DL4 (Électromagnétisme)

1. CENTRALE // PSI // 2024 : À propos de la structure de la Terre

On considère que l'intérieur de la Terre est constitué d'une succession de couches de propriétés physiques différentes, telles que représentées à la figure 1.

— au centre, le noyau forme 17% du volume terrestre et se divise en :

>>> la graine (ou le noyau interne), essentiellement constitué de fer solide.

>>> le noyau externe, essentiellement constitué de fer liquide.

— dans la partie intermédiaire, le manteau constitue 81% du volume terrestre.

— en surface, la croûte solide représente moins de 2% du volume terrestre.

1. Croûte continentale
2. Croûte océanique
3. Manteau supérieur
4. Manteau inférieur (ou mésosphère)
5. Noyau externe
6. Noyau interne (ou graine)

A. Discontinuité de Mohorovicic
B. Discontinuité de Gutenberg
C. Discontinuité de Lehmann

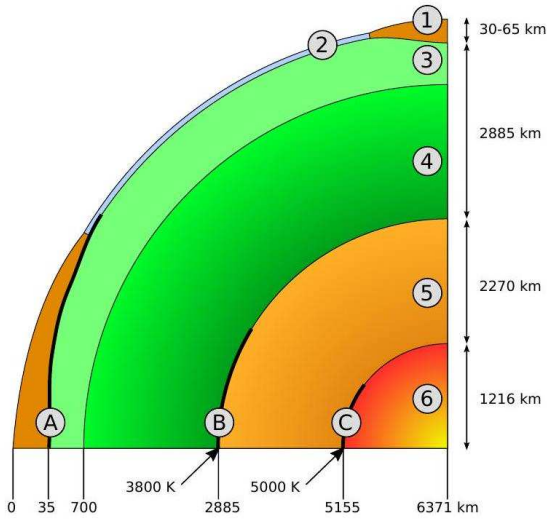


Figure 1

I. - Ondes P et S dans la Terre et modèle PREM

Les ondes de volume dans la Terre, modélisée comme un milieu tridimensionnel élastique linéaire, sont de deux types :

— les ondes P de compression-dilatation de nature longitudinale. Elles peuvent se propager dans les milieux solides et fluides. Leur vitesse est $v_P = \sqrt{(K + 4L/3)/\mu}$ où μ est la masse volumique et K et L sont deux coefficients positifs appelés respectivement module d'incompressibilité et module de cisaillement (exprimés en Pa). Ces trois grandeurs sont caractéristiques du milieu traversé. Le module de cisaillement est généralement considéré comme nul dans les fluides où il est négligeable devant le module d'incompressibilité ;

— les ondes S de cisaillement. Elles ne se propagent que dans les solides. Leur vitesse est $v_S = \sqrt{L/\mu}$.

L'analyse de temps de parcours des ondes P et S, enregistrées en différents points du globe après de grands séismes, a permis de calibrer un modèle radial de la Terre dit modèle PREM (Preliminary Reference Earth Model). Il permet notamment de préciser, en fonction de la distance r au centre de la Terre, les vitesses v_P et v_S et la masse volumique μ.

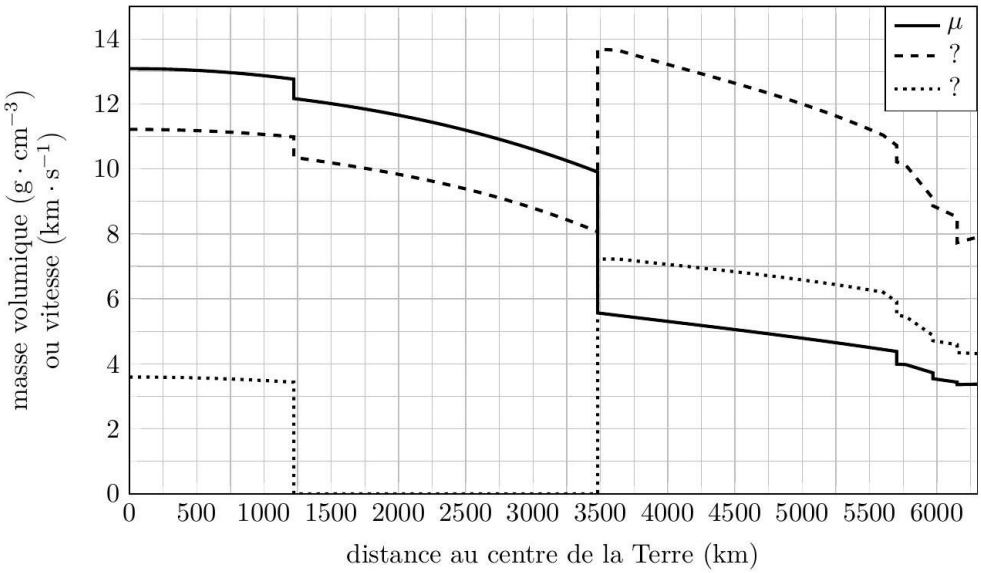


Figure 2 Profils de la masse volumique et des vitesses des ondes P et S dans le modèle PREM. D'après Dziewonski A. M., Anderson D. L., 1981. Preliminary reference Earth model. Physics of the Earth and Planetary Interiors.

Q.1 En explicitant la démarche, attribuer aux vitesses des ondes P et S les profils en tirets ou en pointillés de la figure 2. Discuter la cohérence de cette figure avec la structure interne de la Terre décrite dans l'introduction du sujet.

II Étude d'un modèle gravimétrique de la Terre

II.A – Préliminaire : l'analogie électrostatique-gravitation

Q.2 En utilisant l'analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel, montrer que ce dernier, noté $\vec{\mathcal{G}}$, vérifie l'équation locale $\mathrm{div}\vec{\mathcal{G}} = -4\pi G\mu$ où $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$ est la constante universelle de gravitation et μ la masse volumique locale. En déduire l'énoncé du théorème de Gauss de la gravitation (analogue du théorème de Gauss de l'électromagnétisme).

II.B - Un premier modèle gravimétrique fruste de la Terre

Dans ce premier modèle, on assimile la Terre à une boule de centre O, de rayon R_T et de masse M_T uniformément répartie en volume. Celle-ci est à l'origine d'un champ gravitationnel noté $\vec{\mathcal{G}}$. On note μ_0 la masse volumique moyenne de la Terre (qui s'identifie ici à la masse volumique en chacun de ses points).

Q.3 Déterminer le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$ *en tout point de l'espace* en introduisant un système de coordonnées adapté. On l'exprimera en fonction de G, R_T, M_T et r.

Q.4 Tracer sa norme en fonction de la distance r au centre O.

Q.5 Calculer sa valeur $\mathcal{G}_0$ à la surface de la Terre. On donne $R_T \simeq 6371$ km et $\mathcal{G}_0 = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. En déduire la valeur numérique de μ_0.

II. C - Un second modèle gravimétrique (noyau + manteau) de la Terre

Le modèle précédent est fruste puisqu'il ne tient pas assez compte de la structure interne de la Terre. On rencontre dans la littérature un second modèle, où la Terre est toujours assimilée à une boule de centre O et de rayon R_T avec une répartition de masse à symétrie sphérique de centre O ; mais cette répartition est cette fois-ci inhomogène de sorte que la norme $\mathcal{G}_T$ du champ gravitationnel interne en fonction de la distance r au centre O présente l'allure précisée à la figure 3.

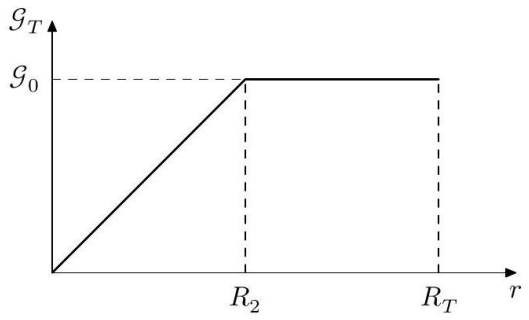


Figure 3 Champ de gravitation terrestre à l'intérieur de la Terre pour un modèle (noyau + manteau).

On distingue deux parties dans ce modèle (noyau + manteau) : la discontinuité de Gutenberg définie à la figure 1 correspond à la distance $r = R_2$.
On note toujours μ_0 la masse volumique moyenne de la Terre.

Q.6 Justifier que la valeur de $\mathcal{G}_0$ à la surface de la Terre dans le cadre de ce modèle est inchangée par rapport à celle évaluée à la question Q.5.

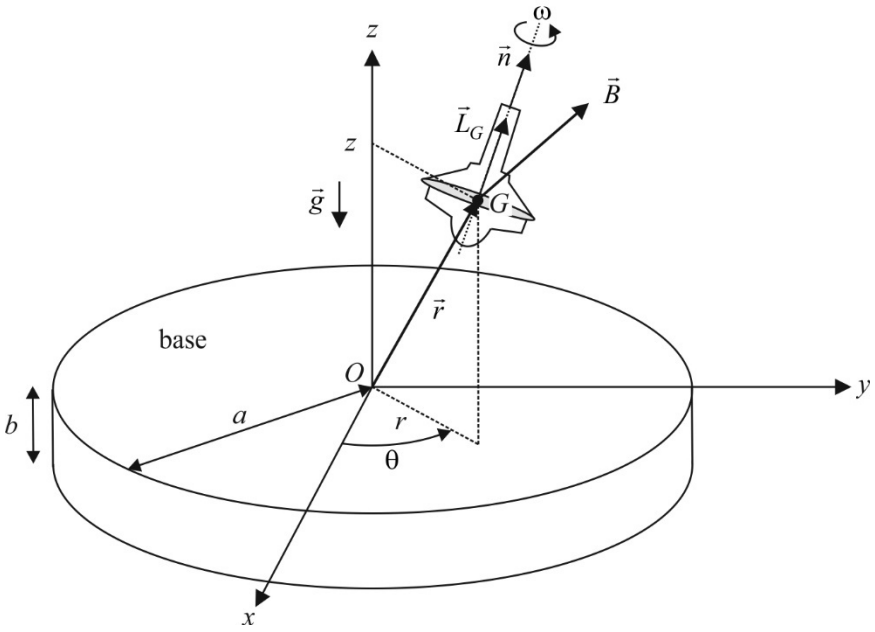
Q.7 Déterminer la distribution de masse volumique $\mu(r)$ pour la Terre dans ce modèle. L'exprimer en fonction de R_T, R_2 et μ_0 dans le noyau et en fonction de μ_0, R_T et r dans le manteau.

On donne en coordonnées sphériques $\mathrm{div}\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r^2 A_r\right] + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[A_\theta \sin\theta\right] + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$.

Q.8 Tracer l'allure de cette distribution de masse volumique $\mu(r)$ en précisant les valeurs numériques remarquables. Discuter les similitudes et les différences de ce modèle avec le profil de masse volumique donné par le modèle PREM sur la figure 2.

2. D'après E.N.S : La physique du Lévitron©

La « toupie qui lévite » est un ingénieux dispositif anciennement commercialisé dans les boutiques de jeux. Il s'agit d'une petite toupie en plastique de masse *m*, d'environ deux cm de haut et deux cm de diamètre, dans laquelle se trouve un aimant d'une centaine de mm^3. On fait tourner la toupie au-dessus d'une base d'axe vertical, qui est un large disque de 10 cm de diamètre et de 1 cm d'épaisseur, contenant un aimant presque aussi grand.
Avec un certain entraînement, on arrive à stabiliser la toupie, qui reste en l'air à quelques centimètres au-dessus de la base ! Elle peut ainsi léviter pendant plusieurs minutes, en tournant toujours sur elle-même, avec de légères oscillations horizontales et verticales. Le but du problème est de comprendre le principe de cette lévitation et de discuter quelques ordres de grandeur.





Données et formules

• Les deux aimants, celui de la base et celui de la toupie, ont une aimantation $\vec{M}$, c'est-à-dire un moment magnétique par unité de volume, de l'ordre de $5\cdot10^5\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}$.

• On donne $\mu_0 \simeq 4\pi\cdot10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$.

• $a = 5\,\mathrm{cm}$; $b = 1\,\mathrm{cm}$.

On donne $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, intensité du champ de pesanteur.

• L'origine *O* des positions est le centre de la face supérieure de la base ; on utilisera au choix la notation vectorielle, cartésienne ou cylindrique : $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.

On notera θ l'angle entre $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_r$. Dans ce problème, on repère un point *M* avec des coordonnées cylindrique (r,θ,z) avec *r* *algébrique* : pour $\theta\in[0,\pi[$, on a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ avec $r>0$ et pour $\theta\in[\pi,2\pi[$, $\overrightarrow{OM'} = -r\vec{e}_r + z\vec{e}_z = r'\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ avec $r'<0$ pour le point M' qui se déduit de *M* par une rotation d'angle π autour de *Oz* : $\vec{e}_r$ reste le vecteur radial attaché à *M*.

• $\Delta\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left[\mathrm{div}\vec{A}\right] - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{A}\right]$

1 Le champ magnétique créé par la base

Tant que l'on n'a pas mis la toupie, la région juste au-dessus de la base est vide. La base crée dans cette région un champ magnétostatique $\vec{B}$.

1.1

Q.1 Que vaut le rotationnel de $\vec{B}$? Justifier qu'il existe une fonction Φ(*x*,*y*,*z*) telle que $\vec{B} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\Phi$. Quelle est l'unité de Φ ? Que vaut le laplacien de Φ ?

Soit un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mu} = \mu\vec{e}_z$ porté par *Oz* situé à l'origine *O*. Il crée le potentiel $\Phi(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0\vec{\mu}\cdot\vec{r}}{4\pi r^3}$.

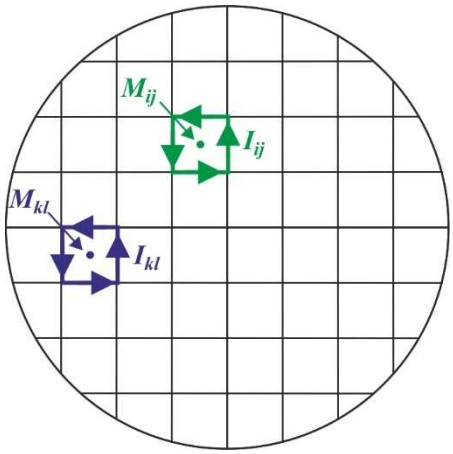
Pour évaluer $\Phi(x=0, y=0, z)$ le long de l'axe vertical Oz, $z>0$, on modélise la base par un ensemble de dipôles magnétiques : en l'occurrence, un mince disque de rayon a et d'épaisseur $b << a$ dont le moment dipolaire par unité de volume, $\vec{M} = \dfrac{\mathrm{d}^3\vec{\mu}}{\mathrm{d}^3V}$, est uniforme et pointe vers le haut. On dit alors que la base est un disque « d'aimantation $\vec{M}$ uniforme ».

Q.2 Montrer qu'on peut se ramener au calcul d'une intégrale sur la surface de la base, de la forme : $\Phi(0,0,z) = \iint_{\text{base}} f(r',z) r' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\theta'$, en précisant l'expression de la fonction f.

Calculer alors l'intégrale et montrer que $\Phi(0,0,z) = \Phi_0(z) = A\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$. Préciser la valeur numérique et l'unité de A.

1.2 On notera $B_n(z) = \dfrac{\partial^n B_z}{\partial z^n}(r=0,z)$ les dérivées successives de B_z, le long de l'axe z.

Q.3 On cherche à montrer que la distribution étudiée est équivalente à une spire de courant circulaire d'axe Oz et de rayon a, placée dans le plan $z=0$.

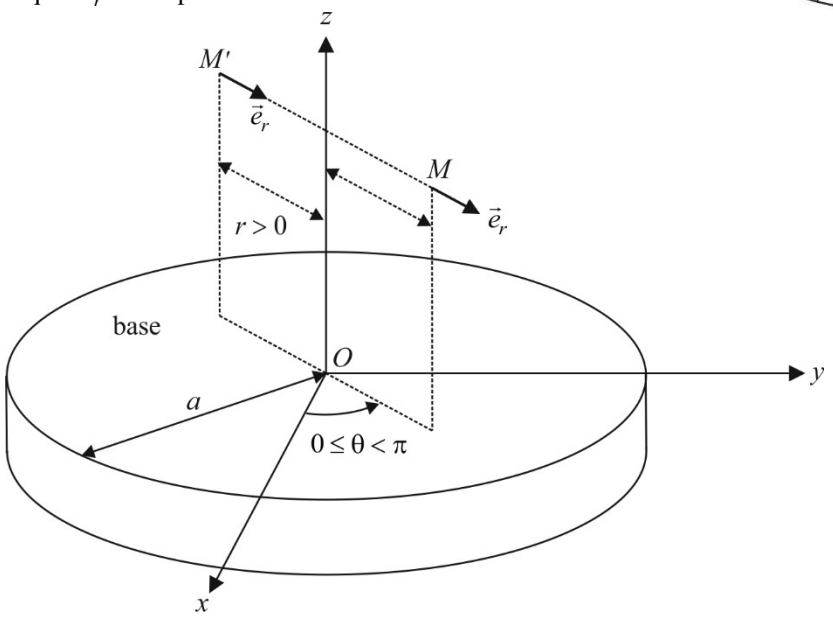


Pour cela, on découpe la surface du cercle de rayon a en N^2 carrés élémentaires (avec $N \to \infty$) autour des points M_{ij} avec $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$.

On considère une spire de courant carrée élémentaire autour du point M_{ij}, parcourue par un courant stationnaire d'intensité I_{ij}. Rappeler l'expression du moment dipolaire créé par cette spire en M_{ij}.

L'aimantation de la base étant uniforme, comparer I_{ij} avec I_{kl}, avec $(k,l) \neq (i,j)$. Conclure.

En déduire que le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_r(r,z)\vec{e}_r + B_z(r,z)\vec{e}_z$ et que B_z est paire en r alors que B_r est impaire en r.



Q.4 Sans calculer l'expression des B_n, montrer qu'au voisinage de l'axe Oz les premiers termes du développement de $\vec{B}$ sont $\vec{B}(r,z) = -\dfrac{B_1(z)}{2} r\vec{e}_r + \left[B_0(z) - \dfrac{B_2(z)}{4} r^2\right]\vec{e}_z + O(r^3)$. Pour cela, on pourra :

— calculer le flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée judicieusement choisie ;

— calculer la circulation de $\vec{B}$ le long d'un contour fermé judicieusement choisi.

Q.5 Calculer B_0, B_1 et B_2. On montrera notamment que $B_0 = A\dfrac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$.

2 Toupie qui ne tourne pas

On place la toupie aimantée au-dessus de la base. Pour l'instant, on ne la fait pas tourner. L'énergie potentielle totale de la toupie E_p tient compte de son interaction magnétostatique avec la base et de la pesanteur. On note *G* le centre d'inertie de la toupie et *z* son altitude.

2.1 Afin de simplifier le calcul de l'effet du champ $\vec{B}$ sur cette toupie, on écrira que $E_\text{p} \simeq mgz - \vec{\mu} \cdot \vec{B}$, où le moment magnétique $\vec{\mu}$ de la toupie reste toujours parallèle à $\vec{n}$, vecteur directeur de l'axe de la toupie. On note ψ l'angle entre $\vec{\mu}$ et $\vec{B}$.

Q.6 En notant *h* la longueur caractéristique de l'aimant présent dans la toupie, montrer en analysant les ordres de grandeur que l'expression de E_p est valable si $h << a$. On prendra *a* pour l'ordre de grandeur de l'altitude *z* de la toupie.

Q.7 Discuter avec précision de combien de variables de translation (positions) et d'orientation (angles) dépend E_p.

Q.8 Exprimer $\|\vec{\mu}\|$ en fonction des caractéristiques de la toupie. Indiquez l'ordre de grandeur de la valeur de $\|\vec{\mu}\|$ et son unité.

2.2 On imagine provisoirement que l'on arrive à fixer la position de la toupie en un point de l'axe *Oz*. On n'impose pas l'orientation de la toupie.

Q.9 Quelles sont les orientations qui correspondent à un équilibre ?
Discuter la stabilité de chacun de ces équilibres : lesquels sont stables, lesquels sont instables ?

2.3 On imagine provisoirement que l'on arrive à fixer l'orientation de la toupie parallèlement à *Oz* : $\vec{\mu}$ soit dirigé vers le haut, soit dirigé vers le bas. On n'impose pas que la position de la toupie reste sur l'axe *Oz*.
On cherche les positions qui correspondent à un équilibre.

Q.10 Montrer d'abord que nécessairement $r = 0$.

Q.11 En déduire que l'on doit avoir $\psi = \pi$. Commenter en termes de forces (la force magnétique $\vec{F}$ est associée à l'énergie potentielle $E_{\text{p,mag}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$).

Q.12 Montrer enfin que des valeurs de *z* ne peuvent exister que si $m \leq m_{\max}$, avec $m_{\max} = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{5/2} \frac{\|\vec{\mu}\| A}{ga^2}$.

Q.13 Discuter la stabilité de chacun de ces équilibres : lesquels sont stables, lesquels sont instables ?

Q.14 Le laplacien de E_p est-il partout nul ? Y a-t-il un lien avec la stabilité des points d'équilibre ? (On pourra ici utiliser les coordonnées cartésiennes de la toupie).

3 Toupie rapide

On fait tourner la toupie rapidement. Pour simplifier l'étude de cette toupie, on suppose dans toute la suite que son moment cinétique barycentrique $\vec{L}_G$, sa rotation propre $\vec{\omega}$, et son moment magnétique $\vec{\mu}$ restent constamment parallèles au vecteur directeur $\vec{n}$ de son axe de symétrie (approximation gyroscopique : $\vec{L}_G = I\vec{\omega}$ avec *I* moment d'inertie de la toupie par rapport à son axe de symétrie).

3.1
Q.15 Peut-on imaginer, intuitivement, quel sera l'effet de cette rotation sur la lévitation de la toupie ?

3.2
Q.16 Le référentiel barycentrique $\mathscr{R}^*$ de la toupie est le référentiel en translation par rapport au référentiel du laboratoire, et dans lequel *G* est fixe. On note $\vec{L}_G$ le moment cinétique de la toupie au point de réduction *G*. Dans $\mathscr{R}^*$, le théorème du moment cinétique s'écrit $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathscr{M}}_{G\text{ext}}$, où $\vec{\mathscr{M}}_{G\text{ext}}$ est le moment en *G* des actions extérieures s'exerçant sur la toupie.
En déduire l'équation d'évolution de $\vec{L}_G$ en supposant que la toupie reste toujours à la même position $\vec{r}$, et voit donc toujours le même champ magnétique $\vec{B}(x, y, z)$.
Q.17 On note $\vec{b} = \vec{B} / \|\vec{B}\|$ la direction du champ magnétique.

Montrer que $\left\|\vec{L}_G\right\|$, $L_{//} = \vec{L}_G \cdot \vec{b}$ et $\mu_{//} = \vec{\mu} \cdot \vec{b}$ sont alors indépendants du temps.

Q.18 Montrer qu'en ce cas l'axe de la toupie tourne autour de $\vec{b}$ (mouvement de précession), avec un vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ que l'on calculera en fonction de μ, I, ω et $\vec{B}$.

Dans tout ce qui suit, on écrira que $L_{//}$ et $\mu_{//}$ sont constants, même si la toupie se déplace un peu dans l'espace.

3.3 Dans toute la suite du problème on écrit donc désormais l'énergie potentielle sous la forme :
$E_p \simeq mgz - \mu_{//} \left\|\vec{B}\right\|$, avec $\mu_{//} \simeq Cte$.

Q.19 De combien de variables dépend E_p ?

Q.20 Le laplacien de E_p est-il *a priori* partout nul ? Y a-t-il un lien avec la stabilité des points d'équilibre éventuels ?

4. Stabilité de la toupie rapide

On cherche à déterminer à quelles conditions la toupie rapide est stable au voisinage de l'axe Oz.

Q.21 Montrer, en utilisant l'expression de $\vec{B}$ donnée à la question 4, qu'à l'ordre 2 en r :
$$E_p(r,z) \simeq mgz - \mu_{//} B_0(z) \cdot \left[1 + \left(\frac{B_1^2(z)}{2B_0^2(z)} - \frac{B_2(z)}{B_0(z)}\right)\frac{r^2}{4}\right].$$

On montre que pour que la fonction $E_p(r,z)$ présente un minimum, il faut $\frac{\partial^2 E_p}{\partial r^2}(r_{éq}, z_{éq}) = \alpha > 0$; $\frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2}(r_{éq}, z_{éq}) = \beta > 0$ et que si $\frac{\partial^2 E_p}{\partial r \partial z}(r_{éq}, z_{éq}) = \gamma$, on ait $\alpha\beta - \gamma^2 > 0$.

Q.22 Montrer que les conditions d'existence d'un équilibre stable dans toutes les directions à la fois impliquent que :
$\mu_{//} < 0$ (i) $\qquad B_2 > 0$ (ii) $\qquad B_1^2 / B_0 - 2B_2 > 0$ (iii)

Q.23 En utilisant les expressions des B_n, calculées à la question 5, montrer que la condition nécessaire et suffisante d'équilibre stable se met sous la forme $0{,}5 z_0 < z < 0{,}632 z_0$ et $0{,}818 m_0 < m < 0{,}859 m_0$.
Donner approximativement la valeur numérique de m_0 et de z_0.

Q.24 Que se passe-t-il si la toupie est plus légère que $0{,}818 m_0$? Si elle est plus lourde que $0{,}859 m_0$?

5 Discussion physique

5.1
Q.25 Résumer ce que vous avez compris des résultats précédents. Expliquer ce qui permet à la toupie de léviter de façon stable.

5.2 Discuter la réalisation pratique de cette lévitation :
Q.26 Est-ce que la même toupie lévite aussi bien quand elle est lancée par un droitier (donc dans le sens des aiguilles d'une montre) ou par un gaucher (donc dans le sens trigonométrique) ?

Q.27 En pratique, on pose une petite plaque de plastique sur la base, et on fait tourner la toupie dessus, comme une toupie usuelle. Ensuite seulement, on soulève délicatement la plaque, jusqu'à ce que la toupie prenne sa position d'équilibre. La plaque devient alors inutile, et on la retire. Pourquoi est-ce plus facile que de lancer la toupie directement à sa position d'équilibre ?

Q.28 Au bout de quelques minutes de lévitation, à cause de la viscosité de l'air, la toupie ralentit. Pouvez-vous imaginer ce qu'elle devient alors ?

Q.29 En pratique, il est indispensable que l'axe de symétrie soit bien vertical. Pour cela, le jeu est livré avec deux petites cales ou des vis permettant d'ajuster l'horizontalité de la base. Que se passe-t-il si ce réglage n'est pas bien réalisé ?

Q.30 Pour obtenir la condition $0{,}818 m_0 < m < 0{,}859 m_0$, on enfile autour de son axe quelques-uns des légers disques de plastique ou de métal livrés avec le jeu. Comme la température de la pièce varie lentement, on est obligé de refaire régulièrement un réglage précis de la masse. Pourquoi : quels sont les paramètres du problème qui sont sensibles à la température ?