DS1 (Révisions de mécanique, corrigé)

AGRÉGATION DE PHYSIQUE Option Chimie, composition de Physique // 2026 : Voir de plus en plus petit, « voir » les atomes

Q.1 La relation de de Broglie est $\boxed{\lambda_{dB} = h / p}$ (0,5 pt)
La mécanique classique est applicable si $\lambda_{dB} << a$. (0,5 pt)

Q.2 La force de de Lorentz est $\boxed{\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)}$ (0,5 pt)

Q.3 La force électrostatique a pour expression $\vec{F}_{L,e} = q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(qV\right)$.
Comme l'énergie potentielle dont dérive la force vérifie $\vec{F}_{L,e} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(E_{pe}\right)$, on en déduit immédiatement, à une constante additive près : $\boxed{E_{pe} = qV}$ (0,5 pt)
Le champ électrostatique est dirigé des hauts potentiels vers les bas potentiels. Avec $q = -e$, la force électrostatique est dirigée en sens opposé.
C'est donc un potentiel $V_a > 0$ qui assure que l'électron subit une force dirigée vers l'anode. (0,5 pt)

Q.4 L'électron est soumis à la seule force électrostatique qui est une force conservative. L'énergie mécanique de l'électron dans $\mathscr{R}$ se conserve entre les deux électrodes, on obtient $\frac{1}{2}mv_i^2 - eV_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - eV_f$ avec $v_i \simeq 0$, $V_i = 0$ et $V_f = V_a$, et on en déduit :

$$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{2eV_a}{m}}} \text{ (1 pt)}$$

Q.5 A.N :
— pour $V_a = 10$ kV : $\boxed{v_f = 5{,}9 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$ (0,5 pt)
— pour $V_a = 10^3$ kV : $\boxed{v_f = 5{,}9 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$ (0,5 pt)
Dans le second cas, la vitesse obtenue est supérieure à la célérité de la lumière dans le vide et on devrait se placer dans le cadre relativiste. Dans le premier cas, $v_f \simeq 0{,}20\, c$: on est à la limite de l'approximation classique. (0,5 pt)

Q.6 Á nos latitudes, le champ magnétique terrestre a une intensité de l'ordre de $\boxed{50\ \mu\text{T}}$. **Les mouvements au sein du noyau liquide de la Terre** sont responsables de ce champ magnétique. (0,5 pt) + (0,5 pt)

Q.7 L'électron est soumis à la seule force magnétique dont la puissance est nulle : $\boxed{p_m = \underbrace{\left(-e\vec{v} \wedge \vec{B}\right)}_{\perp \vec{v}} \cdot \vec{v} \Rightarrow p_m = 0}$ (1 pt)
Le théorème de la puissance cinétique appliqué dans $\mathscr{R}$ à l'électron assure alors que l'énergie cinétique de l'électron se conserve, il en est donc de même de la norme de la vitesse. (1 pt)

Q.8 On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans $\mathscr{R}$: (0,5 pt)

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = -e\left[v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z\right] \wedge B\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -\omega_c v_y \ (1) \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \omega_c v_x \ (2) \quad \text{avec } \omega_c = \dfrac{eB}{m_e} \\ \dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}} \text{ (1,5 pt)}$$

Pour $\beta = 0$, la force magnétique est nulle et le mouvement est **rectiligne uniforme selon Oz**. (0,5 pt)
En exploitant les expressions obtenues à la question précédente : $\left[\frac{dv_x}{dt}\right] = \left[\frac{v_x}{T}\right] = \left[\omega_c\right]\left[v_y\right] \Rightarrow \boxed{\left[\omega_c\right] = \frac{1}{T}}$ (0,5 pt)
On reconnaît la pulsation **cyclotron**. (0,5 pt)

Q.9 $v_z(t) = \text{cste} \Rightarrow v_z(t) = v_0\cos(\beta) \Rightarrow$ $\boxed{z(t) = v_0\cos(\beta)t}$ (1 pt)

Q.10 En effectuant (1) $+i(2)$, il vient $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x + iv_y) = -\omega_c v_y + i\omega_c v_x = i\omega_c(v_x + iv_y) \Rightarrow$ $\boxed{\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = i\omega_c Z}$ (1 pt)

L'équation admet pour solution $\boxed{Z(t) = Z_0 e^{i\omega_c t}}$ avec pour conditions initiales $\boxed{v_x(0) + iv_y(0) = iv_0\sin(\beta) = Z_0}$ (0,5 pt), ce qui donne $v_x(t) + iv_y(t) = iv_0\sin(\beta)\left[\cos(\omega_c t) + i\sin(\omega_c t)\right]$ (0,5 pt) et par identification :

$$\boxed{v_x(t) = -v_0\sin(\beta)\sin(\omega_c t) \text{ et } v_y(t) = v_0\sin(\beta)\cos(\omega_c t)} \text{ (1 pt)}$$

Q.11 On intègre les relations précédentes : $x(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\beta)\cos(\omega_c t) + Cte$ et $y(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\beta)\sin(\omega_c t) + Cte$

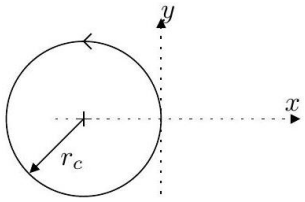
Avec $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, on en déduit $\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\beta)\left[\cos(\omega_c t) - 1\right] \text{ et } y(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\beta)\sin(\omega_c t)}$ (1 pt)

Q.12 Pour $\beta = \pi/2$, $\boxed{z(t) = 0}$ (0,5 pt), on a un mouvement d'équations horaires :

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\left[\cos(\omega_c t) - 1\right] \text{ et } y(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)} \text{ (0,5 pt)}$$

De ces relations, on déduit l'équation de la trajectoire : $\boxed{\left(x + \frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 + y^2 = \frac{v_0^2}{\omega_c^2}}$ (0,5 pt). On reconnaît

l'équation d'un cercle de rayon $\boxed{r_c = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{m_e v_0}{eB}}$ (0,5 pt) et de centre $\boxed{\left(x_c = -\frac{v_0}{\omega_c}, y_c = 0\right)}$ (0,5 pt)



Compte tenu de $v_y(0) = v_0 > 0$ et de l'équation (1), il vient $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(0) < 0$, ce qui donne une rotation dans le sens **trigonométrique** (0,5 pt)

schéma (0,5 pt)

Q.13 La distribution de courants est invariante par rotation d'angle θ (symétrie de révolution), **la norme du champ magnétique est indépendante de θ**. (0,5 pt)

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants, c'est donc un **plan de symétrie du champ magnétique qui est donc contenu dans ce plan** : $\vec{B}(M) = B_r(r,z)\vec{u}_r + B_z(r,z)\vec{u}_z$. (0,5 pt)

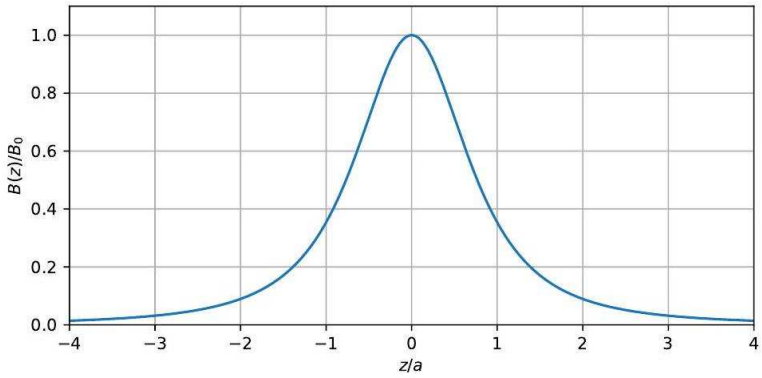
Soit P un point de l'axe (Oz). **Tous les plans méridiens sont des plans d'antisymétrie de la distribution de courants**, le champ magnétique en un point de l'axe est contenu dans l'intersection de tous ces plans et donc selon l'axe (Oz), en conséquence

$$\vec{B}(P) = B_a(z)\vec{u}_z \text{ (0,5 pt)}$$

Q.14 Le long de l'axe, le vecteur vitesse et le champ magnétique étant colinéaires, la force magnétique est nulle et le mouvement est inertiel. L'électron lancé le long de l'axe se déplace en ligne droite à vitesse constante (mouvement rectiligne unfiforme). (1 pt)

Q.15 Ces hypothèses correspondent à se placer dans **l'approximation de Gauss**. (0,5 pt)

Q.16 On considère $f : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ définie sur l'ensemble de l'axe réel avec $x = z/a$. Elle est **paire**, **décroissante** sur $[O, +\infty[$ (se comporte comme $1/x^3$ pour $x >> 1$) (0,5 pt). D'où le tracé (1 pt)



Q.17 $\boxed{B_0 = \dfrac{4\pi\times10^{-7}\times600\times4,0}{2\times4\times10^{-2}} \Rightarrow B_0 \simeq 38\ \text{mT}}$ (1 pt)

Cette valeur est en ordre de grandeur **1000 fois supérieure** à la valeur du champ magnétique terrestre qui peut donc être négligé pour le reste de l'expérience. (0,5 pt)

Q.18 En ordre de grandeur :

- force magnétique : $f_\text{m} \simeq ev_0B_0 \Rightarrow f_\text{m} \simeq 3,6\cdot10^{-13}$ N ;
- poids : $P = m_e g \Rightarrow P = 8,9\cdot10^{-30}$ N .

$\boxed{P\ /\ f_\text{m} \simeq 2,5\times10^{-17} << 1}$ **Le poids est négligeable** (1 pt)

Q.19 La force de Lorentz s'écrit $m_e\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_\text{m} = -e(\vec{v}\wedge\vec{B}) = -e(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z)\wedge(B_r\vec{u}_r + B_z\vec{u}_z)$. Le P.F.D appliqué à l'électron dans $\mathscr{R}$ fournit alors $m_e\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z\right] = -e\left[r\dot{\theta}B_z\vec{u}_r + (\dot{z}B_r - \dot{r}B_z)\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}B_r\vec{u}_z\right]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{e}{m_e}r\dot{\theta}B_z \quad (1) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{e}{m_e}(\dot{r}B_z - \dot{z}B_r) \quad (2) \\ \ddot{z} = \dfrac{e}{m_e}r\dot{\theta}B_r \quad (3) \end{cases}$$ (1,5 pt)

Q.20 $B_z(r,z) \simeq \underbrace{B_z(0,z)}_{B_a(z)} + r\dfrac{\partial B_z}{\partial r}(0,z) \simeq B_\text{a}(z)$ à l'ordre le plus bas. (0,5 pt)

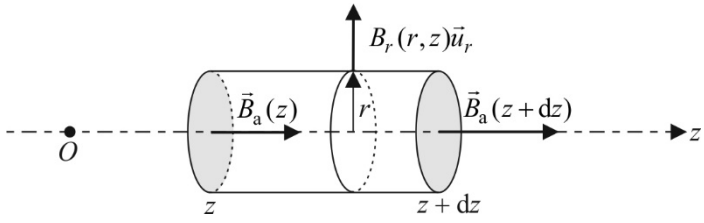
Le flux de $\vec{B}$ est nul à travers une surface fermée. On choisit le cylindre centré sur Oz, de rayon r infiniment petit et de longueur $\mathrm{d}z$: $\left[B_\text{a}(z+\mathrm{d}z) - B_\text{a}(z)\right]\pi r^2 + B_r(r,z)2\pi r = 0$

$\Rightarrow \boxed{B_r(r,z) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B_\text{a}}{\mathrm{d}z}}$ (1,5 pt)

Q.21 Avec $B_r \simeq -\dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B_\text{a}}{\mathrm{d}z}$ et $B_z \simeq B_a(z)$, et en remarquant que $\dot{z}\dfrac{\mathrm{d}B_a}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{d}B_a}{\mathrm{d}t}$ (1 pt), (2) donne :

$\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{e}{m_e}(\dot{r}B_z - \dot{z}B_r) \simeq \dfrac{e}{m_e}\left(\dot{r}B_z + \dot{z}\dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B_\text{a}}{\mathrm{d}z}\right)$, soit

$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = \dfrac{e}{m_e}\left(r\dot{r}B_\text{a} + \dfrac{r^2}{2}\dfrac{\mathrm{d}B_\text{a}}{\mathrm{d}t}\right) = \dfrac{e}{2m_e}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2B_\text{a})}$ (1 pt)



En intégrant par rapport au temps (avec pour condition initiale avant la lentille : $B_\text{a} = 0$ et $\dot{\theta} = 0$), on obtient :

$r^2\dot{\theta} = \frac{e}{2m_e} r^2 B_a + \underbrace{Cte}_{0} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{e}{2m_e} B_a(z)}$ (1 pt)

Q.22 (1) donne $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \simeq -\frac{e}{m_e} r\dot{\theta} B_a(z)$, soit $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \simeq -\frac{e}{m_e} r\dot{\theta} B_a(z)$, avec $\dot{\theta} = \frac{e}{2m_e} B_a(z)$:

$\ddot{r} - r\left(\frac{eB_a}{2m_e}\right)^2 = -\frac{r}{2}\left(\frac{eB_a}{m_e}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{r} = -\frac{r}{4}\left(\frac{eB_a(z)}{m_e}\right)^2}$ (1 pt)

Q.23 (3) $\ddot{z} = \frac{e}{m_e} r\dot{\theta} B_r$ montre que $\ddot{z}$ est un infiniment petit du second ordre : $\ddot{z} \simeq 0$ (0,5 pt)

Par hypothèse des angles faibles (**H2**), la vitesse axiale est quasi constante et égale à la vitesse initiale : $\boxed{\dot{z} = \frac{dz}{dt} \simeq Cte \simeq v_0}$ (1 pt)

On en déduit les dérivées par rapport à z : $\frac{dr}{dt} = v_0 \frac{dr}{dz}$ et $\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = v_0^2 \frac{d^2r}{dz^2}$

En substituant $\ddot{r}$ dans l'équation radiale : $v_0^2 \frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{e^2}{4m_e^2} r B_a^2(z)$

Ce qui donne l'équation différentielle cherchée : $\boxed{\frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{e^2}{4m_e^2 v_0^2} r B_a^2(z)}$ (1 pt)

Q.24

`ligne 19 : B0 = mu0*N*I/(2*a)` (1 pt)

On a $\frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{A}{a} r\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{-3}$, donc :

`ligne 35 : return([rprime, -A*(r/a)*1/(1+z**2/a**2)**3])` (1 pt)

Q.25

Il faut passer de degrés à radians :

`ligne 25 : beta = 5*np.pi/180` (1 pt)

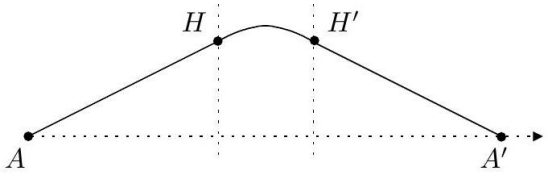
Q.26 $\beta_{max} = 5 \times \pi / 180 \Rightarrow \boxed{\beta_{max} = 8{,}7 \times 10^{-2}\,\text{rad} << 1\text{rad}}$ (0,5 pt)

La condition (H2) est bien vérifiée pour l'angle initial. Par ailleurs $\frac{dr}{dz} = \tan(\beta)$, comme $\frac{d^2r}{dz^2} < 0$ l'angle β va diminuer jusqu'à s'annuler comme on le voit sur la simulation. **La condition (H2) est bien vérifiée.** (0,5 pt)

On note par ailleurs que $\boxed{r/a < 0{,}06}$. La condition (H3) est vérifiée. (0,5 pt)

La simulation montre que le système focalise bien le faisceau d'électrons : bien que dispersés angulairement en A, leurs trajectoires se recoupent en A' sur l'axe de la lentille. (1 pt)

Q.27 On relie les portions de droite pour $|z| > \ell$ par l'allure de la courbe présentée sur la résolution numérique.



(0,5 pt)

On intègre alors la relation $\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} = -\dfrac{e^2}{4m_e^2 v_0^2} r B_{\mathrm{a}}^2(z)$ (*) entre $z = -\ell$ et $z = +\ell$:

$$\int_{z=-\ell}^{z=\ell} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}z = -\frac{e^2}{4m_e^2 v_0^2}\int_{z=-\ell}^{z=\ell} r B_a^2(z)\,\mathrm{d}z \quad (0{,}5\text{ pt})$$

Le membre de gauche s'intègre immédiatement, dans le membre de droite on assimile r à r_0, il vient :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_{z=\ell} - \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_{z=-\ell} \simeq -\frac{e^2}{4m_e^2 v_0^2} r_0 \int_{z=-\ell}^{z=\ell} B_a^2(z)\,\mathrm{d}z} \quad (0{,}5\text{ pt})$$

En exploitant les expressions des dérivées en $z = \pm\ell$ fournies dans l'énoncé, on obtient :

$$\boxed{-\frac{r_0}{\overline{OA'}} + \frac{r_0}{\overline{OA}} = -\frac{e^2}{4m_e^2 v_0^2} r_0 \cdot \Gamma \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{e^2}{4m_e^2 v_0^2}\Gamma} \quad (0{,}5\text{ pt})$$

Ce qui correspond bien à une relation de conjugaison d'une lentille mince de distance focale $\boxed{f' = \dfrac{4m_e^2 v_0^2}{e^2 \Gamma}}$ (0,5 pt)

Q.28 L'objectif est d'obtenir une focale plus courte, pour cela on peut proposer :
— de diminuer la vitesse (0,5 pt)
— d'augmenter l'intensité du champ magnétique (0,5 pt)

Q.29 $f' = \dfrac{32}{3\times\pi\times 4{,}0\times10^{-2}} \times \left(\dfrac{9{,}1\times10^{-31}\times6\times10^{7}}{1{,}6\times10^{-19}\times40\times10^{-3}}\right)^2$

$\boxed{\Rightarrow f' \simeq 6{,}2\text{ mm}}$ (0,5 pt), ce qui est une très courte distance focale (difficile à obtenir dans le domaine optique sans aberrations) :

le système est **très convergent**. (0,5 pt)