DL3 (Électronique, corrigé)

1. CCINP // PSI // 2021 : Séisme

A - Étude du sismographe

Q1. On se place dans le référentiel galiléen auquel est attaché le repère *OXYZ*. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse, projeté suivant *Oz* :

$m\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(z+z_s)=-mg-\lambda\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+k(h-z-\ell_0)$, soit $m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+\lambda\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+k(z+\ell_0-h)=-m\left(g+\dfrac{\mathrm{d}^2z_s}{\mathrm{d}t^2}\right)$

En l'absence de mouvement du sol, à l'équilibre, $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=0$ et $\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2=0$, d'où $\boxed{k(z_{éq}+\ell_0-h)=-mg}$

On pose u tel que $z=z_{éq}+u$. Alors $m\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+k(z_{éq}+\ell_0-h+u)=m\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+ku-mg=-m\left(g+\dfrac{\mathrm{d}^2z_s}{\mathrm{d}t^2}\right)$, soit finalement $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\lambda}{m}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{k}{m}u=-\dfrac{\mathrm{d}^2z_s}{\mathrm{d}t^2}}$

Q2. On passe en notation complexe : $-\omega^2m\underline{u}+j\omega\lambda\underline{u}+k\underline{u}=\omega^2m\underline{z_s}$ soit $H=\dfrac{\underline{u}}{\underline{z_s}}=\dfrac{\omega^2m}{-\omega^2m+j\omega\lambda+k}$

On factorise par k pour obtenir la forme présentée dans l'énoncé : $\boxed{H=\dfrac{\frac{m}{k}\omega^2}{1+j\omega\frac{\lambda}{k}-\frac{m}{k}\omega^2}}$: passe-haut du deuxième ordre.

Q3. Comme $U=|H|Z_0$, il vient $\boxed{U=\dfrac{\frac{m\omega^2}{k}\cdot Z_0}{\sqrt{\left(1-\frac{m\omega^2}{k}\right)^2+\left(\frac{\lambda\omega}{k}\right)^2}}}$

Q4. L'amplitude des déplacements de la masse reproduira celle du sol en hautes fréquences : $1<<\dfrac{m\omega^2}{k}$ et $\dfrac{\lambda\omega}{k}<<\dfrac{m\omega^2}{k}$, donc si $\boxed{\omega>>\sqrt{\dfrac{k}{m}}\ \text{ et }\ \omega>>\dfrac{\lambda}{m}}$.

La deuxième relation traduit un amortissement faible, donc une suspension souple. En outre, les conditions précédentes étant remplies, on a $H\sim-1$, donc les signaux sont en opposition de phase.

Q5. D'après les courbes d'amplitude données dans l'énoncé, il n'y a pas résonance lorsque $\boxed{\sigma\gtrsim0{,}6}$. L'étude théorique du gain montre qu'il n'y a pas résonance si $Q=\dfrac{1}{2\sigma}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\boxed{\sigma\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Par identification avec la relation de Q2 : $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\dfrac{2\sigma}{\omega_0}=\dfrac{\lambda}{k}$, soit $\sigma=\dfrac{\lambda}{2}\dfrac{1}{\sqrt{m\cdot k}}$

On évitera donc la résonance lorsque $\dfrac{\lambda}{2}\dfrac{1}{\sqrt{m\cdot k}}\gtrsim0{,}6\Leftrightarrow\boxed{\dfrac{\lambda}{\sqrt{m\cdot k}}\gtrsim1{,}2}$

B - Spectre d'un signal numérique

Expérience 1

Q6. On lit $3\cdot T=8\text{ div}=8\times250\ \mu\text{s}=2\text{ ms}$, donc $\boxed{T=\dfrac{2}{3}=0{,}67\text{ ms}\ \text{ et }\ f=1{,}5\text{ kHz}}$

Il y a $N=2480\simeq2500$ échantillons sur $T_a=10\text{ div}=2500\ \mu\text{s}$, donc $\boxed{T_{éch}=T_a/N\simeq1\ \mu\text{s}\ \text{ et }\ f_{éch}\simeq1\text{ MHz}}$

L'acquisition doit satisfaire au critère de Shannon, à savoir $f_{éch} > 2f_{max}$. Un analyseur de spectre n'affiche donc que la fenêtre qui remplit a priori ce critère, soit $\boxed{f_{max} = f_{éch}/2 = f_N = 500 \text{ kHz (fréquence de Nyquist)}}$
Les valeurs numériques lues ($f_N = 496$ kHz) sont en accord avec cette égalité.

Q7. L'écart entre deux raies calculées est $\Delta f = 1/T_a$. Il faut donc augmenter T_a, donc $T_{éch}$, et diminuer $f_{éch}$, en augmentant la base de temps pour « zoomer » sur le spectre.
Ici, on a multiplié la base de temps par 100, ce qui va dans le bon sens. La nouvelle valeur de f_{max} est quant à elle divisée par 100, ce qui est cohérent avec la valeur obtenue : $\boxed{T_a \to 100T_a \Rightarrow f_{éch} \to f_{éch}/100}$

Q8. On a désormais $\boxed{f_{max} = f_{éch}/2 = 1,24 \text{ kHz} \simeq 1,25 \text{ kHz}}$, soit $f_{éch} \simeq 2,5\text{kHz}$ tandis que la fréquence du signal est de 1,5 kHz. Le critère de Shannon n'est pas vérifié : il y a repliement de spectre.
On observe la raie symétrique de *f* par rapport $f_{éch}/2$, donc de fréquence $\boxed{f_{éch} - f \simeq 1\text{kHz}}$.

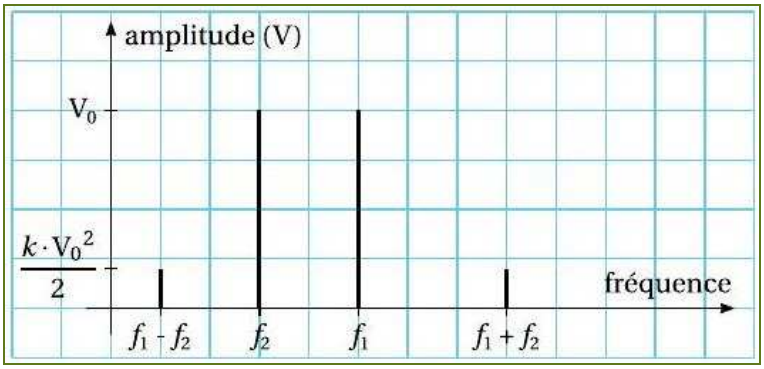
Expérience 2

Q9. On applique la loi des nœuds en termes de potentiels au niveau de l'entrée inverseuse (avec $i_- = 0$) :
$V^- = \dfrac{\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_2}{R_2}+\frac{V_3}{R_3}+\frac{V_s}{R_0}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_0}}$, et puisque l'A.L.I est idéal, en régime linéaire, on a $V_+ = V_- = 0$, avec ici $V_- = 0$, donc $\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_2}{R_2}+\frac{V_3}{R_3} = -\frac{V_s}{R_0}$, soit $\boxed{V_S = -R_0 \cdot \left(\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_2}{R_2}+\frac{V_3}{R_3}\right)}$. Il s'agit d'un sommateur ou additionneur (inverseur), avec des pondérations sur les différentes tensions.

Q10. Pour $R_1 = R_2 = R_3 = R_0$, on a simplement $\boxed{V_S = -(V_1 + V_2 + V_m) = -(V_1 + V_2 + kV_1V_2)}$, soit :

$$V_S(t) = -V_0\cos(2\pi f_1 t) - V_0\cos(2\pi f_2 t) - kV_0^2\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t)$$
$$= -V_0\cos(2\pi f_1 t) - V_0\cos(2\pi f_2 t) - \frac{kV_0^2}{2}\cos(2\pi(f_1 - f_2)t) - \frac{kV_0^2}{2}\cos(2\pi(f_1 + f_2)t)$$

On suppose que $f_1 > f_2$. On obtient le spectre ci-dessous :



Q11. En modifiant les résistances, on a maintenant $\boxed{V_s = -(V_1 + V_2 + 2kV_1V_2)}$, donc l'amplitude des pics à $f_1 - f_2$ et $f_1 + f_2$ est multipliée par deux, les autres sont inchangées.

Q12. Si on suppose qu'il n'y a pas de repliement, alors $f_1 + f_2$ est donné par le dernier pic, et $f_1 - f_2$ par le premier (car il a la même amplitude : on cherche les raies symétriques par rapport à une troisième raie).
Le deuxième curseur donne $\boxed{f_1 = 900 \text{ Hz}}$ et le premier donne $f_1 - f_2 = 300$ Hz, soit $\boxed{f_2 = 600 \text{ Hz}}$.

2. D'après CENTRALE : Dérivateur réel

A Montage dérivateur idéal

1) Le montage est uniquement bouclé sur – donc il est stable. L'A.L.I. étant idéal et en fonctionnement linéaire, on a $\varepsilon = V^+ - V^- = 0$ donc $V^- = 0$.

Le courant entrant dans la borne inverseuse est nul ($i^- = 0$), donc, en appliquant la loi des nœuds en termes de potentiel à l'entrée – :

$$\underline{V^-} = \frac{jC\omega\underline{V_e} + \underline{V_s}/R}{jC\omega + 1/R} = 0 \Rightarrow \underline{V_s} = -jRC\omega\underline{V_e} \quad \boxed{\leftrightarrow V_s(t) = -RC\frac{\mathrm{d}V_e(t)}{\mathrm{d}t}}$$

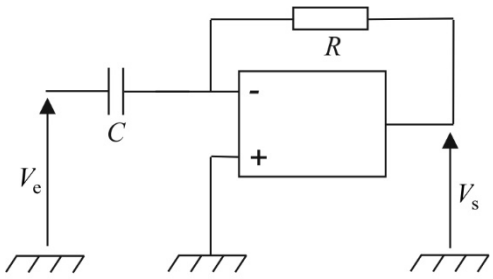


figure (1)

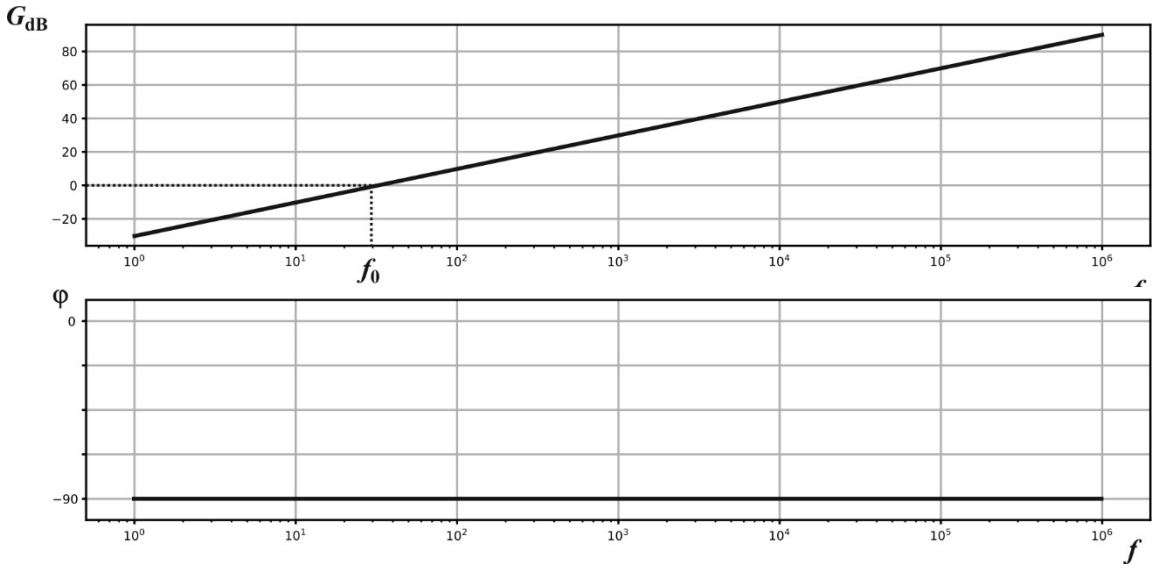
La fonction de transfert est $\boxed{H(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = -jRC\omega}$

Diagramme de Bode du gain : $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = RC\omega = 2\pi fRC$ et $G_{\mathrm{dB}}(f) = 20\log(2\pi fRC) = 20\log(2\pi RC) + 20\log(f)$

A.N : $\tau = RC = 5\cdot10^3 \times 10^{-6} = 5$ ms et $\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\times5\times10^{-3}} \simeq 31{,}8 \text{ Hz}}$, on a $G_{\mathrm{dB}}(f_0) = 0$ dB.

Le diagramme est une droite de pente +20 dB/décade passant par 0 dB pour $f_0 \simeq 31{,}8$ Hz.

Diagramme de Bode de la phase : la phase est constante $\varphi = -\pi/2$ (ou -90°).

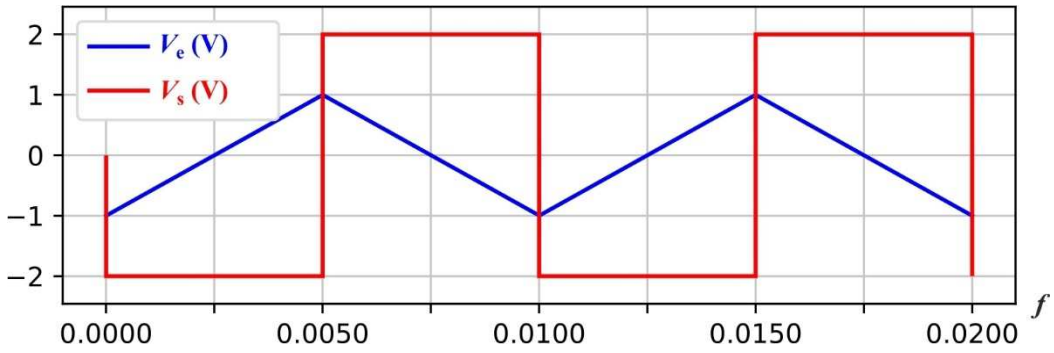


2) Un signal triangulaire symétrique $V_e(t)$ de fréquence $f^* = 100$ Hz a une période $T = 10$ ms.

De $t = 0$ à $t = T/2 = 5$ ms, $\frac{\mathrm{d}V_e}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{5\cdot10^{-3}} = +400 \text{ V}\cdot\text{s}^{-1} \Rightarrow V_s = -RC\frac{\mathrm{d}V_e}{\mathrm{d}t} = -(5\times10^{-3})\times400 = -2$ V

De $t = 5$ ms à $t = 10$ ms, $\frac{\mathrm{d}V_e}{\mathrm{d}t} = -400 \text{ V}\cdot\text{s}^{-1} \Rightarrow V_s = -RC\frac{\mathrm{d}V_e}{\mathrm{d}t} = -(5\times10^{-3})\times(-400) = -) + 2$ V

$\boxed{V_s(t) \text{ est donc un signal créneau (rectangulaire) d'amplitude } 2 \text{ V, alternant entre } -2 \text{ V et } +2 \text{ V}}$, en opposition de phase avec la pente de V_e.



B Montage dérivateur réel

3) On observe bien un niveau moyen correspondant à un créneau (de valeur moyenne autour de -2 V puis $+2$ V, mais ce signal est fortement parasité par des **oscillations sinusoïdales amorties** à chaque changement de pente.
La réponse à un échelon discontinuité présente des oscillations pseudo-périodiques. Un système du premier ordre ne peut pas osciller en réponse à un échelon. Le système est donc au minimum du $2^{\text{ème}}$ ordre.

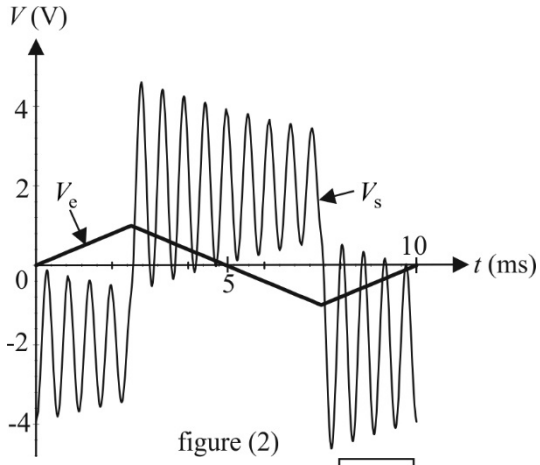


figure (2)

4) $\underline{V_s} = \mu(\omega)\underline{\varepsilon} = \dfrac{\mu_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}(\underline{V^+}-\underline{V^-}) = -\dfrac{\mu_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}\underline{V^-}$

En appliquant le théorème de Millman à l'entrée inverseuse :

$$\underline{V^-} = \frac{\dfrac{\underline{V_e}}{r+\dfrac{1}{jC\omega}}+\dfrac{\underline{V_s}}{R}}{\dfrac{1}{r+\dfrac{1}{jC\omega}}+\dfrac{1}{R}} = \frac{jRC\omega\underline{V_e}+(1+jrC\omega)\underline{V_s}}{1+j(R+r)C\omega}$$

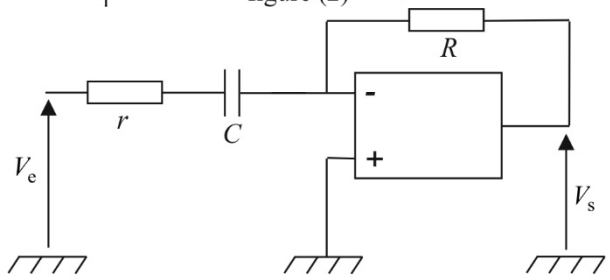


figure (3)

$$\Rightarrow \underline{V_s} = \mu(\omega)\underline{\varepsilon} = -\frac{\mu_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}\underline{V^-} = -\frac{\mu_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}\frac{jRC\omega\underline{V_e}+(1+jrC\omega)\underline{V_s}}{1+j(R+r)C\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{V_s}\left[\frac{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\mu_0}\left[1+j(R+r)C\omega\right]+1+jrC\omega\right] = -jRC\omega\underline{V_e}$$

$$\Rightarrow H'(j\omega) = -\frac{jRC\omega}{\dfrac{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}+j(R+r)C\omega-(R+r)C\dfrac{\omega^2}{\omega_0}}{\mu_0}+1+jrC\omega} = -\frac{jRC\omega}{\dfrac{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}+j(R+r)C\omega-(R+r)C\dfrac{\omega^2}{\omega_0}}{\mu_0}+1+jrC\omega} \text{ car } \mu_0 >> 1$$

$$\Rightarrow H'(j\omega) = \frac{-jRC\omega}{1+j\omega\left[\left(r+\dfrac{R}{\mu_0}\right)C+\dfrac{1}{\mu_0\omega_0}\right]-\dfrac{(R+r)C}{\mu_0\omega_0}\omega^2} = \frac{-jRC\omega}{1+j\omega\left[r'C+\dfrac{1}{\mu_0\omega_0}\right]-r''C\left(\dfrac{\omega^2}{\omega_0}\right)}$$

On identifie $r' = r+\dfrac{R}{\mu_0}$ et $r'' = \dfrac{R+r}{\mu_0}$

5) En remplaçant $j\omega \to \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ et $(j\omega)^2 \to \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$, on obtient bien l'équation différentielle $\dfrac{1}{\omega_0'^2}\dfrac{\mathrm{d}^2V_s}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{1}{Q\omega_0'}\dfrac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}t}+V_s = -RC\dfrac{\mathrm{d}V_e}{\mathrm{d}t}$:

$$\frac{r''C}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}^2V_s}{\mathrm{d}t^2}+\left[r'C+\frac{1}{\mu_0\omega_0}\right]\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}t}+V_s = -RC\frac{\mathrm{d}V_e}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0' = \sqrt{\dfrac{\omega_0}{r''C}} \\ Q\omega_0' = \dfrac{1}{r'C+\dfrac{1}{\mu_0\omega_0}} \Rightarrow Q = \dfrac{\sqrt{\dfrac{r''C}{\omega_0}}}{r'C+\dfrac{1}{\mu_0\omega_0}} \end{cases}$$

Le montage est stable car Q et ω_0' sont positifs (il est bouclé uniquement sur $-$).

6) A.N : $\omega_0' = \sqrt{\dfrac{\mu_0\omega_0}{RC}} = \sqrt{\dfrac{10^4\times(20\pi)}{5\cdot10^{-3}}} = \sqrt{4\pi\times10^7} \simeq 11200 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, soit une fréquence de résonance :

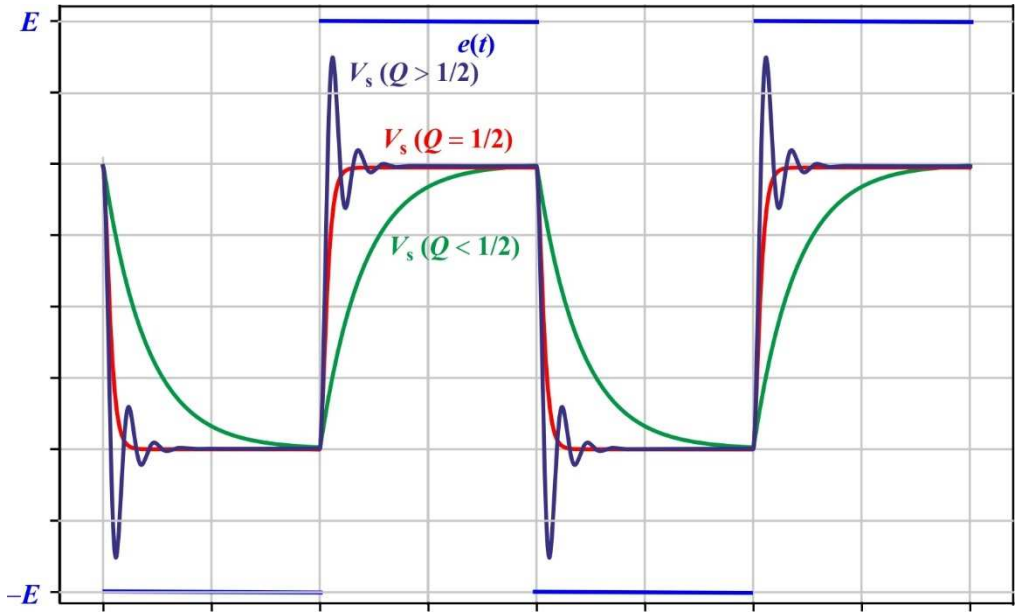
$f_0' = \dfrac{\omega_0'}{2\pi} \simeq 1780 \text{ Hz}$. $r' = r'' = \dfrac{R}{\mu_0} = \dfrac{5000}{10^4} = 0{,}50\ \Omega$;

$Q \simeq 42{,}7$, valeur très grande !

On a :

— pour $Q < 1/2$, un régime apériodique (amortissement fort, pas d'oscillations, réponse lente)
— pour $Q = 1/2$, un régime critique (réponse la plus rapide sans dépassement)
— pour $Q > 1/2$, un régime pseudo-périodique (dépassement et oscillations sinusoïdales amorties)

On a représenté ci-dessous une suite de réponses indicielles, c'est-à-dire la réponse à des créneaux de période très grande devant le temps de réponse du système.



Interprétation de la figure (2) : comme $Q = 42{,}7 >> 1$, à chaque changement de pente du signal triangulaire (discontinuité de $\dfrac{\mathrm{d}V_e}{\mathrm{d}t}$ qui équivaut à un échelon en entrée du système second ordre), **le système répond par des oscillations pseudo-périodiques peu amorties**.

On observe environ 17 de ces oscillations sur une période de 10 ms : $f = \dfrac{17}{10^{-2}} \simeq 1700 \text{ Hz}$.

La valeur théorique de la fréquence de ces oscillations est $f_0'\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}} \simeq f_0' = 1790 \text{ Hz}$: le signal obtenu s'interprète bien à l'aide réponse temporelle théorique (on peut remarquer que l'on n'a pas exactement une succession de réponse indicielles car la période des signaux n'est pas assez grande devant le temps de décroissance des oscillations, d'où l'écart de fréquences).

7) Pour avoir une dérivation fidèle sans oscillations ni dépassements tout en restant le plus rapide possible, on vise le **régime critique** $Q = 1/2 \Leftrightarrow r'C + \dfrac{1}{\mu_0\omega_0} = 2\sqrt{\dfrac{r''C}{\omega_0}} \Leftrightarrow \left[\left(r + \dfrac{R}{\mu_0}\right)C + \dfrac{1}{\mu_0\omega_0}\right]^2 = \dfrac{4(R+r)C}{\mu_0\omega_0}$, équation du second degré en r.

La résolution numérique fournit : $r \simeq 179{,}5\ \Omega$.

Il faut **également** comme on l'a signalé que la période $T^* = 1/f^*$ du signal d'entré soit très grande devant la durée d'amortissement τ' des oscillations. Ces dernières sont, pour $Q = 1/2$, de la forme $V_s(t) = E + (At + B)e^{-\omega_0' t}$, donc $\boxed{\tau' = \dfrac{1}{\omega_0'}}$.

Il faut donc $\boxed{f^* << f_0'}$.

8) En réordonnant la fonction de transfert sous la forme canonique d'un passe-bande :

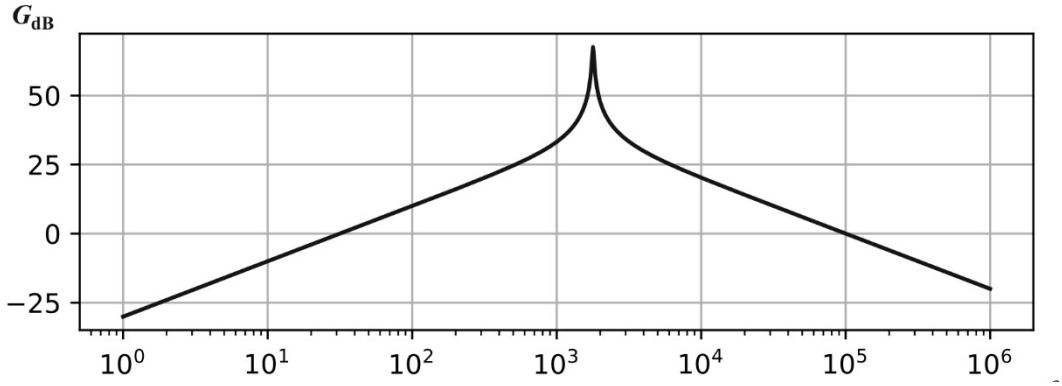
$H(j\omega) = \dfrac{-jRC\omega}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0'}\right)^2 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0'}} = \dfrac{-QRC\omega_0'}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0'} - \dfrac{\omega_0'}{\omega}\right)}$, on identifie avec $H(j\omega) = \dfrac{A_0}{1 + jQ'\left(\dfrac{\omega}{\Omega} - \dfrac{\Omega}{\omega}\right)}$:

$\boxed{\Omega = \omega_0' \simeq 11200 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \ ; \ Q' = Q \simeq 42,7 \text{ et } A_0 = -QRC\omega_0' \simeq -2390 \Rightarrow G_{\text{dB max}} = 20\log|A_0| = 67,6}$

C'est un filtre passe-bande du $2^{\text{ème}}$ ordre **extrêmement sélectif**, et avec un énorme gain maximal à la fréquence de résonance $f_0' = 1780$ Hz.

— pour $\omega << \Omega$ (B.F), $H(j\omega) \sim -jRC\omega \Rightarrow$ comportement dérivateur (pente de +20 dB/décade).

— pour $\omega >> \Omega$ (H.F), $H(j\omega) \sim \dfrac{jRC\omega_0'^2}{\omega} \Rightarrow$ comportement intégrateur (pente de −20 dB/décade).



Interprétation de la figure (4) :

— dérivateur réel ($r = 0$) : le signal d'entrée possède un fondamental à $f^* = 100$ Hz. Cette composante, et les premiers harmoniques, sont intégrés.

Cependant le filtre possède un pic de résonance très aigu et amplifie les harmoniques situés près de 1780 Hz (principalement les harmoniques de rang $n = 17$ et 19 pour un fondamental de 100 Hz), d'où les oscillations parasites observées.

— pseudo-dérivateur : **en ajoutant *r*, le facteur de qualité *Q* baisse. La résonance est moins aigue**, et la bande dérivatrice (partie où la courbe est confondue avec l'asymptote à +20 dB/décade) est agrandie. La réponse spectrale décroît régulièrement (en 1 / *n*), ce qui redonne le spectre caractéristique d'un signal créneau.

9) Pour qu'un signal périodique de fréquence fondamentale f^* soit correctement dérivé, il faut donc :

— que le fondamental f^* ainsi que ses premiers harmoniques significatifs (au moins jusqu'au rang 5-7) se situent dans la bande dérivatrice de pente +20 dB/décade : $\boxed{f^* << f_0'}$

— que le facteur de qualité ne soit pas trop grand pour éviter l'amplification d'harmoniques « non dérivées », mais pas trop petit pour que la bande de fréquences dérivées soit la plus grande possible, soit $\boxed{Q \text{ de l'ordre de 1}}$.

On retrouve par un raisonnement fréquentiel les résultats du 7).

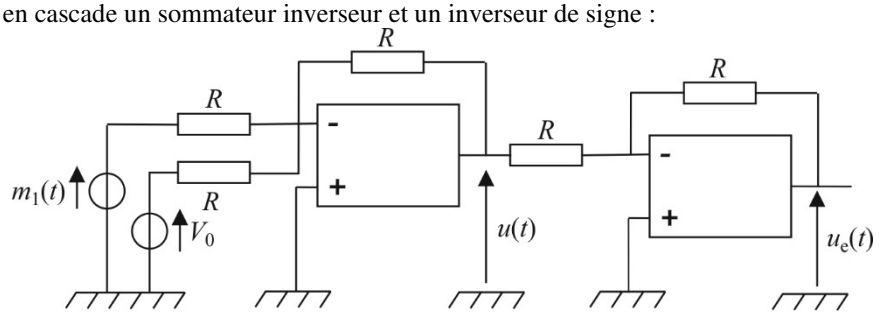
3. Centrale // MP // 2024 : Connexion à internet par LiFi

A - Émission du signal lumineux

Q.1 Hypothèse : D_1 émet $u_1 = V_{sb}$, alors $u_e(t) = u_1 + r_e i_1 = V_{sb} + r_e i_1$.
L'hypothèse est vérifiée si $i_1 > 0 \Leftrightarrow u_e > V_{sb}$, donc ici $\boxed{U_{min} = V_{sb}}$

Q.2 Si $i_1 = i_0 = 0{,}73$ A, alors $u_1 = V_{sb}$ d'où $U_0 = V_{sb} + r_e i_0 = 10{,}2$ V et $\Phi_{e0} = \eta_{led} V_{sb} i_0 = 0{,}70$ W

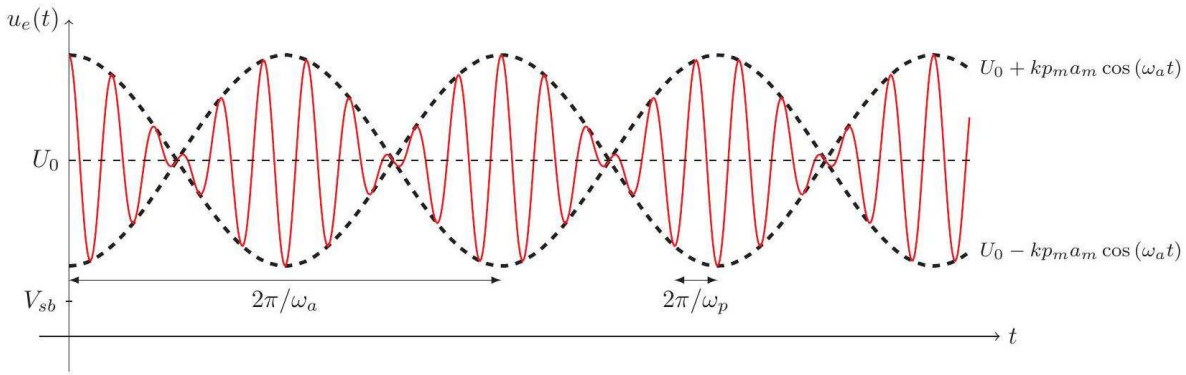
Q.3 Il suffit de mettre en cascade un sommateur inverseur et un inverseur de signe :



On a alors $\boxed{u(t) = -\left[m_1(t) + V_0\right]}$ puis $u_e(t) = -u(t) = m_1(t) + V_0$

Q.4 De $p(t) = p_m \cos(\omega_p t + \alpha_p)$ et $a(t) = a_m \cos(\omega_a t)$ (phase à l'origine choisie nulle comme dans la suite de l'énoncé), on déduit $m_1(t) = k p_m a_m \cos(\omega_p t + \alpha_p)\cos(\omega_a t)$, d'où $u_e(t) = U_0 + k p_m a_m \cos(\omega_p t + \alpha_p)\cos(\omega_a t)$
La valeur minimale du produit de cosinus est -1, donc la valeur minimale de $u_e(t)$ est $U_0 - k p_m a_m$. Cette valeur doit être supérieure à V_{sb} d'où la condition sur $k p_m a_m$: $\boxed{k p_m a_m < U_0 - V_{sb} = r_e i_0 = 7{,}3 \text{ V}}$

Q.5 u_e est un signal de moyenne U_0. La partie variable est une oscillation à $f_p = 10 f_a$, modulée par f_a :



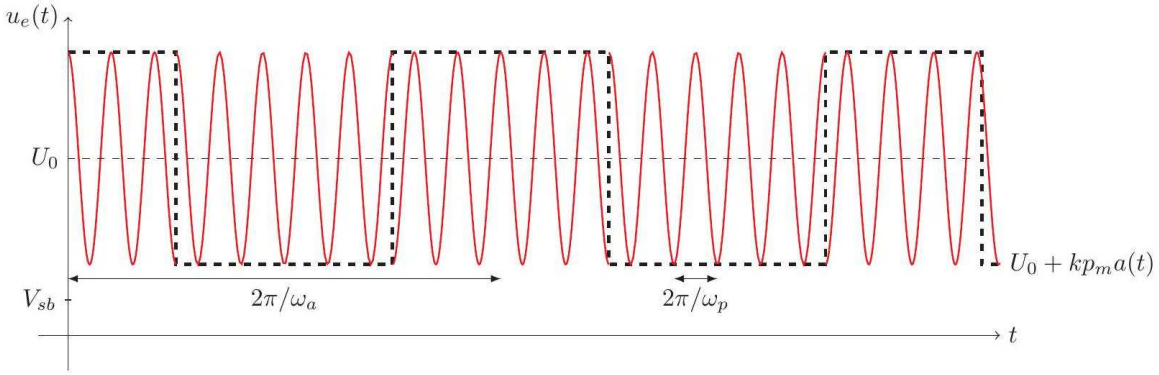
Pour obtenir le spectre, on linéarise l'expression en utilisant $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$:

$$\boxed{u_e(t) = U_0 + \frac{k p_m a_m}{2}\cos\left((\omega_p + \omega_a)t + \alpha_p\right) + \frac{k p_m a_m}{2}\cos\left((\omega_p - \omega_a)t + \alpha_p\right)}$$

Il y a trois fréquences : $\boxed{0,\ f_p + f_a \text{ et } f_p - f_a}$:



Q.6 Le signal modulant est un carré au lieu d'une sinusoïde :



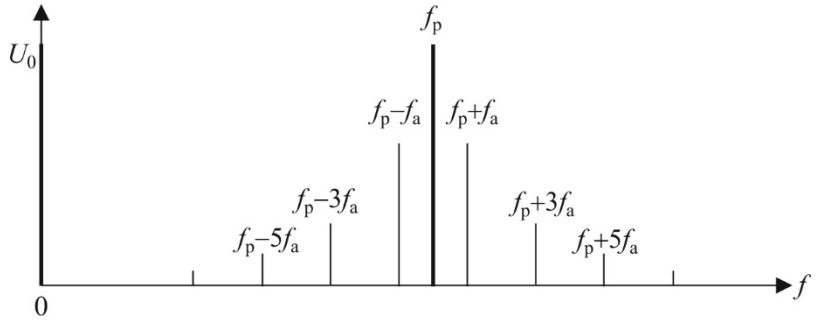
Il se décompose en $a(t) = \frac{a_\mathrm{m}}{2} + \frac{2a_\mathrm{m}}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}\cos\left[(2p+1)\omega_\mathrm{a}t\right]$.

On en déduit $u_\mathrm{e}(t) = U_0 + kp_\mathrm{m}\cos(\omega_\mathrm{p}t+\alpha_\mathrm{p})\left[\frac{a_\mathrm{m}}{2} + \frac{2a_\mathrm{m}}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}\cos\left[(2p+1)\omega_\mathrm{a}t\right]\right]$, soit :

$$u_\mathrm{e}(t) = U_0 + \frac{kp_\mathrm{m}a_\mathrm{m}}{2}\cos(\omega_\mathrm{p}t+\alpha_\mathrm{p}) + \frac{2kp_\mathrm{m}a_\mathrm{m}}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}\cos(\omega_\mathrm{p}t+\alpha_\mathrm{p})\cos\left[(2p+1)\omega_\mathrm{a}t\right]$$

$$u_\mathrm{e}(t) = U_0 + \frac{kp_\mathrm{m}a_\mathrm{m}}{2}\cos(\omega_\mathrm{p}t+\alpha_\mathrm{p}) + \frac{kp_\mathrm{m}a_\mathrm{m}}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}\left[\cos\left(\left[\omega_\mathrm{p}-(2p+1)\omega_\mathrm{a}\right]t+\alpha_\mathrm{p}\right)+\cos\left(\left[\omega_\mathrm{p}+(2p+1)\omega_\mathrm{a}\right]t+\alpha_\mathrm{p}\right)\right]$$

On retrouve donc le spectre de créneaux de part et d'autre de la fréquence f_p :



Réception du signal lumineux et extraction de l'information

Q.7 La puissance émise se répartit sur une demi-sphère de surface $2\pi d^2$. Le flux lumineux par unité de surface est donc $\frac{\Phi_\mathrm{e}}{2\pi d^2} = \frac{K_\mathrm{e}(u_\mathrm{e}(t)-V_\mathrm{sb})}{2\pi r_\mathrm{e} d^2}$. Le capteur reçoit donc $\Phi_\mathrm{r} = \frac{K_\mathrm{e}s_\mathrm{r}(u_\mathrm{e}(t)-V_\mathrm{sb})}{2\pi r_\mathrm{e} d^2}$

Enfin, $u_r = ri_2 = rK_\mathrm{r}\Phi_\mathrm{r}$, soit $u_r(t) = rs_\mathrm{r}K_\mathrm{e}K_\mathrm{r}\frac{u_\mathrm{e}(t)-V_\mathrm{sb}}{2\pi r_\mathrm{e}d^2}$

Q.8 Le filtre F est un filtre passe-haut du premier ordre. Il permet d'éliminer la composante continue (valeur moyenne de u_r).

On reconnaît un diviseur de tension : $\underline{u_{r2}} = \frac{r_2}{r_2+\frac{1}{jC_2\omega}}\underline{u_{r1}} = \frac{jr_2C_2\omega}{1+jr_2C_2\omega}\underline{u_{r1}}$ $\Rightarrow H = \frac{j\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}{1+j\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}$ avec $\omega_\mathrm{c} = \frac{1}{r_2C_2}$

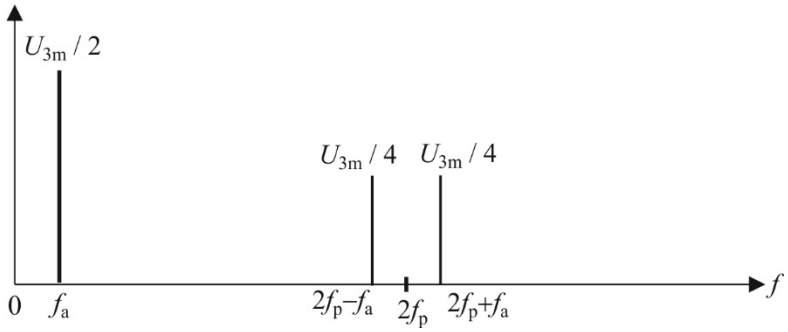
Q.9 Ainsi, comme $u_{r1} = Ku_r$ et que u_{r2} correspond à u_{r1} débarrassé de sa composante continue (car $\omega_\mathrm{c} << \omega_\mathrm{a}, \omega_\mathrm{p}$) :

$$u_{r2}(t) = \frac{rs_\mathrm{r}K_\mathrm{e}K_\mathrm{r}K}{2\pi r_\mathrm{e}d^2}kp_\mathrm{m}a_\mathrm{m}\cos(\omega_\mathrm{p}t+\alpha_\mathrm{p})\cos(\omega_\mathrm{a}t)$$

On a donc $u_{r3}(t)=\dfrac{rs_r K_e K_r K}{2\pi r_e d^2}k^2 {p_m}^2 a_m \cos^2(\omega_p t+\alpha_p)\cos(\omega_a t)$ d'où $\boxed{U_{3m}=\dfrac{rs_r K_e K_r K}{2\pi r_e d^2}k^2 {p_m}^2 a_m}$

On a : $\cos^2(\omega_p t+\alpha_p)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos(2\omega_p t+2\alpha_p)$

$\Rightarrow \cos^2(\omega_p t+\alpha_p)\cos(\omega_a t)=\dfrac{1}{2}\cos(\omega_a t)+\dfrac{1}{4}\cos((2\omega_p+\omega_a)t+2\alpha_p)+\dfrac{1}{4}\cos((2\omega_p-\omega_a)t+2\alpha_p)$ d'où le spectre suivant :



Q.10 En choisissant un filtre passe-bas de coupure tel que $\boxed{\omega_c' << \omega_p \text{ et } \omega_c' >> \omega_a}$, on élimine les deux derniers termes.

Il reste $\boxed{u_{r4}=\dfrac{U_{3m}}{2}\cos(\omega_a t)}$

On peut proposer un filtre passe-bas $R'C'$ du premier ordre (tension de sortie aux bornes du condensateur), de pulsation de coupure $\omega_c'=\dfrac{1}{R'C'}$

Débit binaire du LiFi

Q.11 La durée d'émission d'un bit (0 ou 1) est T_{ck}, donc on a $\boxed{f_{ck}=10\times10^6 \text{ Hz}=10^7 \text{ Hz}}$

Comme $f_p \simeq 10^9$ Hz, La condition est vérifiée.

Q.12 La fréquence de la porteuse est $\boxed{f_b=\dfrac{c}{\lambda}=\dfrac{3{,}00\times10^8}{4{,}70\times10^{-7}}=6{,}4\times10^{14} \text{ Hz}}$

Il faut $f_{ck} < f_b/100 = 6\times10^{12}$ Hz, soit un débit descendant pouvant aller jusqu'à $\boxed{6\cdot10^{12} \text{ bits}\cdot\text{s}^{-1}}$

Néanmoins, des éléments autres dans le circuit (comme la photodiode et son temps de réponse) jouent sans doute fortement sur le débit possible.