DS1 (Révisions de mécanique)

AGRÉGATION DE PHYSIQUE Option Chimie, composition de Physique // 2026 : Voir de plus en plus petit, « voir » les atomes : le microscope électronique

Durée de l'épreuve : 2 heures 30 minutes
L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.
10% des points seront attribués à la qualité de la copie (présentation, écriture, rédaction).

Voici le principe d'un microscope électronique à balayage (MEB) :

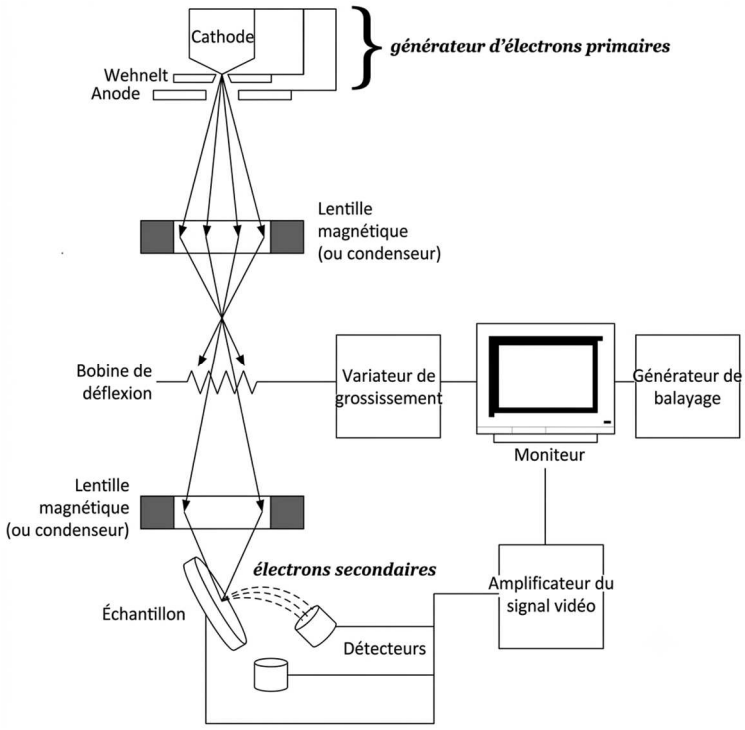


Figure 1 - Schéma du microscope électronique à balayage (Source Encyclopaedia Universalis)

Le principe de fonctionnement d'un microscope électronique à balayage est similaire à celui d'un microscope optique. Il est constitué de trois parties principales : un « canon à électrons », des lentilles électromagnétiques entre lesquelles est placé l'échantillon, et la chambre d'observation (figure 1). Le canon produit et accélère les électrons (dits électrons primaires), les lentilles convergentes (condenseurs) focalisent le faisceau d'électrons, l'amenant vers l'échantillon dans des conditions déterminées. Ces électrons sont les vecteurs d'information sur l'objet étudié, tout comme les photons le sont dans le cas d'un microscope optique. Le détecteur permet ensuite de reconstituer l'image de l'échantillon en analysant les propriétés des électrons (dits secondaires) émis lors de l'interaction entre l'objet et les électrons primaires. Le tout est plongé dans un vide poussé (pression inférieure à 10^{-3} Pa).
Dans cette partie, on étudie certains aspects de ce microscope : la méthode d'accélération des électrons primaires dans le canon à électrons, puis les propriétés du faisceau d'électrons avec l'étude du principe de lentille magnétique. On placera l'étude dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire supposé galiléen.

1 Génération du faisceau d'électrons et pouvoir de résolution

Q.1 Rappeler la relation de Louis de Broglie reliant la longueur d'onde λ_{dB} de l'onde de matière associée à une particule de quantité de mouvement $\vec{p}$, de norme p.
À quelle condition sur la taille a des obstacles rencontrés par la particule peut-on ne pas faire appel à la mécanique quantique ?

On modélise la partie « canon à électrons » par un système de deux plaques métalliques planes, parallèles, de dimensions très grandes devant leur distance mutuelle. La cathode est portée à un potentiel nul et l'anode à un potentiel V_a. La cathode émet des électrons par effet thermoïonique : les électrons de conduction quittent la surface du métal chauffée, lorsque l'agitation thermique est suffisante pour les en arracher.

Q.2 Exprimer la force de Lorentz $\vec{F}_{\mathrm{L}}$ exercée sur une charge ponctuelle q, de vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel d'étude, placée dans un champ électromagnétique $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$.

Q.3 On définit le potentiel scalaire V de l'électrostatique par $\vec{E}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$. En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique E_{pe} d'une charge ponctuelle q plongée dans un champ électrostatique $\vec{E}$.
Indiquer, en le justifiant, le signe de V_{a} pour que la vitesse des électrons augmente. On accompagnera le raisonnement d'un schéma.

Q.4 En faisant l'hypothèse que les électrons primaires ne sont pas relativistes, exprimer la norme v_{f} de la vitesse acquise par les électrons lorsqu'ils atteignent l'anode, en supposant qu'ils sont émis par la cathode à vitesse négligeable devant v_{f}. On exprimera v_{f} en fonction de V_{a} et des constantes fondamentales.

Q.5 Calculer la vitesse des électrons pour les cas $\left|V_{\mathrm{a}}\right|=10$ kV (cas 1) et $\left|V_{\mathrm{a}}\right|=10^3$ kV (cas 2). Commenter la validité de l'hypothèse faite à la question précédente.

2 Lentille magnétique

Dans cette partie, on étudie d'abord le principe de la déflexion par champ magnétique, avant de voir comment cette déflexion est utilisée pour élaborer une lentille magnétique.

2.1 Déflexion magnétique

Le rôle d'un déflecteur magnétique est de dévier le faisceau d'électrons provenant du générateur d'électrons primaires (figure 1).

Q.6 Donner l'ordre de grandeur de la norme du champ magnétique terrestre en France et indiquer son origine physique.

Q.7 Montrer que la vitesse d'un électron dans la zone du déflecteur magnétique garde une norme constante.

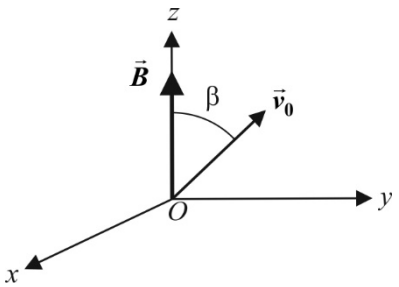


Figure 2 - Conditions initiales de l'électron

On suppose qu'un électron de masse m_e, de vitesse $\vec{v}_0$ arrive dans une zone où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}=B\vec{u}_z$ (figure 2).
Le vecteur vitesse initiale de l'électron est situé dans le plan $\left(yOz\right)$ et $\vec{v}_0$ fait un angle β avec $\vec{B}$ (on prendra $\beta\in\left[0;\pi/2\right]$).
On représente l'électron par un point matériel M de coordonnées cartésiennes $\left(x,y,z\right)$, de vitesse $\left(v_x,v_y,v_z\right)$ dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Q.8 On pose $\omega_c=\dfrac{eB}{m_e}$. Écrire les équations du mouvement de l'électron en coordonnées cartésiennes, sous forme de trois équations différentielles d'ordre 1 portant sur $v_x\left(t\right),v_y\left(t\right)$ et $v_z\left(t\right)$.
Indiquer la condition sur β pour que la trajectoire soit rectiligne.
Montrer que ω_c est homogène à une pulsation. Indiquer le nom donné à cette pulsation.

Q.9 Donner l'expression de $z\left(t\right)$, en supposant que l'électron entre dans la zone de champ magnétique au point O origine des coordonnées.

Pour résoudre les équations du mouvement selon les axes $\left(Ox\right)$ et $\left(Oy\right)$, on pose $Z=v_x+iv_y$.

Q.10 Établir l'équation différentielle régissant *Z*. Expliciter complètement $v_x(t)$ et $v_y(t)$ en utilisant ω_c.

Q.11 En déduire les expressions de $x(t)$ et $y(t)$, coordonnées de l'électron à un instant t pour un angle β quelconque.

Q.12 Dans le cas où $\beta = \pi/2$, donner l'équation cartésienne de la trajectoire de l'électron et la tracer sur un schéma, en faisant clairement apparaître les vecteurs $\overrightarrow{v_0}$, $\vec{B}$ et le sens de parcours de l'électron sur sa trajectoire. On exprimera en particulier le rayon de la trajectoire r_C de l'électron en fonction de m_e, e, B et v_0.

2.2 Lentille magnétique

Une lentille magnétique sert à assurer la focalisation du faisceau d'électrons primaires dans le microscope (figure 3). Le champ magnétique est créé par un bobinage de *N* spires circulaires, parcouru par un courant stationnaire d'intensité *I* (figure 3(a)). On modélise ce bobinage par une seule spire circulaire de rayon $a = (R_1 + R_2)/2$, parcourue par un courant d'intensité NI. La figure 3(b) représente l'allure des lignes de champ magnétique.

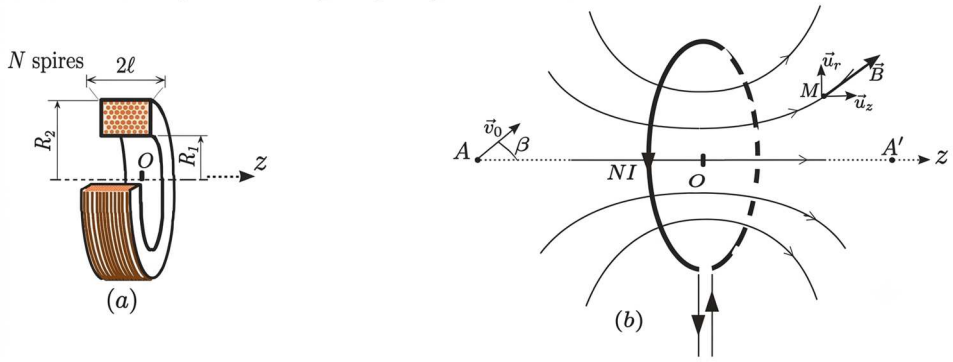


Figure 3 - (a) Bobinage des N spires - (b) Modélisation par une spire unique et allure des lignes de champ
La position de l'électron est repérée par le point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z), l'axe Oz étant l'axe de symétrie de la bobine centrée en O.

Les symétries du problème impliquent que le champ magnétique en un point *M* repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) s'écrit $\vec{B}(M) = B_r(r,z)\vec{u}_r + B_z(r,z)\vec{u}_z$; et qu'en un point P situé sur l'axe Oz, $\vec{B}(P)$ est de la forme $\vec{B}(P) = B_a(z)\vec{u}_z$.

Q.13 *(seulement pour les 5/2)* Justifier ces expressions.

Les électrons parviennent dans le champ magnétique de la bobine en formant un faisceau quasi-parallèle à l'axe Oz, de faible étendue radiale (diamètre du faisceau petit devant le rayon *a* de la bobine).

Q.14 Décrire, *sans calcul*, la trajectoire d'un électron de vitesse initiale $\vec{v}_0$ rigoureusement parallèle à Oz.

Un électron part du point *A* sur l'axe Oz, avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle β faible avec Oz et se dirige vers la bobine. On appelle A' le point d'intersection avec l'axe Oz de la trajectoire de l'électron à la sortie de la bobine.

Q.15 Indiquer à quoi correspondraient, en optique géométrique, les hypothèses de faible étendue radiale du faisceau et d'angle β faible.

On donne l'expression du champ magnétique créé par une spire circulaire de centre *O*, d'axe (*Oz*), de rayon *a*, parcourue par un courant d'intensité *NI*, en un point *P* d'abscisse *z*, situé sur l'axe *Oz* :

$$B_a(z) = \frac{B_0}{\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{3/2}} \text{ , où } B_0 = \frac{\mu_0 NI}{2a} \text{ et } z = \overline{OP}$$

Q.16 Tracer l'allure de la courbe $B_a(z)$ pour $z \in \mathbb{R}$.

Q.17 On prend $I = 4{,}0$ A, $a = 4{,}0$ cm et $N = 600$ spires. Calculer B_0 et le comparer au champ magnétique terrestre. Conclure.
On donne $\mu_0 \simeq 4\pi \cdot 10^{-7}$ H·m^{-1}.

Q.18 Montrer que le poids de l'électron est négligeable dans ces conditions. On prendra $v_0 = 6 \cdot 10^7$ m · s^{-1}.

Dans les questions suivantes, on cherche l'équation du mouvement d'un électron, sous la forme d'une relation entre ses coordonnées r et z, lorsqu'il traverse la zone de champ magnétique $B_a(z)$ créé par la bobine. Il part de A avec la vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle β non nul avec Oz et se dirige vers la bobine. On adopte les hypothèses suivantes :

— hypothèse (H1) : l'électron n'est pas relativiste ;
— hypothèse (H2) : l'angle β est faible ;
— hypothèse (H3) : la trajectoire de l'électron reste dans un domaine $r << a$;
— hypothèse (H4) : on néglige l'effet de la pesanteur et du champ magnétique terrestre.

On rappelle l'expression de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques sur la base locale orthonormée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$, et $\frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$.

Q.19 Donner, sans faire d'approximation, les trois équations différentielles obtenues en projetant le principe fondamental (P.F.D) appliqué à l'électron selon $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$.

Les lois de l'électromagnétisme permettent de montrer que $B_r \simeq -\frac{r}{2}\frac{dB_a}{dz}$ et $B_z \simeq B_a(z)$ en un point *M* proche de l'axe (à une distance *r* de l'axe considérée comme un infiniment petit du premier ordre).

Q.20 *(seulement pour les 5/2)* Justifier ces expressions. Pour la première on calculera le flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée judicieusement choisie.

Q.21 Montrer qu'avec les relations fournies pour B_r et B_z, la projection orthoradiale du P.F.D donne $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{e}{2m_e}\frac{d}{dt}(r^2 B_a)$. En déduire par intégration l'expression de $\dot{\theta}$.

Q.22 En reportant l'expression trouvée pour $\dot{\theta}$ ainsi que la relation approximée $B_z \simeq B_a(z)$ dans la projection radiale du P.F.D, montrer que l'on obtient $\ddot{r} = -\frac{r}{4}\left(\frac{eB_a(z)}{m_e}\right)^2$.

Q.23 Pourquoi peut-on déduire de la projection axiale du P.F.D que $\dot{z} = \frac{dz}{dt} \simeq Cte \simeq v_0$?

En déduire l'équation différentielle $\mathbf{\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{e^2}{4m_e^2 v_0^2} r B_a^2(z)}$ (*).

Le script Python ci-après permet de résoudre cette équation différentielle et de tracer l'allure de la trajectoire $r(z)$ entre les points A et A' pour plusieurs valeurs de β. Le tracé de ces trajectoires est donné figure 4.

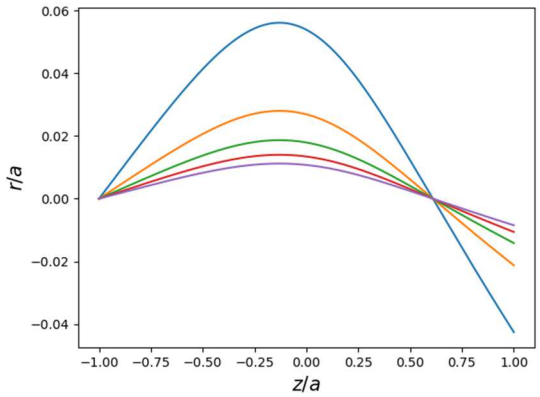


Figure 4 - Trajectoires de l'électron dans la zone de champ magnétique, pour différentes valeurs β allant de 1° à 5°

script Python

```
1      import numpy as np
2      import matplotlib.pyplot as plt
3      from scipy.integrate import odeint
4
5
6      " " "
7      DOCUMENTATION :
8      odeint(f,Y0,z) résout l'équation différentielle dY/dz=f(Y,z) où Y0 est la condition
       initiale et z un tableau contenant les valeurs de la variable z choisies pour la ré
       solution.
9      " " "
10
11     # valeurs des coefficients de l'équation différentielle en unités SI
12     e = 1.6e-19
13     me = 9.1e-31
14     v0 = 6e7
15     a = 4e-2
16     mu0 = 4*np.pi*1e-7
17     N = 600
18     I = 4
19     B0 = ........ # ligne à compléter
20
21     A = (B0*e/(2*me*v0))**2*a
22
23     # conditions initiales de la trajectoire
24     # angle maximal entre la vitesse initiale et l'axe Oz
25     beta = ....... # ligne à compléter
26
27     # valeur initiale de z (-z0) ici prise égale à -a
28     z0 = a
29
30     z = np.linspace(-z0,z0,1000)
31
32     # Résolution de l'équation différentielle en r(z), pour diverses valeurs de beta

33     def f(Y,z):
34        [r,rprime]=Y
35        return([rprime,.............]) # ligne à compléter
36
37     for i in range(5):
38        rprime0i = np.tan(beta/(i+1))
39        Y0i=[0,rprime0i]
40        Sol_i=odeint(f,Y0i,z)
41
42     # Tracé de la trajectoire en coordonnées réduites r/a en fonction z/a
43        plt.figure(0)
44        plt.plot(z/a,Sol_i[:,0]/a)
45     plt.ylabel(u'$r/a$', fontsize=15, rotation=90)
46     plt.xlabel(u'$z/a$', fontsize=15)
47     plt.show()
```

Q.24 Recopier et compléter les lignes 19 et 35 du script.

Q.25 Recopier et compléter également la ligne 25, pour que la plus grande valeur de β (correspondant au tracé de la courbe la plus haute sur la figure 5) soit de 5°.

Q.26 Vérifier que cette résolution numérique satisfait aux conditions des hypothèses (H2) et (H3). Commenter la simulation obtenue.

Pour simplifier, dans les questions suivantes, on suppose que la largeur de la zone d'influence du bobinage est de l'ordre de l'épaisseur de celui-ci : les électrons ne subissent le champ magnétique que lorsque $z \in [-\ell ; \ell]$ (figure 5).

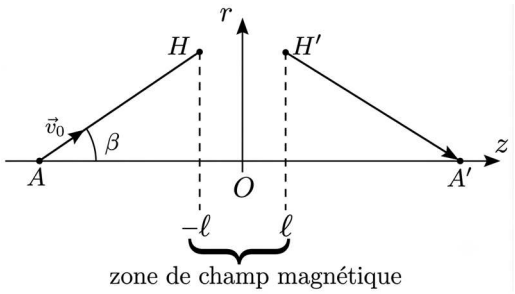


Figure 5 - Modélisation de la zone d'espace contenant la trajectoire de l'électron

Compte-tenu des résultats précédents et de l'allure des trajectoires observées, le dispositif magnétique décrit ici joue, vis-à-vis des électrons, le même rôle qu'une lentille mince (d'épaisseur 2ℓ) vis-à-vis de rayons lumineux, dans l'approximation de Gauss (figure 6). On note r_0 la valeur de r aux points H et H'.

Par des considérations géométriques, on montre que $\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_{z=-\ell} \simeq -\dfrac{r_0}{\overline{OA}}$ et $\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_{z=\ell} \simeq -\dfrac{r_0}{\overline{OA'}}$

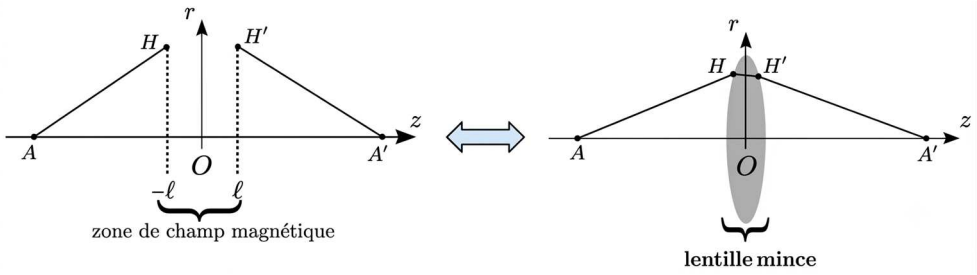


Figure 6 - Analogie entre la lentille magnétique et une lentille mince optique

Q.27 Représenter la situation sur un schéma en faisant apparaitre la trajectoire de l'électron dans cette modélisation, depuis le point A jusqu'au point A', en faisant clairement apparaitre la zone $z \in [-\ell ; \ell]$. Déduire de l'équation **(*)** que $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$ sont reliées par une relation analogue à la relation de conjugaison d'une lentille mince dont on exprimera la distance focale image f' en fonction de e, m_e, v_0 et de l'intégrale $\Gamma = \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} B_{\mathrm{a}}^2(z)\,\mathrm{d}z$. On ne demande pas de calculer Γ.

On désire focaliser davantage le faisceau, c'est-à-dire rapprocher l'image A' de l'objet A.

Q.28 Pour une tension accélératrice U donnée, indiquer sur quel(s) paramètre(s) on peut agir pour que A' se rapproche de A.

Une valeur approchée de Γ permet d'obtenir l'expression suivante de $f' = \dfrac{32}{3\pi a}\left(\dfrac{m_e v_0}{eB_0}\right)^2$.

Q.29 Calculer la valeur de f' et commenter. On prendra $a = 4{,}0$ cm, $B_0 = 40$ mT et $v_0 = 6{,}0 \times 10^7$ m · s^{-1}.