2 = (\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}})(M_1) \cdot d^2\vec{\mathcal{I}}_1 + (\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}})(M_2) \cdot d^2\vec{\mathcal{I}}_2.$$

En sommant les circulations sur tous les contours élémentaires, on obtient :

$$\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{OM} = \iint_{\mathcal{S}(\gamma)} \overrightarrow{\text{rot } \vec{A}} \cdot d^2\vec{\mathcal{I}}. \text{ C'est le } \textit{théorème de Stokes} :$$

la circulation du champ $\vec{A}$ sur un contour fermé γ est égale au flux de $\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}}$ sur une surface quelconque $\mathcal{S}(\gamma)$ s'appuyant sur γ .



Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur rotationnel, on trouve, après calculs, les expressions de $\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.

• Expression dans un système de coordonnées cylindriques et sphériques

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} [r A_\theta] - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

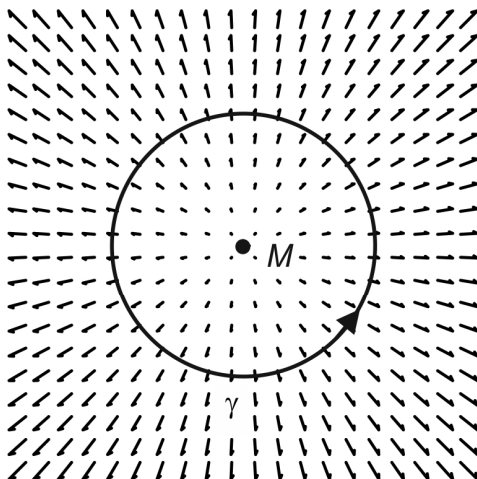
sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [A_\phi \sin \theta] - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r A_\phi] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} [r A_\theta] - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

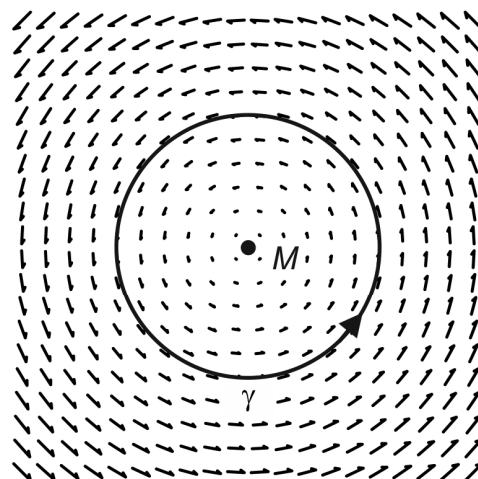
sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$

• Interprétation physique de l'opérateur rotationnel

De $\delta^2\mathcal{C} = \overrightarrow{\text{rot } \vec{A}} \cdot d^2\vec{\mathcal{I}}$, on déduit que $\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}}$ permet de quantifier le caractère *tourbillonnaire* d'un champ vectoriel au voisinage d'un point M .



$$(\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}})(M) = \vec{0}$$



$$(\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}})(M) \neq \vec{0}$$

Prenons l'exemple d'un champ localement radial, $\delta^2 \mathcal{C} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{0}$, alors que pour un champ orthoradial $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \neq \vec{0}$.

2.3 Divergence

• Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

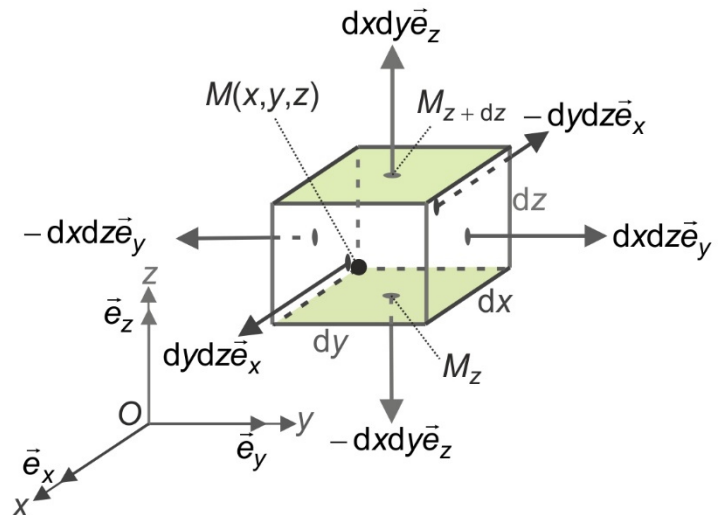
L'opérateur divergence noté div est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de vecteur $\vec{A}(M)$. $\text{div} \vec{A} \in \mathbb{R}$ est un scalaire.

$$\text{div} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \text{ On a donc } \text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}.$$

• Définition intrinsèque

Pour donner une définition intrinsèque de $\text{div} \vec{A}$, on calcule le flux $d^3\Phi$ de $\vec{A}$ à travers une surface fermée élémentaire entourant un volume $d^3\mathcal{V}$. Ce volume étant élémentaire, peu importe sa forme : on choisit un parallélépipède de côtés dx , dy et dz . On a donc $d^3\mathcal{V} = dxdydz$.

Considérons les flux $\vec{A}(M_{z+dz}) \cdot dxdy\vec{e}_z$ à travers la surface supérieure (qui se trouve dans le plan de cote $z+dz$) et $\vec{A}(M_z) \cdot (-dxdy\vec{e}_z)$ à travers la surface inférieure (qui se trouve dans le plan de cote z).



Leur somme vaut $[A_z(M_{z+dz}) - A_z(M_z)] \cdot dxdy$. Les surfaces $dxdy$ étant d'ordre 1 en dx et d'ordre 1 en dy , le calcul de cette somme donne

$\frac{\partial A_z}{\partial z} dz \cdot dxdy$: elle est d'ordre 3. Le flux *total* vaut donc :

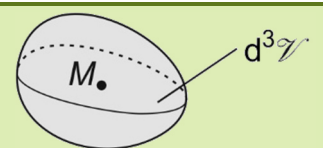
$$d^3\Phi = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} dx \right] \cdot dydz + \left[\frac{\partial A_y}{\partial y} dy \right] \cdot dxdz + \left[\frac{\partial A_z}{\partial z} dz \right] \cdot dxdy = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] dxdydz$$

Finalement $d^3\Phi = \text{div} \vec{A} \cdot d^3\mathcal{V}$. Cette relation fournit la définition *intrinsèque* de l'opérateur div :

On considère une surface élémentaire fermée entourant le point M . On

note $d^3\mathcal{V}$ le volume élémentaire à l'intérieur de cette surface. Le flux

$d^3\Phi$ d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à travers cette surface est $d^3\Phi = (\text{div} \vec{A})(M) d^3\mathcal{V}$.



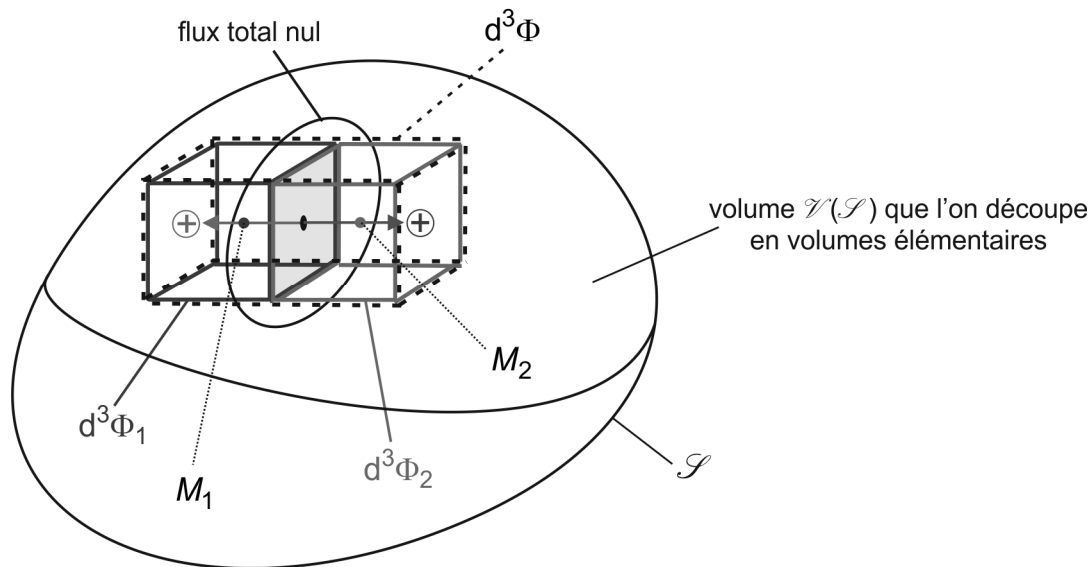
• Théorème de Green-Ostrogradski

On obtient la forme intégrale de cette relation, appelée théorème de Green-Ostrogradski, en découpant un volume $\mathcal{V}$ à l'intérieur d'une surface fermée $\mathcal{S}$ en volumes élémentaires.

On considère deux de ces volumes élémentaires voisins (ils possèdent une surface commune) autour de M_1 et M_2 . Les surfaces élémentaires entourant ces volumes sont orientées de l'intérieur vers l'extérieur, si bien que le flux à travers la surface commune est compté avec des signes opposés dans le calcul des flux élémentaires $d^3\Phi_1$ et $d^3\Phi_2$.

Le flux $d^3\Phi$ à travers la surface qui entoure les deux volumes élémentaires vaut donc :

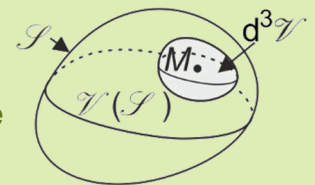
$$d^3\Phi = d^3\Phi_1 + d^3\Phi_2 = (\text{div} \vec{A})(M_1)d^3\mathcal{V}_1 + (\text{div} \vec{A})(M_2)d^3\mathcal{V}_2.$$



En sommant les flux à travers toutes les surfaces élémentaires, on obtient :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} = \iiint_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} \text{div} \vec{A} d^3\mathcal{V}. \text{ C'est le théorème de Green-Ostrogradski.}$$

Le flux du champ $\vec{A}$ à travers une surface fermée $\mathcal{S}$ est égal à l'intégrale de $\text{div} \vec{A}$ sur le volume $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ à l'intérieur de $\mathcal{S}$.



Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur divergence, on trouve après calculs les expressions de $\text{div} \vec{A}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.

• Expression dans un système de coordonnées cylindriques et sphériques

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r A_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

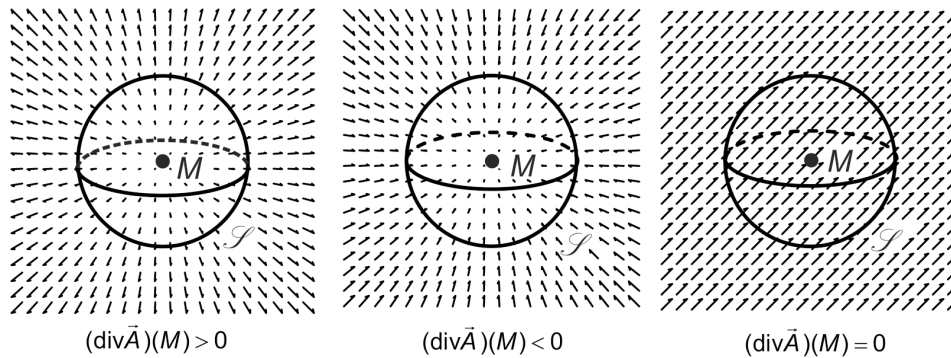
$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 A_r] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [A_\theta \sin \theta] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

• Interprétation physique de l'opérateur divergence

De $d^3\Phi = \text{div} \vec{A} d^3\mathcal{V}$, on déduit que $\text{div} \vec{A}$ permet de quantifier le caractère *divergent* d'un champ vectoriel au voisinage d'un point M . Prenons l'exemple d'un champ localement radial et divergent : $d^3\Phi > 0 \Rightarrow \text{div} \vec{A} > 0$, alors que pour un champ localement radial et convergent :

$\text{div} \vec{A} < 0$, et que pour un champ localement uniforme $\text{div} \vec{A} = 0$.

Par souci de lisibilité, le champ sur la figure ci-après n'est représenté que dans un plan passant par M .



2.4 Laplacien scalaire

• Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

L'opérateur laplacien scalaire noté Δ est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de scalaire $V(M)$. $\Delta V \in \mathbb{R}$ est un scalaire.

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

• Définition intrinsèque

On a $\Delta V = \text{div} \left[\overrightarrow{\text{grad } V} \right]$, relation qui constitue la définition intrinsèque du laplacien de V .

Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur laplacien scalaire, on trouve les expressions de ΔV dans d'autres systèmes de coordonnées.

• Expression dans un système de coordonnées cylindriques

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial V}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \text{ ou } \Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

• Expression dans un système de coordonnées sphériques

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}.$$

$$= \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rV]$$

2.5 Laplacien vectoriel

• Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

L'opérateur laplacien vectoriel noté Δ ou $\vec{\Delta}$ est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de vecteur $\vec{A}(M)$. $\Delta \vec{A} \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur.

$$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z).$$

Remarque : on peut trouver également la notation $\vec{\Delta}\vec{A}$, plus explicite quant au caractère vectoriel du résultat obtenu, mais moins utilisée.

• Définition intrinsèque

On obtient après calcul la définition intrinsèque : $\Delta\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div}\vec{A}] - \overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}\right]$

Cette relation permet d'obtenir $\Delta\vec{A}$ dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques mais les composantes du laplacien vectoriel **ne sont pas** égales au laplacien scalaire des com-

posantes de $\vec{A}$: $\Delta\vec{A} \neq \begin{pmatrix} \Delta A_r \\ \Delta A_\theta \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$ sur $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et $\Delta\vec{A} \neq \begin{pmatrix} \Delta A_r \\ \Delta A_\theta \\ \Delta A_\phi \end{pmatrix}$ sur $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$.

L'expression la plus générale est lourde et très rarement utilisée

2.6 Formules utiles

Les formules intrinsèques suivantes peuvent par exemple être démontrées en coordonnées cartésiennes.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{grad}}V\right] = \vec{0}$$

$$\text{div}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}\right] = 0$$

$$\text{div}(V\vec{A}) = V\text{div}\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \vec{A}$$

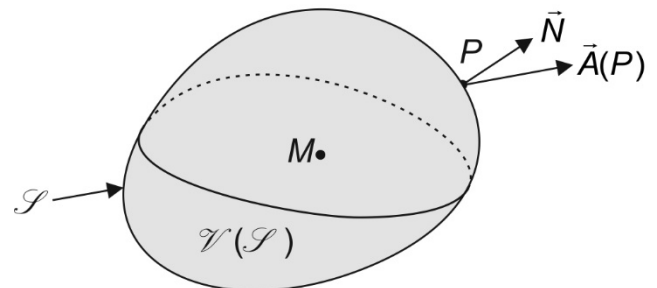
$$\overrightarrow{\text{rot}}(V\vec{A}) = V\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}V \wedge \vec{A}$$

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}\right] = \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div}\vec{A}] - \Delta\vec{A} \text{ (définition intrinsèque du laplacien vectoriel).}$$

2.7 Théorème de Helmholtz (complément hors-programme)

Ce théorème (hors-programme) assure l'*unicité* d'un champ de vecteur dont on connaît à la fois le *rotationnel* et la *divergence* pour tout point M d'un volume $\mathcal{V}$ contenu dans une surface fermée $\mathcal{S}$, à condition que l'on connaisse *les conditions aux limites* : $\vec{A}(P) \cdot \vec{N}$ en tout point P de $\mathcal{S}$, où $\vec{N}$ est la normale extérieure à $\mathcal{S}$ en P .



Pour un champ de *scalaire*, le théorème de Helmholtz assure l'*unicité* de $V(M)$ dont on connaît le *laplacien* en tout point M de $\mathcal{V}$, à condition que l'on connaisse les *conditions aux limites* : $V(P)$ ou $\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \vec{N}$ en tout point de $\mathcal{S}$.

Ces théorèmes d'unicité fonctionnent également quand le volume $\mathcal{V}$ est infini, à condition de connaître les conditions aux limites en l'infini.

En revanche, il n'y a pas unicité quand les conditions aux limites portent sur un domaine doublement connexe (comme un tore, ou un cylindre infini).